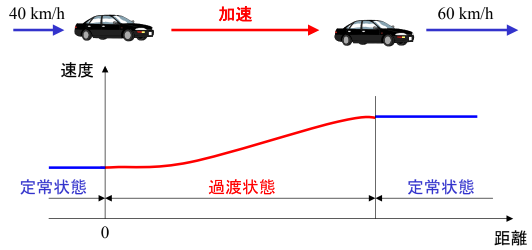
過渡現象とは

ある定常状態から別の定常状態に移行する間に起こる現象

例) 時速 40 km で走っている車が加速して時速 100 km になるまで

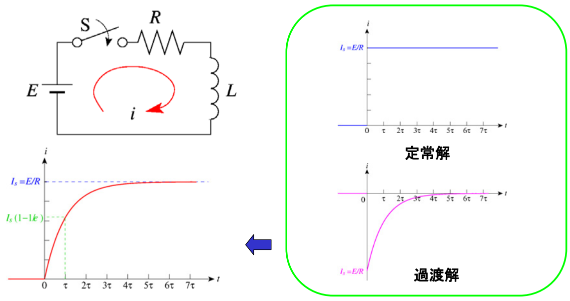


電気回路の過渡現象

RL 直列回路

スイッチを入れた直後 ⟶ L は開放　$i=0$

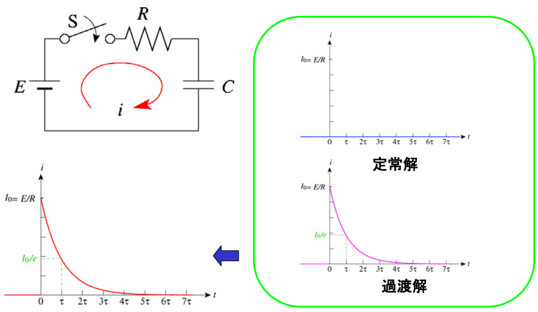
十分時間経過後 ⟶ L は短絡　$i=\dfrac{E}{R}$



RC 直列回路

スイッチを入れた直後 ⟶ C は短絡　$i=\dfrac{E}{R}$

定常状態 ⟶ C は開放　$i=0$

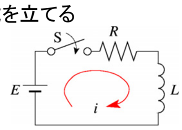


回路現象の一般解の求め方

(1) 閉路 (節点) 方程式を立てる

$v_L+v_R=E$

$L\dfrac{di}{dt}+Ri=E$　(閉路方程式)



$v_L=L\dfrac{di}{dt}$

$v_R=Ri$

$v_c=\dfrac{1}{C}\int idt=\dfrac{q}{C}$

(2) 微分方程式を解く (初期条件を入れる)

微分方程式の一般解 = 過渡解 + 定常解　$\left(i=i_t+i_s\right)$

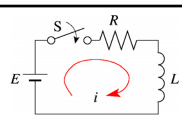
過渡解 : 十分時間が経つと 0 になる

定常解 : 回路の定常状態 ⟵ これまでの理論で解ける

（直流 : 一定, 交流 : 正弦波)

微分方程式　$L\dfrac{di}{dt}+Ri=E$

初期条件 (t =0で)　$i=0$



定常解　$L\dfrac{di_s}{dt}+Ri_s=E \xrightarrow{d/dt\to 0} Ri_s=E \longrightarrow i_s=\dfrac{E}{R}$

過渡解　$L\dfrac{di_t}{dt}+Ri_t=0 \longrightarrow i_t=Ae^{-t/\tau}$　$\left(\text{時定数}\ \tau=\dfrac{L}{R}\right)$

1階の微分方程式の解

$$\frac{di_t}{dt}=-\frac{R}{L}i_t \longrightarrow \frac{1}{i_t}\frac{di_t}{dt}=-\frac{R}{L} \xrightarrow{\text{積分}} \int\frac{1}{i_t}di_t=-\frac{R}{L}\int dt$$

$$\longrightarrow \ln i_t=-\frac{R}{L}t \longrightarrow i_t=e^{-\frac{R}{L}t}$$

一般解

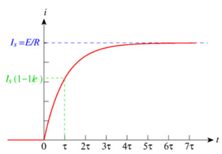
$i=i_t+i_s=Ae^{-t/\tau}+\dfrac{E}{R}$ ⟵ A が未知

初期条件 $i(0)=0$

$A+\dfrac{E}{R}=0 \longrightarrow A=-\dfrac{E}{R}$

以上より

$i=\dfrac{E}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$　ただし　$\tau=\dfrac{L}{R}$



RC 直列回路の場合

閉路方程式

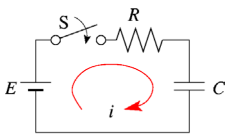
$v_R + v_C = E$

$\Downarrow$

$Ri + \dfrac{q}{C} = E$

$\Downarrow$ $i = \dfrac{dq}{dt}$

$R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = E$



初期条件

$t = 0$ で　$q = 0$

$q = q_t + q_s$

定常解　$R\dfrac{dq_s}{dt} + \dfrac{q_s}{C} = E \xrightarrow{d/dt \to 0} \dfrac{q_s}{C} = E \longrightarrow q_s = CE$

過渡解　$R\dfrac{dq_t}{dt} + \dfrac{q_t}{C} = 0 \longrightarrow q_s = Ae^{-t/\tau}$　(時定数 $\tau = CR$)

一般解

$q = q_t + q_s = Ae^{-t/\tau} + CE \longleftarrow$ A が未知

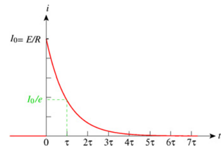
$\Downarrow$ 初期条件　$q(0) = 0$

$A + CE = 0 \longrightarrow A = -CE$

以上より

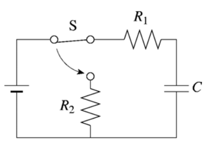
$q = CE\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$　ただし　$\tau = CR$

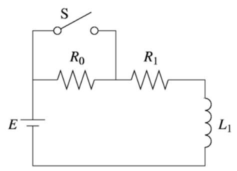
$i = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{CE}{\tau}e^{-t/\tau} = \dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}$



宿題

$t = 0$ でスイッチを切り替えるとき、
R_1 に流れる電流の時間変化を求めよ。
また、各抵抗、コンデンサ、コイルにかかる
電圧の時間変化を求めよ。





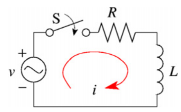
交流回路の過渡現象

・RL直列回路

電源電圧　$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$

回路方程式

$L\dfrac{di}{dt} + Ri = V_m \sin(\omega t + \theta)$



$\Downarrow$ $i = i_t + i_s$

・定常解　(交流理論より)

