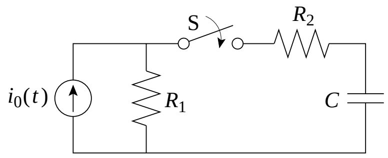
電気回路演習 II 第 10 回 (平成 18 年 12 月 22 日 (金))

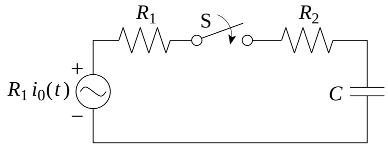
演習

図の回路で，$t=0$ でスイッチ S を閉じ，交流電流 $i_0(t) = I_0 \sin(\omega t + \theta)$ を流したときの抵抗 R_2 に流れる電流 $i(t)$ を求めなさい．ただし，コンデンサ C の初期電荷は 0 とする．



解答

テブナンの定理により電流源を電圧源に置き換える



コンデンサの電荷を $q(t)$ とすると，以下の回路方程式が得られる．

$$(R_1 + R_2) i(t) + \frac{q(t)}{C} = R_1 I_0 \sin(\omega t + \theta)$$

また，単位時間当たりのコンデンサの電荷の増加量 $dq(t)/dt$ は流れ込む電流 $i(t)$ に等しいので，$i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ と置くと

$$(R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = R_1 I_0 \sin(\omega t + \theta)$$

上式の解を定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ に分けて考えると，それぞれ

$$\begin{aligned}
(R_1 + R_2)\frac{dq_s(t)}{dt} + \frac{q_s(t)}{C} &= R_1 I_0 \sin(\omega t + \theta) \\
(R_1 + R_2)\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} &= 0
\end{aligned}$$

まず，定常解について解く，交流理論を用いて $d/dt \to j\omega$ として

$$j\omega Q_s (R_1 + R_2) + \frac{Q_s}{C} = R_1 I_0 e^{j\theta}$$

上式を Q_s について解くと

$$\begin{aligned}
Q_s &= \frac{R_1 I_0 e^{j\theta}}{j\omega(R_1 + R_2) + \frac{1}{C}} = C \frac{R_1 I_0 e^{j\theta}}{1 + j\omega C (R_1 + R_2)} \\
&= C \cdot \frac{R_1 I_0}{\sqrt{1 + \{\omega C (R_1 + R_2)\}^2}} e^{j(\theta - \phi')} \qquad \left(\phi' = \tan^{-1}\{\omega C (R_1 + R_2)\}\right)
\end{aligned}$$

よって，定常解は時間領域で

$$q_s(t) = Q_m \sin(\omega t + \theta - \phi') \qquad \left(Q_m = C \cdot \frac{R_1 I_0}{\sqrt{1 + \{\omega C (R_1 + R_2)\}^2}}\right)$$

となる．

次に，過渡解は

$$q_t(t) = A e^{-\frac{t}{C(R_1 + R_2)}} \qquad (A : \text{積分定数})$$

となる．

従って，電荷 $q(t)$ の一般解は

$$
\begin{aligned}
q(t) &= q_s(t) + q_t(t) \\
&= Q_m \sin(\omega t + \theta - \phi') + Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}
\end{aligned}
$$

初期条件として $t = 0$ で $q(0) = 0$ を用いると

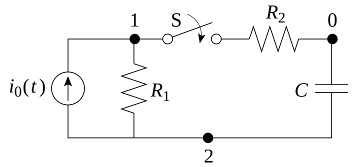
$$
q(0) = Q_m \sin(\theta - \phi') + A = 0 \qquad \to \qquad A = -Q_m \sin(\theta - \phi')
$$

となる．よって

$$
q(t) = Q_m \sin(\omega t + \theta - \phi') - Q_m \sin(\theta - \phi') e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}
$$

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = \omega Q_m \cos(\omega t + \theta - \phi') + \frac{Q_m \sin(\theta - \phi')}{C(R_1+R_2)} e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} \\
&= \frac{R_1 I_0}{\sqrt{1 + \{\omega C(R_1+R_2)\}^2}} \left\{ \omega C \cos(\omega t + \theta - \phi') + \frac{\sin(\theta - \phi')}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} \right\}
\end{aligned}
$$

別解



上図のように節点を設定して節点方程式を立てると

$$
\begin{cases}
i_0(t) = \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \right) v_1(t) - \dfrac{1}{R_1} v_2(t) & \cdots (A) \\
-i_0(t) = -\dfrac{1}{R_1} v_1(t) + \left(\dfrac{1}{R_1} + C \dfrac{d}{dt} \right) v_2(t) & \cdots (B)
\end{cases}
$$

