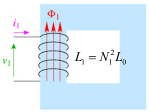
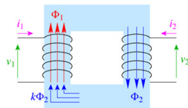
## 二巻線変成器

孤立したコイル



$$\Phi_1 = N_1 L_0 i_1 \longrightarrow v_1 = \underbrace{N_1^2 L_0}_{L_1} \frac{di_1}{dt}$$

結合したコイル



$\Phi_1 \longrightarrow \Phi_1 + k\Phi_2$ （$k$ : 結合係数）

$$\Phi_1 = N_1 L_0 i_1,\quad \Phi_2 = N_2 L_0 i_2$$

$$v_1 = \underbrace{N_1^2 L_0}_{L_1} \frac{di_1}{dt} + \underbrace{kN_1 N_2 L_0}_{M} \frac{di_2}{dt}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$$M = kN_1 N_2 L_0 \rightarrow M^2 = k^2 \left(N_1^2 L_0\right)\left(N_2^2 L_0\right)$$

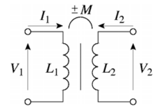
$$M^2 = k^2 L_1 L_2$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \le 1$$

## 変成器の基本式

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \pm M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = \pm M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

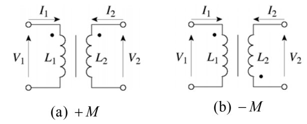
$$L_1, L_1, M > 0$$



変成器

交流理論 $\dfrac{d}{dt} \to j\omega$

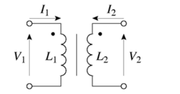
$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2 \\ V_2 = \pm j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{cases}$$



(a) $+M$　(b) $-M$

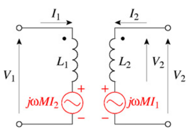
変成器の極性

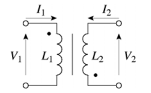
## 制御電源による等価回路



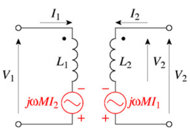
$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 = +j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{cases}$$

電流制御電圧源



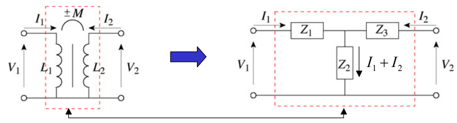


$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \\ V_2 = -j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{cases}$$



等価回路 : 外から見て同じ働きをする回路

## 変成器のT形等価回路



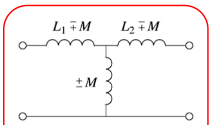
外から見て等価

$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2 \\ V_2 = \pm j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = Z_1 I_1 + Z_2 (I_1 + I_2) = (Z_1 + Z_2) I_1 + Z_2 I_2 \\ V_2 = Z_3 I_2 + Z_2 (I_1 + I_2) = Z_2 I_1 + (Z_3 + Z_2) I_2 \end{cases}$$

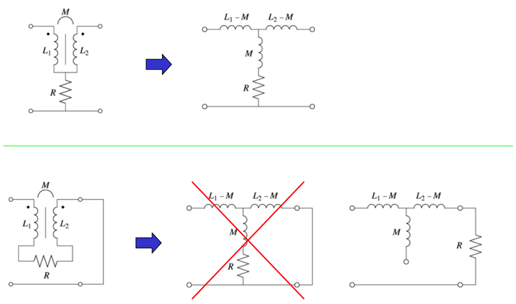
係数比較

$$\left.\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= j\omega L_1 \\ Z_2 &= \pm j\omega M \\ Z_3 + Z_2 &= j\omega L_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} Z_2 &= \pm j\omega M \\ Z_1 &= j\omega L_1 - Z_2 = j\omega (L_1 \mp M) \\ Z_3 &= j\omega L_2 - Z_2 = j\omega (L_2 \mp M) \end{aligned}$$

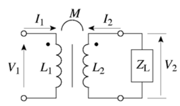


変成器のT形等価回路

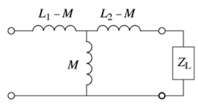
## T形等価回路への変換



## 変成器の2次側にインピーダンス $Z_L$ を接続した場合の一次側入力インピーダンス



T形等価回路



$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 = +j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{cases}$$

$$V_2 = -Z_L I_2$$

入力インピーダンス

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_L}$$

$$Z_i = j\omega L_1 + \left(j\omega M \,//\, \{j\omega (L_2 - M) + Z_L\}\right)$$

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_L}$$

$Z_L \to \infty$のとき

$$Z_i = j\omega L_1$$

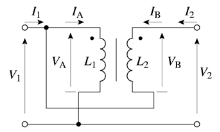
**(変成器の励磁インダクタンス)**

$Z_L \to 0$のとき

$$Z_i = j\omega L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) = j\omega L_1 \left(1 - k^2\right) = j\omega\sigma$$

**(σ : 漏れインダクタンス)**

## 単巻変成器



$$\begin{cases} V_A = j\omega L_1 I_A + j\omega M I_B \\ V_B = +j\omega M I_A + j\omega L_2 I_B \end{cases}$$

$I_A = I_1 + I_B \longrightarrow I_A = I_1 + I_2$

$I_B = I_2$

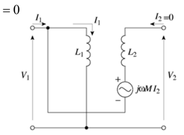
$V_1 = V_A$

$V_2 = V_B + V_A \longrightarrow V_2 = V_B + V_1$

⇓

$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega(L_1 + M) I_2 \\ V_2 = j\omega(L_1 + M) I_1 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) I_2 \end{cases}$$