$j\omega L I_s + R I_s = V_m e^{j\theta} \longrightarrow I_s = \dfrac{V_m e^{j\theta}}{R + j\omega L} = \dfrac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\theta - \phi)}$

よって　$\left(\phi = \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}\right)$

$i_s = I_m \sin(\omega t + \theta - \phi)$　$\left(I_m = \dfrac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\right)$

・過渡解

$L\dfrac{di_t}{dt} + Ri_t = 0 \longrightarrow i_t = Ae^{-t/\tau}$　$\left(時定数 \tau = \dfrac{L}{R}\right)$

一般解

$i = i_t + i_s = Ae^{-t/\tau} + I_m \sin(\omega t + \theta - \phi)$

$\Downarrow$ 初期条件　$t = 0$ で $i = 0$

$A + I_m \sin(\theta - \phi) = 0 \longrightarrow A = -I_m \sin(\theta - \phi)$

よって

$i = I_m \sin(\omega t + \theta - \phi) - I_m \sin(\theta - \phi) e^{-t/\tau}$

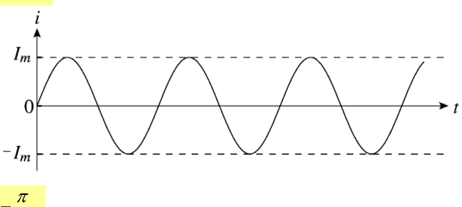
ただし　$I_m = \dfrac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$,　$\phi = \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$,　$\tau = \dfrac{L}{R}$

過渡電流の大きさ $\propto \sin(\theta - \phi)$

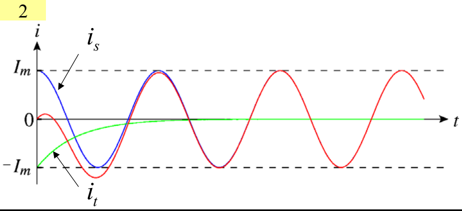
$\theta - \phi = 0, \pi \longrightarrow$ 過渡電流 0

$\theta - \phi = \pm\dfrac{\pi}{2} \longrightarrow$ 過渡電流最大

$\theta - \phi = 0$

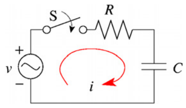


$\theta - \phi = \dfrac{\pi}{2}$



・RC直列回路

電源電圧 $v(t)=V_m\sin(\omega t+\theta)$



回路方程式

$$Ri+\frac{q}{C}=V_m\sin(\omega t+\theta)\ \xrightarrow{i=\frac{dq}{dt}}\ R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V_m\sin(\omega t+\theta)$$

$$q=q_t+q_s$$

・定常解

$$j\omega RQ_s+\frac{Q_s}{C}=V_m e^{j\theta}\ \longrightarrow\ Q_s=\frac{CV_m e^{j\theta}}{1+j\omega CR}=\frac{CV_m}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}e^{j(\theta-\phi)}$$

$(\phi=\tan^{-1}\omega CR)$

よって

$$q_s=Q_m\sin(\omega t+\theta-\phi)\quad\left(Q_m=\frac{V_m}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}\right)$$

・過渡解

$$R\frac{dq_t}{dt}+\frac{q_t}{C}=0\ \longrightarrow\ q_t=Ae^{-t/\tau}\ (\text{時定数}\ \tau=CR)$$

一般解

$$q=q_t+q_s=Ae^{-t/\tau}+Q_m\sin(\omega t+\theta-\phi)$$

初期条件 $t=0$ で $q=0$

$$A+Q_m\sin(\theta-\phi)=0\ \longrightarrow\ A=-Q_m\sin(\theta-\phi)$$

よって

$$q=Q_m\sin(\omega t+\theta-\phi)-Q_m\sin(\theta-\phi)e^{-t/\tau}$$

ただし $Q_m=\frac{CV_m}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}$, $\phi=\tan^{-1}\omega CR$, $\tau=CR$

$$i=\frac{dq}{dt}=\omega Q_m\cos(\omega t+\theta-\phi)+\frac{Q_m}{\tau}\sin(\theta-\phi)e^{-t/\tau}$$
$$=I_m\left\{\cos(\omega t+\theta-\phi)+\cot\phi\sin(\theta-\phi)e^{-t/\tau}\right\}$$

ただし $I_m=\frac{\omega CV_m}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}$, $\phi=\tan^{-1}\omega CR$, $\tau=CR$

教科書演習問題問6との関係

$$\tilde{\phi}=\tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}\quad \text{と置くと}$$

$$\cot\phi=\frac{1}{\tan\phi}=\frac{1}{\omega CR}=\tan\tilde{\phi}$$

$$\theta-\phi=\theta-\left(\frac{\pi}{2}-\tilde{\phi}\right)=\theta+\tilde{\phi}-\frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\theta-\phi)=\sin\left(\theta+\tilde{\phi}-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(\theta+\tilde{\phi})$$

$$\cos(\omega t+\theta-\phi)=\cos\left(\omega t+\theta+\tilde{\phi}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\omega t+\theta+\tilde{\phi})$$

$$i=I_m\left\{\sin(\omega t+\theta+\tilde{\phi})-\tan\tilde{\phi}\cos(\theta+\tilde{\phi})e^{-t/\tau}\right\}$$

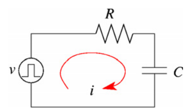
方形パルス入力に対する応答

RC直列回路の過渡現象の一般解

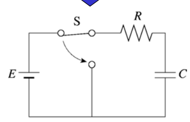
$$q=Ae^{-t/\tau}+CE_s$$

$t=t_0$ で $q=q_0$

$$q=CE_s+(q_0-CE_s)e^{-(t-t_0)/\tau}$$



$$v=\begin{cases}E & (0\le t\le T)\\ 0 & (t<0,\ t>T)\end{cases}$$



$t<0$

$$q=0$$

$0\le t<T$

$$q=CE-CEe^{-t/\tau}=CE\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

$t>T$

$$q=q(T)e^{-(t-T)/\tau}=CE\left(1-e^{-T/\tau}\right)e^{-(t-T)/\tau}$$

微分回路

・RL 直列回路において

$$v_L=L\frac{di}{dt}=\frac{L}{R}\frac{dv_R}{dt}\ \xrightarrow[v_R\cong v]{\tau=L/R<<T}\ v_L\cong\frac{L}{R}\frac{dv}{dt}$$