(A)+(B) より

$$
0 = \frac{1}{R_2} v_1(t) + C \frac{dv_2(t)}{dt}
$$

上式に (A) から求まる v_2

$$
v_2(t) = R_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_1(t) - R_1 i_0(t)
$$

を代入すると

$$
0 = \frac{1}{R_2} v_1(t) + C \frac{d}{dt} \left\{ \frac{R_1 + R_2}{R_2} v_1(t) - R_1 i_0(t) \right\}
$$

$$
C(R_1 + R_2) \frac{dv_1(t)}{dt} + v_1(t) = CR_1 R_2 \frac{di_0(t)}{dt}
$$

いま，節点電位 v_1 を定常解 v_{1s} と 過渡解 v_{1t} に分けて考えると

$$
C(R_1 + R_2) \frac{dv_{1s}(t)}{dt} + v_{1s}(t) = CR_1 R_2 \frac{di_0(t)}{dt}
$$

$$
C(R_1 + R_2) \frac{dv_{1t}(t)}{dt} + v_{1t}(t) = 0
$$

であり，v_{1s} は交流理論から

$$
j\omega C(R_1 + R_2) V_{1s} + V_{1s} = j\omega CR_1 R_2 I_0 e^{j\theta}
$$

より，

$$V_{1s} = \frac{j\omega CR_1R_2I_0}{1+j\omega C(R_1+R_2)}e^{j\theta} = \frac{\omega CR_1R_2I_0}{\sqrt{1+\{\omega C(R_1+R_2)\}^2}} \cdot \left(je^{j(\theta-\phi')}\right)$$

ここで，$\phi' = \tan^{-1}\omega C(R_1+R_2)$ であり

$$\tan\phi' = \omega C(R_1+R_2), \qquad \cos\phi' = \frac{1}{\sqrt{1+\{\omega C(R_1+R_2)\}^2}}$$

である．以上より $v_{1s}(t)$ は

$$v_{1s}(t) = R_2I_m\cos(\omega t+\theta-\phi') \qquad \left(I_m = \frac{\omega CR_1I_0}{\sqrt{1+\{\omega C(R_1+R_2)\}^2}}\right)$$

と求まる．また，過渡解 v_{1t} は

$$v_{1t}(t) = Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} \qquad (A: \text{積分定数})$$

であるので，一般解は

$$v_1(t) = v_{1s}(t) + v_{1t}(t) = R_2I_m\cos(\omega t+\theta-\phi') + Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}$$

と求まり，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{v_1}{R_2} = I_m\cos(\omega t+\theta-\phi') + A'e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} \qquad \left(A' = \frac{A}{R_2}\right)$$

と求まる．次に，未知定数 A' を決定するために，$t=0$ での初期条件を求める．スイッチ投入直後はコンデンサ C に電圧はかかっていないので，R_2 に流れる電流 $i(0)$ は

$$i(0) = \frac{R_1}{R_1+R_2}I_0\sin\theta$$

である．これを $i(t)$ の一般解に代入すると

$$i(0) = I_m\cos(\theta-\phi') + A' = \frac{R_1}{R_1+R_2}I_0\sin\theta$$

$$\begin{aligned}
A' &= \frac{R_1I_0}{R_1+R_2}\sin\theta - I_m\cos(\theta-\phi') \\
&= \frac{R_1I_0}{\sqrt{1+\{\omega C(R_1+R_2)\}^2}} \cdot \frac{1}{R_1+R_2}\left\{\frac{\sin\theta}{\cos\phi'} - \tan\phi'\cos(\theta-\phi')\right\} \\
&= \frac{R_1I_0}{\sqrt{1+\{\omega C(R_1+R_2)\}^2}} \cdot \frac{1}{R_1+R_2}\left\{\frac{\sin(\theta-\phi')\cos\phi' + \cos(\theta-\phi')\sin\phi'}{\cos\phi'} - \tan\phi'\cos(\theta-\phi')\right\} \\
&= \frac{R_1I_0}{\sqrt{1+\{\omega C(R_1+R_2)\}^2}} \cdot \frac{\sin(\theta-\phi')}{R_1+R_2}
\end{aligned}$$

以上より

$$i(t) = \frac{R_1I_0}{\sqrt{1+\{\omega C(R_1+R_2)\}^2}}\left\{\omega C\cos(\omega t+\theta-\phi') + \frac{\sin(\theta-\phi')}{R_1+R_2}e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}\right\}$$