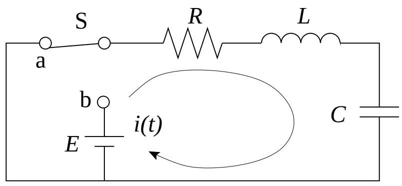
# 電気回路演習 II 第 11 回 (平成 18 年 1 月 16 日 (火))

## 演習

図に示す $RLC$ 回路において，スイッチ S が端子 a に接続された状態で十分な時間が経過したとする．その後，スイッチ S を端子 a から端子 b へと切り換えたとする．スイッチ S を切り換えた時刻を $t = 0$ として，以下の設問に答えなさい．なお，$R = 2\ \Omega$，$L = 0.5$ H，$C = 0.25$ F，$E = 5$ V とする．




(a) コンデンサ $C$ に蓄えられる電荷を $q(t)$ とする．この $q(t)$ を用いて，$0 < t$ における回路の微分方程式を示しなさい．

(b) 設問 (a) で求めた微分方程式に対する定常解 $q_s(t)$ を求めなさい．

(c) 過渡解を $q_t(t)$ として，過渡解に対する微分方程式を示しなさい．

(d) 設問 (c) で求めた微分方程式に対する特性方程式を求め，この特性方程式の根を求めなさい．

(e) 設問 (c),(d) の結果から過渡解 $q_t(t)$ を求めなさい．

(f) 設問 (b)〜(e) の結果を用いて，設問 (a) の微分方程式に対する一般解 $q(t)$ を求めなさい．

(g) 時刻 $t = 0$ における電荷 $q(t)$，電流 $i(t)$ の値 (初期条件) を示しなさい．

(h) 以上の設問の結果から，$0 < t$ において回路に流れる電流 $i(t)$ を求めなさい．

## 解答

(a) キルヒホッフの電圧則より

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いて

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

与えられた値を代入すると

$$0.5\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 2\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{0.25} = 5$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 4\frac{dq(t)}{dt} + 8q(t) = 10$$

(b) 定常解 $q_s(t)$ は

$$8q_s(t) = 10 \qquad \rightarrow \qquad q_s(t) = 1.25\ \mathrm{C}$$

(c) 過渡解 $q_t(t)$ に対する微分方程式は

$$\frac{d^2q_t(t)}{dt^2} + 4\frac{dq_t(t)}{dt} + 8q_t(t) = 0$$

(d) 解を $q_t(t) = Ae^{mt}$ と仮定すると，特性方程式は

$$m^2 + 4m + 8 = 0$$

となり，根は

$$m = -2 \pm j2$$

(e)

$$\begin{aligned}
q_t(t) &= A_1 e^{(-2+j2)t} + A_2 e^{(-2-j2)t} \\
&= e^{-2t}\left(A_1 e^{j2t} + A_2 e^{-j2t}\right) \\
&= e^{-2t}\left((A_1 + A_2)\cos 2t + j(A_1 - A_2)\sin 2t\right) \\
&= e^{-2t}\left(B_1 \cos 2t + B_2 \sin 2t\right) \qquad (B_1 = A_1 + A_2,\quad B_2 = j(A_1 - A_2))
\end{aligned}$$

(f) 一般解 $q(t)$

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 1.25 + e^{-2t}\left(B_1 \cos 2t + B_2 \sin 2t\right)$$

(g) 初期条件

$$q(0) = 0, \quad i(0) = 0$$

(h) $i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いて

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = -2e^{-2t}\left(B_1 \cos 2t + B_2 \sin 2t\right) + 2e^{-2t}\left(-B_1 \sin 2t + B_2 \cos 2t\right) \\
&= 2e^{-2t}\left\{(-B_1 + B_2)\cos 2t - (B_1 + B_2)\sin 2t\right\}
\end{aligned}$$

初期条件 $t = 0$，$q(0) = 0$ から

$$q(0) = 1.25 + B_1 = 0$$

初期条件 $t = 0$，$i(0) = 0$ から

$$i(0) = 2(-B_1 + B_2) = 0$$

したがって $B_1 = -1.25$，$B_2 = -1.25$ であるから

$$i(t) = 5e^{-2t} \sin 2t \ \mathrm{A}$$