（電源電圧の微分に比例）

・RC 直列回路において

$$v_R=Ri=R\frac{dq}{dt}=CR\frac{dv_C}{dt}\ \xrightarrow[v_C\cong v]{\tau=CR<<T}\ v_R\cong CR\frac{dv}{dt}$$

積分回路

・RC 直列回路において

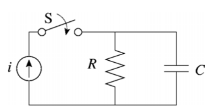
$$v_C=\frac{q}{C}=\frac{1}{C}\int idt=\frac{1}{CR}\int v_R dt\ \xrightarrow[v_R\cong v]{\tau=L/R>>T}\ v_C=\frac{1}{CR}\int vdt$$

（電源電圧の積分に比例）

・RL 直列回路において

$$v_R=Ri=\frac{R}{L}\int v_L dt\ \xrightarrow[v_L\cong v]{\tau=L/R>>T}\ v_R\cong\frac{R}{L}\int vdt$$

宿題



図の回路で以下の場合について $t=0$ でスイッチを閉じた後の
抵抗、コンデンサにかかる電圧の時間変化を求めよ

(a) $i=I$

(b) $i=I_m\sin(\omega t+\theta)$

また、(a) の場合で、スイッチを入れた後十分時間が経ってから
スイッチを切ったときの、抵抗、コンデンサの電圧の時間変化、
抵抗で消費されたエネルギーを求め、
スイッチを切る前にコンデンサが持っていたエネルギーと比較せよ

複エネルギー回路の過渡現象

RLC 直列回路

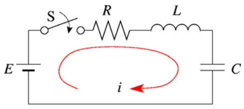
回路方程式(閉路方程式)は

$$v_L + v_R + v_C = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E$$

$$\Downarrow \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

$$\Downarrow \quad q = q_s + q_t$$



定常解

$$\frac{q_s}{C} = E \longrightarrow q_s = CE$$

過渡解

$$L\frac{d^2q_t}{dt^2} + R\frac{dq_t}{dt} + \frac{q_t}{C} = 0 \longrightarrow q_t = Ae^{mt}$$

$$\Downarrow \quad \frac{dq_t}{dt} = mAe^{mt} = mq_t$$

$$\left(Lm^2 + Rm + \frac{1}{C}\right)q_t = 0$$

$$\longrightarrow m = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4(L/C)}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\left(\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$$

$(1)\ \alpha > \omega_0 \quad \left(\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \to \omega_0 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 1/\sqrt{LC}\right)$

$$q = q_s + q_t = CE + A_1e^{(-\alpha+\beta)t} + A_2e^{(-\alpha-\beta)t} = CE + e^{-\alpha t}\left(A_1e^{\beta t} + A_2e^{-\beta t}\right)$$

$$= CE + e^{-\alpha t}\left(B_1\cosh\beta t + B_2\sinh\beta t\right)$$

$$i = -\alpha e^{-\alpha t}\left(B_1\cosh\beta t + B_2\sinh\beta t\right) + \beta e^{-\alpha t}\left(B_1\sinh\beta t + B_2\cosh\beta t\right)$$

$$= e^{-\alpha t}\left[\left(-\alpha B_1 + \beta B_2\right)\cosh\beta t + \left(-\alpha B_2 + \beta B_1\right)\sinh\beta t\right]$$

$\Downarrow$ 初期条件 $t = 0$ で $q = 0, \quad i = 0$

$$q(0) = CE + B_1 = 0 \longrightarrow B_1 = -CE$$

$$i(0) = -\alpha B_1 + \beta B_2 = 0 \longrightarrow B_2 = \frac{\alpha}{\beta}B_1 = -CE\frac{\alpha}{\beta}$$

以上より

$$q = CE\left[1 - e^{-\alpha t}\left(\cosh\beta t + \frac{\alpha}{\beta}\sinh\beta t\right)\right]$$

$$\phi = \tanh^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$$

$$= CE\left[1 - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1}\,e^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \phi)\right] = CE\left[1 - \frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \phi)\right]$$

$$i = CE\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta}e^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \phi) = \frac{E}{\beta L}e^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \phi)$$

$(3)\ \alpha < \omega_0 \quad \left(\beta = j\omega = j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \to \omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = 1/\sqrt{LC}\right)$

$$q = q_s + q_t = CE + A_1e^{(-\alpha+j\omega)t} + A_2e^{(-\alpha-j\omega)t} = CE + e^{-\alpha t}\left(A_1e^{j\omega t} + A_2e^{-j\omega t}\right)$$

$$= CE + e^{-\alpha t}\left(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t\right)$$

$$i = -\alpha e^{-\alpha t}\left(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t\right) + \omega e^{-\alpha t}\left(-B_1\sin\omega t + B_2\cos\omega t\right)$$

$$= e^{-\alpha t}\left[\left(-\alpha B_1 + \omega B_2\right)\cos\omega t + \left(-\alpha B_2 - \omega B_1\right)\sin\omega t\right]$$

$\Downarrow$ 初期条件 $t = 0$ で $q = 0, \quad i = 0$

$$q(0) = CE + B_1 = 0 \longrightarrow B_1 = -CE$$

$$i(0) = -\alpha B_1 + \omega B_2 = 0 \longrightarrow B_2 = \frac{\alpha}{\omega}B_1 = -CE\frac{\alpha}{\omega}$$

以上より

$$q = CE\left[1 - e^{-\alpha t}\left(\cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha}$$

$$= CE\left[1 - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2 + 1}\cdot e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \phi)\right] = CE\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega}e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \phi)\right]$$

$$i = CE\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega}e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \phi) = \frac{E}{\omega L}e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \phi)$$

三角関数と双曲線関数

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cosh\beta t = \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2}$$

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2} \qquad \sinh\beta t = \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2}$$

$$\Downarrow \quad \omega = -j\beta \qquad\qquad \Downarrow \quad \beta = j\omega$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} = \cosh\beta t \qquad \cosh\beta t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos\omega t$$

$$\sin\omega t = \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{j2} = -j\sinh\beta t \qquad \sinh\beta t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2} = j\sin\omega t$$

$(2)\ \alpha = \omega_0 \longrightarrow m = -\alpha$

$$q = q_s + q_t = CE + \left(A_1 + A_2t\right)e^{-\alpha t}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = A_2e^{-\alpha t} - \alpha\left(A_1 + A_2t\right)e^{-\alpha t} = \left\{\left(A_2 - \alpha A_1\right) - \alpha A_2t\right\}e^{-\alpha t}$$

$\Downarrow$ 初期条件 $t = 0$ で $q = 0, \quad i = 0$

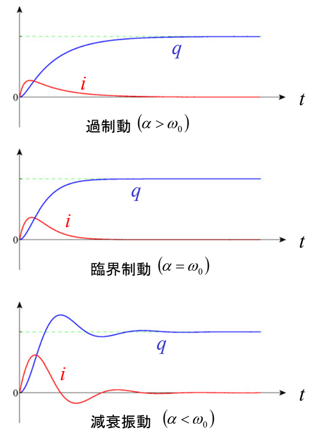
$$q(0) = CE + A_1 = 0 \longrightarrow A_1 = -CE$$

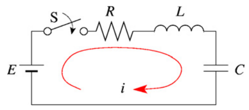
$$i(0) = A_2 - \alpha A_1 = 0 \longrightarrow A_2 = \alpha A_1 = -\alpha CE$$

以上より

$$q = CE\left[1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}\right]$$

$$i = \alpha^2CEte^{-\alpha t} = \omega_0^2CEte^{-\alpha t} = \frac{E}{L}te^{-\alpha t}$$





図の回路で時刻 t=0 にスイッチが閉じた後の電流の時間変化を求めよ。
ただし、$t<0$ ではコンデンサに電荷はないものとする。

(a) $E = 8\,\mathrm{V},\ R = 5\,\Omega,\ L = 1\,\mathrm{H},\ C = \frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

(b) $E = 8\,\mathrm{V},\ R = 4\,\Omega,\ L = 1\,\mathrm{H},\ C = \frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

(c) $E = 8\,\mathrm{V},\ R = 2\,\Omega,\ L = 1\,\mathrm{H},\ C = \frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

(d) $E = 8\,\mathrm{V},\ R = 0\,\Omega,\ L = 1\,\mathrm{H},\ C = \frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

ラプラス変換による過渡現象解析

$f(t)$ の微分方程式 —ラプラス変換→ $F(s)$ の代数方程式

$f(t)$ の微分方程式 —直接解法→ 解 $f(t)$

$F(s)$ の代数方程式 —代数計算 (計算が簡単!)→ 解 $F(s)$

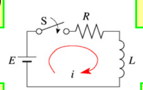
解 $F(s)$ —ラプラス逆変換→ 解 $f(t)$

RL 直列回路

回路方程式
$$L\frac{di}{dt} + Ri = Eu(t)$$

ラプラス変換

s の代数方程式
$$L\{sI(s) - i(0)\} + RI(s) = \frac{E}{s}$$



代数計算
$t=0$ で $i=0$

$$I(s) = \frac{E}{s(sL+R)} = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+R/L}\right)$$

ラプラス逆変換

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

ラプラス変換と逆変換

ラプラス変換
$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

ラプラス逆変換
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

フーリエ変換 : $e^{j\omega t}$ に分解

ラプラス変換 : $e^{st} = e^{\sigma t}e^{j\omega t}$ に分解
(時間とともに振幅が増大する周波数)

$t \to \infty$ まで続く解にも適用可能

ステップ関数 $u(t)$
$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

関数の微分 $di(t)/dt$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{di(t)}{dt}e^{-st}dt = \left[i(t)e^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty i(t)e^{-st}dt = sI(s) - i(0)$$

関数 $f(t) = e^{-at}$
$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s+a}e^{-(st+a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$$

基本的な関数のラプラス変換

・ステップ関数
$$\mathcal{L}\{u(t-T)\} = \int_0^\infty u(t-T)e^{-st}dt = \int_T^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_T^\infty = \frac{e^{-Ts}}{s}$$

・インパルス関数
$$\mathcal{L}\{u_0(t)\} = \int_0^\infty u_0(t)e^{-st}dt = e^0 = 1$$

・単位ランプ関数 $f(t) = t$
$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty te^{-st}dt = \left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}dt = \left[-\frac{te^{-st}}{s^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

ラプラス変換の諸定理

・積分定理
$$f(t) = \int i(t)dt \quad \to \quad i(t) = \frac{df(t)}{dt}$$
$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad \to \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\{i(t)\} + f(0)\right)$$
$$\mathcal{L}\left\{\int i(t)dt\right\} = \frac{1}{s}\left(I(s) + \int i(t)dt\Big|_{t=0}\right)$$

ラプラス逆変換

(a) ラプラス変換表とラプラス変換に関する諸定理の利用
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+5s+1}{s+3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{2s - 1 + \frac{4}{s+3}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\{s\} - \mathcal{L}^{-1}\{1\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$
$$= 2\frac{du_0(t)}{dt} - u_0(t) + e^{-3t}u(t)$$

(b) 部分分数展開 ～ 有理関数の逆ラプラス変換
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s+1)(s+3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-t} + e^{-3t}$$

$$\frac{3s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+3} = \frac{K_1(s+3) + K_2(s+1)}{(s+1)(s+3)} = \frac{(K_1+K_2)s + (3K_1+K_2)}{(s+1)(s+3)}$$

係数比較

$$K_1 + K_2 = 3$$
$$3K_1 + K_2 = 5$$
$$\Rightarrow \quad K_1 = 1, \quad K_2 = 2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s+3)^2(s+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{3}{(s+3)^2} + \frac{5}{s+3} - \frac{5}{s+4}\right\}$$
$$= -3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = -3te^{-3t} + 5e^{-3t} - 5e^{-4t}$$

部分分数展開の方法

$$F(s)=\frac{3s+4}{(s+a)(s+b)}=\frac{K_1}{s+a}+\frac{K_2}{s+b} \longrightarrow f(t)=K_1e^{-at}+K_2e^{-bt}$$

$$(s+a)F(s)=K_1+\frac{s+a}{s+b}K_2 \xrightarrow{s=-a} (s+a)F(s)\big|_{s=-a}=K_1$$

同様に

$$(s+b)F(s)\big|_{s=-b}=K_2$$

ところで

$$f(t)=(s+a)F(s)\big|_{s=-a}e^{-at}+(s+b)F(s)\big|_{s=-b}e^{-bt}$$
$$=(s+a)F(s)e^{st}\Big|_{s=-a}+(s+b)F(s)e^{st}\Big|_{s=-b}$$

重複極がある場合

$$F(s)=\frac{M(s)}{(s+a)^n N(s)}=\frac{K_1}{(s+a)}+\frac{K_2}{(s+a)^2}+\cdots+\frac{K_j}{(s+a)^j}+\cdots+\frac{K_n}{(s+a)^n}+F_1(s)$$

$$(s+a)^n F(s)=K_1(s+a)^{n-1}+K_2(s+a)^{n-2}+\cdots+K_j(s+a)^{n-j}+\cdots+K_n+(s+a)^n F_1(s)$$

$(n-j)$回微分

$$\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\left\{(s+a)^n F(s)\right\}=\frac{(n-1)!}{(j-1)!}K_1(s+a)^{j-1}+\frac{(n-2)!}{(j-2)!}K_2(s+a)^{j-2}+\cdots+(n-j)!K_r$$
$$+0+\cdots+0+(s+a)^j G_1(s)$$

$s=-a$

$$\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\left\{(s+a)^n F(s)\right\}\Big|_{s=-a}=(n-j)!K_r$$

$$K_r=\frac{1}{(n-j)!}\frac{d^{n-j}}{dt^{n-r}}\left\{(s+a)^n F(s)\right\}\Big|_{s=-a}$$

(c) 逆変換積分演算

$$f(t)=\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left\{(s-s_1)^r F(s)e^{st}\right\}\Big|_{s=s_1}$$

$r=1$ のとき

$$f(t)=(s-s_1)F(s)e^{st}\big|_{s=s_1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s+1)(s+3)}\right\}=\frac{3s+5}{(s+3)}e^{st}\Big|_{s=-1}+\frac{3s+5}{(s+1)}e^{st}\Big|_{s=-3}=e^{-t}+2e^{-3t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s+3)^2(s+4)}\right\}=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left\{\frac{2s+3}{s+4}e^{st}\right\}\Big|_{s=-3}+\frac{2s+3}{(s+3)^2}e^{st}\Big|_{s=-4}$$
$$=\left(\frac{5}{(s+4)^2}e^{st}+\frac{2s+3}{s+4}te^{st}\right)\Big|_{s=-3}+\frac{2s+3}{(s+3)^2}e^{st}\Big|_{s=-4}=5e^{-3t}-3te^{-3t}-5e^{-4t}$$

ラプラス変換の例題

以下の推移定理を証明せよ

$$f(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as}F(s)$$

$$e^{-bt}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s+b)$$

適用例) $(A+Bt)e^{-bt} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A}{s+b}+\frac{B}{(s+b)^2}$

$$e^{-bt}\sin\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{(s+b)^2+\omega^2}$$

$$e^{-bt}\cos\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{(s+b)}{(s+b)^2+\omega^2}$$

以下の時間関数のラプラス変換を求めよ

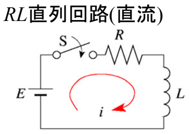
$\sin\omega t \quad \cos\omega t \quad e^{-at}\cos\omega t$

以下の関数のラプラス逆変換を求めよ

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} \qquad \frac{3s+8}{s^2+9} \qquad \frac{s+2}{s(s^2+2s+5)}$$

ラプラス変換を利用した過渡現象解析

1) RL直列回路(直流)



初期条件

$t=0$ で $i(t)=i(0)=i_0$

回路方程式(閉路方程式)

$$L\frac{di}{dt}+Ri=Eu(t)$$

ラプラス変換

$$L\{sI(s)-i(0)\}+RI(s)=\frac{E}{s}$$

$$I(s)=\frac{sLi_0+E}{s(sL+R)}=\frac{\frac{E}{R}}{s}+\frac{i_0-\frac{E}{R}}{s+\frac{R}{L}}$$

ラプラス逆変換

$$i(t)=\frac{E}{R}+\left(i_0-\frac{E}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

微分方程式を直接解く

$$L\frac{di}{dt}+Ri=Eu(t)$$

定常解 $i_s(t)=\frac{E}{R}$

過渡解 $i_t(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}$

一般解

$$i(t)=\frac{E}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

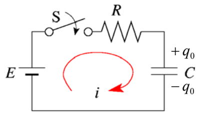
初期条件 $i(0)=i_0$

$$i_0=\frac{E}{R}+A \longrightarrow A=i_0-\frac{E}{R}$$

以上より

$$i(t)=\frac{E}{R}+\left(i_0-\frac{E}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

2) RC直列回路(直流)



初期条件

$t=0$ で $q(t)=q(0)=q_0$

回路方程式(閉路方程式)

$$Ri+\frac{q}{C}=Eu(t) \xrightarrow[q(t)=\int i(t)dt]{} Ri+\frac{1}{C}\int idt=Eu(t)$$

⬇ ラプラス変換

$$RI(s)+\frac{1}{C}\left\{\frac{I(s)}{s}+\frac{1}{s}\boxed{\int idt\Big|_{t=0}}\right\}=\frac{E}{s}$$

$$q(0)=q_0$$

⬇

$$\left(R+\frac{1}{sC}\right)I(s)+\frac{q_0}{sC}=\frac{E}{s}$$

$$I(s)=\frac{CE-q_0}{sCR+1}=\frac{\frac{1}{R}\left(E-\frac{q_0}{C}\right)}{s+\frac{1}{CR}}$$

ラプラス逆変換 ➡

$$i(t)=\frac{1}{CR}(CE-q_0)e^{-\frac{t}{CR}}$$

微分方程式を直接解く

$$Ri+\frac{q}{C}=Eu(t) \longrightarrow R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=Eu(t)$$

定常解 $q_s(t)=CE$

過渡解 $q_t(t)=Ae^{-\frac{t}{CR}}$

➡ 一般解

$$q(t)=CE+Ae^{-\frac{t}{CR}}$$

⬇ 初期条件 $q(0)=q_0$

$$q_0=CE+A \longrightarrow A=q_0-CE$$

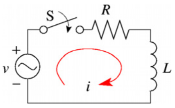
以上より

$$q(t)=CE-(CE-q_0)e^{-\frac{t}{CR}}$$

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\frac{1}{CR}(CE-q_0)e^{-\frac{t}{CR}}$$

---

3) RL直列回路(交流)



初期条件

$t=0$ で $i(t)=i(0)=0$

$v=13\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$ [V]

$R=\sqrt{2}\,\Omega,\ L=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{H}$

$$L\frac{di}{dt}+Ri=v \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{di}{dt}+\sqrt{2}i=13\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{13}{\sqrt{2}}(\sin 3t+\cos 3t)$$

$$\frac{di}{dt}+2i=13(\sin 3t+\cos 3t)$$

⬇ ラプラス変換

$$\{sI(s)-i(0)\}+2I(s)=13\cdot\left(\frac{s+3}{s^2+3^2}\right)$$

⬇

$$I(s)=\frac{13\cdot(s+3)}{(s^2+3^2)(s+2)}=\frac{-s+5\cdot 3}{s^2+3^2}+\frac{1}{s+2}$$

⬇

$$i(t)=-\cos 3t+5\sin 3t+e^{-2t}$$

微分方程式を直接解く

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{di}{dt}+\sqrt{2}i=13\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$$

定常解

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{di_s}{dt}+\sqrt{2}i_s=13\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$$

⬇

$$\frac{j3}{\sqrt{2}}I_s+\sqrt{2}I_s=13e^{\pi/4}$$

⬇

$$I_s=\frac{13\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}(2+j3)}=\frac{13(1+j)}{2+j3}=(1+j)(2-j3)=5-j$$

⬇

$$i_s(t)=\mathrm{Im}\left[(5-j)e^{j3t}\right]=\mathrm{Im}\left[(5-j)(\cos 3t+j\sin 3t)\right]=5\sin 3t-\cos 3t$$

過渡解

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{di_t}{dt}+\sqrt{2}i_t=0$$

⬇

$$i_t(t)=Ae^{-2t}$$

一般解

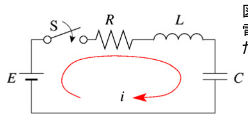
$$i(t)=i_s(t)+i_t(t)=5\sin 3t-\cos 3t+Ae^{-2t}$$

⬇ 初期条件 $i(0)=0$

$$i(0)=-1+A=0 \longrightarrow A=1$$

よって

$$i(t)=i_s(t)+i_t(t)=5\sin 3t-\cos 3t+e^{-2t}\ \text{[A]}$$



図の回路で時刻 t=0 にスイッチが閉じた後の電流の時間変化をラプラス変換を用いて求めよ。ただし、$t<0$ ではコンデンサに電荷はないものとする。

(a) $E=8\,\mathrm{V},\ R=5\,\Omega,\ L=1\,\mathrm{H},\ C=\frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

(c) $E=8\,\mathrm{V},\ R=2\,\Omega,\ L=1\,\mathrm{H},\ C=\frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

回路方程式(節点方程式)

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=Eu(t)$$

⬇ ラプラス変換

$$L\{sI(s)-i(0)\}+RI(s)+\frac{1}{C}\left\{\frac{I(s)}{s}+\frac{1}{s}\int idt\Big|_{t=0}\right\}=\frac{E}{s}$$

$$\left(Ls^2+Rs+\frac{1}{C}\right)I(s)=E$$

(a) の場合

$$\left(s^2+5s+4\right)I(s)=8 \longrightarrow I(s)=\frac{8}{(s+1)(s+4)}$$

$$i(t)=(s+1)I(s)e^{st}\Big|_{s=-1}+(s+4)I(s)e^{st}\Big|_{s=-4}=\frac{8}{s+4}e^{st}\Big|_{s=-1}+\frac{8}{s+1}I(s)e^{st}\Big|_{s=-4}$$

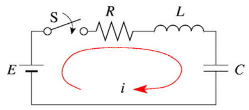
$$=\frac{8}{3}\left(e^{-t}-e^{-4t}\right)\ [\mathrm{A}]$$

(c) の場合

$$\left(s^2+2s+4\right)I(s)=8 \longrightarrow I(s)=\frac{\left(8/\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$i(t)=\frac{8}{\sqrt{3}}e^{-t}\sin\sqrt{3}t=\frac{8}{3}\sqrt{3}e^{-t}\sin\sqrt{3}t\ \ [\mathrm{A}]$$

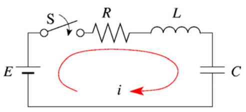
宿題



図の回路で時刻 t=0 にスイッチが閉じた後の電流の時間変化をラプラス変換を用いて求めよ。
ただし、$t<0$ ではコンデンサに電荷はないものとする。

$(a)\ E=5\,\mathrm{V},\ \ R=2\,\Omega,\ L=0.5\,\mathrm{H},\ C=\frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

$(b)\ E=20\,\mathrm{V},\ \ R=6\,\Omega,\ L=2\,\mathrm{H},\ C=\frac{1}{4}\,\mathrm{F}$



$(a)\ E=8\,\mathrm{V},\ \ R=5\,\Omega,\ L=1\,\mathrm{H},\ C=\frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

$(b)\ E=8\,\mathrm{V},\ \ R=4\,\Omega,\ L=1\,\mathrm{H},\ C=\frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

$(c)\ E=8\,\mathrm{V},\ \ R=2\,\Omega,\ L=1\,\mathrm{H},\ C=\frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

$(d)\ E=8\,\mathrm{V},\ \ R=0\,\Omega,\ L=1\,\mathrm{H},\ C=\frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

図の回路で時刻 t=0 にスイッチが閉じた後の電流の時間変化をラプラス変換を用いて求めよ。ただし、$t<0$ ではコンデンサに電荷はないものとする。

回路方程式(節点方程式)

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=Eu(t)$$

ラプラス変換

$$L\{sI(s)-i(0)\}+RI(s)+\frac{1}{C}\left\{\frac{I(s)}{s}+\frac{1}{s}\int idt\Big|_{t=0}\right\}=\frac{E}{s}$$

$$\left(Ls^2+Rs+\frac{1}{C}\right)I(s)=E$$

(b) の場合

$$\left(s^2+4s+4\right)I(s)=8 \longrightarrow I(s)=\frac{8}{(s+2)^2}$$

逆変換積分を使うと (教科書 47ページ 式(3.30))

$$i(t)=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}\left\{(s+2)^2F(s)e^{st}\right\}\Big|_{s=-2}=\frac{d}{ds}\left\{8e^{st}\right\}\Big|_{s=-2}=\left\{8te^{st}\right\}\Big|_{s=-2}=8te^{-2t}\ [\mathrm{A}]$$

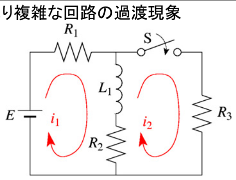
(d) の場合

$$\left(s^2+4\right)I(s)=8 \longrightarrow I(s)=\frac{4\cdot 2}{s^2+2^2}$$

ラプラス変換表より

$$i(t)=4\sin 2t\ \ [\mathrm{A}]$$

より複雑な回路の過渡現象



$E=60\,\mathrm{V},\ L=5\,\mathrm{H}$

$R_1=R_2=10\,\Omega,\ \ R_3=5\,\Omega$

$t=0$で $\quad i_1=\frac{E}{R_1+R_2}=\frac{60}{20}=3\,\mathrm{A},\ i_2=0\,\mathrm{A}$

$t\geq 0$で　回路方程式は

$$\begin{cases} L_1\dfrac{d(i_1-i_2)}{dt}+R_1i_1+R_2(i_1-i_2)=E \\ L_1\dfrac{d(i_2-i_1)}{dt}+R_2(i_2-i_1)+R_3i_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(L_1\dfrac{d}{dt}+R_1+R_2\right)i_1-\left(L_1\dfrac{d}{dt}+R_2\right)i_2=E \\ -\left(L_1\dfrac{d}{dt}+R_2\right)i_1+\left(L_1\dfrac{d}{dt}+R_2+R_3\right)i_2=0 \end{cases}$$

与えられた数値を代入すると

$$\begin{cases} \left(5\dfrac{d}{dt}+20\right)i_1-\left(5\dfrac{d}{dt}+10\right)i_2=60 \\ -\left(5\dfrac{d}{dt}+10\right)i_1+\left(5\dfrac{d}{dt}+15\right)i_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{d}{dt}+4\right)i_1-\left(\dfrac{d}{dt}+2\right)i_2=12 \\ -\left(\dfrac{d}{dt}+2\right)i_1+\left(\dfrac{d}{dt}+3\right)i_1=0 \end{cases}$$

ラプラス変換すると

$$\begin{cases} \{sI_1(s)-i_1(0)+4I_1(s)\}-\{sI_2(s)-i_2(0)+10I_2(s)\}=\dfrac{12}{s} \\ -\{sI_1(s)-i_1(0)+10I_1(s)\}+\{sI_2(s)-i_2(0)+3I_2(s)\}=0 \end{cases}$$

行列の形でまとめると

$$\begin{bmatrix} s+4 & -(s+2) \\ -(s+2) & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{12}{s}+i_1(0)-i_2(0) \\ i_2(0)-i_1(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{12}{s}+3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

左辺行列の行列式は

$$\Delta=(s+4)(s+3)-(s+2)^2=\left(s^2+7s+12\right)-\left(s^2+4s+4\right)=3s+8$$

Cramer の公式より

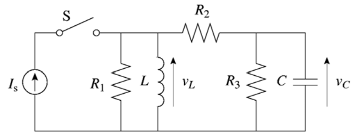
$$I_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{12}{s}+3 & -(s+2) \\ -3 & s+3 \end{vmatrix}}{3s+8}=\frac{\left(3s+21+\frac{36}{s}\right)-(3s+6)}{3s+8}=\frac{15s+36}{s(3s+8)}$$

$$I_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} s+4 & \frac{12}{s}+3 \\ -(s+2) & -3 \end{vmatrix}}{3s+8}=\frac{(-3s-12)-\left(-3s-18-\frac{24}{s}\right)}{3s+8}=\frac{6s+24}{s(3s+8)}$$

ラプラス逆変換すると

$$i_1(t)=sI(s)e^{st}\Big|_{s=0}+\left(s+\frac{8}{3}\right)I(s)e^{st}\Big|_{s=-\frac{8}{3}}=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}e^{-\frac{8}{3}t}\ \text{[A]}$$

$$i_2(t)=sI(s)e^{st}\Big|_{s=0}+\left(s+\frac{8}{3}\right)I(s)e^{st}\Big|_{s=-\frac{8}{3}}=3-e^{-\frac{8}{3}t}\ \text{[A]}$$



$I_s=2\,\text{A},\ L=1\,\text{H},\ C=1\,\text{F}$
$R_1=R_2=R_3=1\,\Omega$

$t=0$で　$v_L(0)=v_C(0)=0$　　$i_L(0)=\frac{1}{L}\int v_L dt\Big|_{t=0}=\int v_L dt\Big|_{t=0}=0$

$t\geq 0$で　回路方程式は

$$\begin{cases} \frac{1}{R}v_L+\frac{1}{L}\int v_L dt+\frac{v_L-v_C}{R_2}=I_s u(t) \\ \frac{v_C-v_L}{R_2}+\frac{1}{R_3}v_C+C\frac{dv_C}{dt}=0 \end{cases}$$

数値を代入して整理すると

$$\begin{cases} 2v_L+\int v_L dt-v_C=2_s u(t) \\ -v_L+2v_C+\frac{dv_C}{dt}=0 \end{cases}$$

ラプラス変換すると

$$\begin{cases} 2V_L(s)+\left(\frac{1}{s}V_L(s)+\frac{1}{s}\int v_L dt\Big|_{t=0}\right)-V_C(s)=\frac{2}{s} \\ -V_L(s)+2V_C(s)+(sV_C(s)-v_C(0))=0 \end{cases}$$

初期条件を考慮して行列の形にまとめると

$$\begin{bmatrix} 2+\frac{1}{s} & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

上式を特と

$$V_L(s)=\frac{s+2}{(s+1)^2}=\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

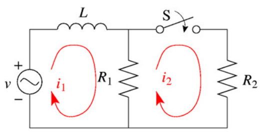
$$V_C(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$$

ラプラス逆変換すると

$$v_L(t)=e^{-t}+te^{-t}=(1+t)e^{-t}\ \text{[V]}$$

$$v_C(t)=te^{-t}\ \text{[V]}$$

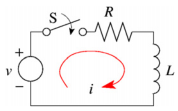
宿題



$v=50\sin 100t\ \text{[V]},\ L=0.02\,\text{H}$
$R_1=1\,\Omega,\ \ R_2=3\,\Omega$

特殊波形に対する過渡現象解析

(1) 単独波形



$v=Ee^{-bt}u(t)$

$i(0)=0$

回路方程式(閉路方程式)

$$L\frac{di}{dt}+Ri=e^{-bt}u(t)$$

⬇ ラプラス変換

$$L\{sI(s)-i(0)\}+RI(s)=\frac{E}{s+b}$$

⬇ $i(0)=0$

$$I(s)=\frac{E}{L}\left(\frac{1}{(s+b)(s+R/L)}\right)$$

$b\neq 0, R/L$のとき

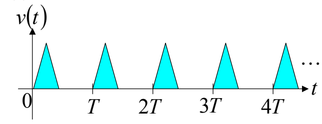
$$\begin{aligned} i(t)&=(s+b)I(s)e^{st}\Big|_{s=-b}+(s+R/L)I(s)e^{st}\Big|_{s=-R/L} \\ &=\frac{E/L}{s+R/L}e^{st}\Big|_{s=-b}+\frac{E/L}{s+b}I(s)e^{st}\Big|_{s=-R/L} \\ &=\frac{E}{(R-bL)}e^{-bt}+\frac{E}{(bL-R)}e^{-(R/L)t} \\ &=\frac{E}{(R-bL)}\left(e^{-bt}-e^{-(R/L)t}\right) \end{aligned}$$

$b=R/L$のとき

$$I(s)=\frac{E}{L}\frac{1}{(s+R/L)^2}$$

$$i(t)=\frac{E}{L}te^{-(R/L)t}$$

(2) 繰り返し波形



等比級数の和

$$\sum_{n=0}^{N} ar^n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

$|r|<1,\quad n\to\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

$$v(t)=f(t)+f(t-T)+f(t-2T)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} f(t-nT)$$

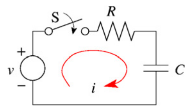
ラプラス変換

$$V(s)=F(s)+F(s)e^{-Ts}+F(s)e^{-2Ts}+\cdots=F(s)\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-Ts}\right)^n=\frac{F(s)}{1-e^{-Ts}}$$

$$v(t)=f(t)-f(t-T)+f(t-2T)-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f(t-nT)$$

ラプラス変換

$$V(s)=F(s)-F(s)e^{-Ts}+F(s)e^{-2Ts}-\cdots=F(s)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-e^{-Ts}\right)^n=\frac{F(s)}{1+e^{-Ts}}$$



初期条件

$q(0)=0$

回路方程式(閉路方程式)

$$Ri+\frac{q}{C}=v(t) \xrightarrow{\quad q(t)=\int i(t)dt \quad} Ri+\frac{1}{C}\int idt=v(t)$$

ラプラス変換

$$RI(s)+\frac{1}{C}\left\{\frac{I(s)}{s}+\frac{1}{s}\boxed{\int idt\Big|_{t=0}}\right\}=V(s)=\frac{F(s)}{1-e^{-Ts}}$$

$q(0)=0$

$$\left(R+\frac{1}{sC}\right)I(s)=\frac{F(s)}{1-e^{-Ts}} \longrightarrow I(s)=\frac{s}{R}\frac{F(s)}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(1-e^{-Ts}\right)}$$

$$f(t)=\begin{cases} E & 0\le t\le \dfrac{T}{2} \\ 0 & t>\dfrac{T}{2}\end{cases}$$ のとき

$$F(s)=\int_0^{T/2} Ee^{-st}dt\,f(t)=\left[\frac{Ee^{-st}}{-s}\right]_0^{T/2}=\frac{E}{s}\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)$$

よって

$$I(s)=\frac{s}{R}\frac{E\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(1-e^{-Ts}\right)}=\frac{E}{R}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)}$$

$$g(t)=1+e^{-\frac{T}{2}s}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{T}{2}s\right)^n=\prod_{i=0}^{\infty}\left(s+s_i\right)$$ (s の多項式)

$$g(t)=1+e^{-\frac{T}{2}(j\omega)}=\left(e^{\frac{T}{4}(j\omega)}+e^{-\frac{T}{4}(j\omega)}\right)e^{-\frac{T}{4}(j\omega)}=2e^{-\frac{T}{4}(j\omega)}\cos\frac{T}{4}\omega \quad (s=j\omega)$$

$\omega=\omega_n=\pm\dfrac{2(2n+1)\pi}{T}$ で $g(t)=0$ $(n:$正の整数$)$

$$I(s)=\frac{E}{R}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)}=\frac{K}{s+\frac{1}{RC}}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{K_n^-}{s-j\omega_n}+\frac{K_n^+}{s+j\omega_n}\right)$$

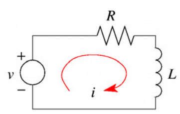
K_n^- は

$$K_n^-=\left(s-j\omega_n\right)I(s)\Big|_{s=j\omega_n}$$

$$=\frac{E}{R}\frac{s-j\omega_n}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)}\Bigg|_{s=j\omega_n}=\frac{E}{R}\frac{1}{\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)+\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(-\frac{T}{2}e^{-\frac{T}{2}s}\right)}\Bigg|_{s=j\omega_n}$$

$$=\frac{E}{R}\frac{1}{\left(j\omega_n+\frac{1}{RC}\right)\left(-\frac{T}{2}e^{-j(2n+1)\pi}\right)}=\frac{E}{R}\frac{1}{\left(j\omega_n+\frac{1}{RC}\right)\frac{T}{2}}$$

インパルス応答とその応用



回路方程式(閉路方程式)

$$L\frac{di}{dt}+Ri=\delta(t) \longleftarrow$$ 単位インパルス入力

ラプラス変換

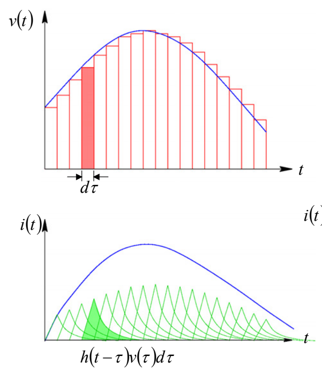
$$L\{sI(s)-i(0)\}+RI(s)=1$$

$i(0)=0$

$$I(s)=\frac{1}{L}\left(\frac{1}{s+R/L}\right)=Y(s) \xrightarrow{\text{ラプラス逆変換}} i(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}=h(t)$$

インパルス応答

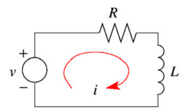
インパルス応答を利用した回路の過渡現象解析



$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)V(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{h(t)\}V(s)\}$$

$$=\int_0^t h(t-\tau)v(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t h(\tau)v(t-\tau)d\tau$$



$$v(t)=Ee^{-bt}u(t)$$

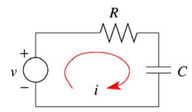
インパルス応答　$h(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$

$$i(t)=\int_0^t h(t-\tau)v(\tau)d\tau=\int_0^t \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}Ee^{-b\tau}d\tau=\frac{Ee^{-\frac{R}{L}t}}{L}\int_0^t e^{-\left(b-\frac{R}{L}\right)\tau}d\tau$$

$$=\frac{Ee^{-\frac{R}{L}t}}{L}\left[\frac{e^{-\left(b-\frac{R}{L}\right)\tau}}{-\left(b-\frac{R}{L}\right)}\right]_0^t=\frac{Ee^{-\frac{R}{L}t}}{L}\frac{1}{b-\frac{R}{L}}\left\{1-e^{-\left(b-\frac{R}{L}\right)t}\right\}=\frac{Ee^{-\frac{R}{L}t}}{bL-R}\left\{1-e^{-\left(b-\frac{R}{L}\right)t}\right\}$$

$$=\frac{E}{bL-R}\left\{e^{-\frac{R}{L}t}-e^{-bt}\right\}$$

宿題



左の回路のインパルス応答 $h(t)$ を求めよ。
また、この回路に

$$v(t)=Ee^{-bt}u(t)$$

の電圧が印加されたときの回路の応答 $h(t)$ をを利用して求めよ。