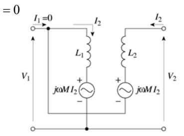
$I_2 = 0$



$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 \\ V_2 = j\omega(L_1 + M) I_1 \end{cases}$$

重ね合わせ

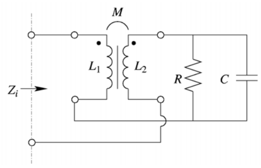
$I_1 = 0$



$$\begin{cases} V_1 = j\omega(L_1 + M) I_2 \\ V_2 = j\omega(L_1 + L_2 + 2M) I_2 \end{cases}$$

## 宿題

1. 変成器はどんなところでどういう目的で利用されているか？
2. 以下の回路の入力インピーダンスを求めよ。また、$R\to\infty$としたときの共振周波数を求めよ。



教科書演習問題 7.1〜7.3
(http://www.elec.kitami-it.ac.jp/~tsuji を参照)

## 理想変成器

結合係数 $k = 1$
励磁インダクタンス $L_1, L_2 \to \infty$

⇓

(電圧比は巻数比に等しい)

$$V_1 = \pm\frac{N_1}{N_2}V_2$$

$$I_1 = \pm\frac{N_2}{N_1}I_2$$

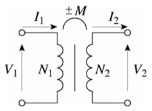
$\longrightarrow V_1 I_1 = V_2 I_2$ (無損失)

(電流比は巻数比の逆数に等しい)

⇓

$$Z_i = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L$$

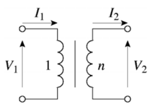
(インピーダンスは巻数比の2乗で変換される)



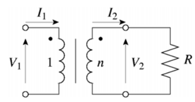
電流の向きに注意

通常は巻数比で表記

$$n = \frac{N_2}{N_1}$$



(例)



$n = 10,\quad R = 5\Omega,\quad V_1 = 3\text{V}$

⇓

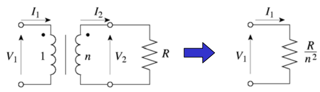
$I_1, I_2, V_2\,?$

$V_2 = nV_1 = 10\times 3 = 30\ \text{V}$

$I_2 = \dfrac{V_2}{R} = \dfrac{30}{5} = 6\ \text{A}$

$I_1 = nI_2 = 10\times 6 = 60\ \text{A}$

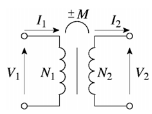
(別解)



$$I_1 = \frac{V_1}{R/n^2} = \frac{3}{5/100} = 60\ \text{A}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} V_2 = nV_1 = 10\times 3 = 30\ \text{V} \\ I_2 = \dfrac{I_1}{n} = \dfrac{60}{10} = 6\ \text{A} \end{cases}$$

### 理想変成器の関係式の導出



$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 \mp j\omega M I_2 \\ V_2 = \pm j\omega M I_1 - j\omega L_2 I_2 \end{cases}$$

代入

変形 $\longrightarrow I_1 = \pm\dfrac{1}{j\omega M}V_2 \pm \dfrac{L_2}{M}I_2$

⇓

$$\begin{cases} V_1 = \pm\dfrac{L_1}{M}V_2 \pm j\omega\left(\dfrac{L_1L_2}{M} - M\right)I_2 = \pm\dfrac{L_1}{M}V_2 \pm j\omega\left(\dfrac{L_1L_2(1-k^2)}{M}\right)I_2 \\ I_1 = \pm\dfrac{1}{j\omega M}V_2 \pm \dfrac{L_2}{M}I_2 \end{cases}$$

⇓ $k = 1\quad \left(M = \sqrt{L_1L_2}\right)$

$L_1, L_2 \to \infty \quad (M \to \infty)$

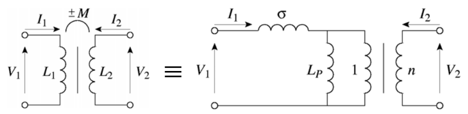
$$\begin{cases} V_1 = \pm\sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}}V_2 \\ I_1 = \pm\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}I_2 \end{cases}$$

$L_1 \propto N_1^2$

$L_2 \propto N_2^2$

$$\begin{cases} V_1 = \pm\dfrac{N_1}{N_2}V_2 & \text{(電圧比は巻数比に等しい)} \\ I_1 = \pm\dfrac{N_2}{N_1}I_2 & \text{(電流比は巻数比の逆数に等しい)} \end{cases}$$

## 一般の変成器の理想変成器による表現



二次側短絡

$V_1 = j\omega\dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_2}I_1 \qquad V_1 = j\omega\sigma I_1 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \dfrac{L_1L_2 + M^2}{L_2} = L_1(1-k^2)$

二次側開放

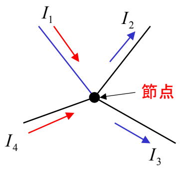
$V_1 = j\omega L_1 I_1 \qquad V_1 = j\omega(\sigma + L_P)I_1 \quad \Rightarrow \quad L_P = L_1 - \sigma = k^2 L_1$

一次側開放

$V_2 = j\omega L_2 I_2 \qquad V_2 = j\omega(n^2 L_P)I_2 \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{\dfrac{L_2}{L_P}} = \dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}$

教科書の例題7.3を説明

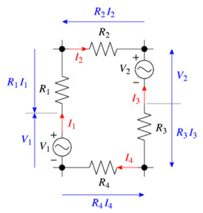
## 回路の節点と閉路




**キルヒホッフの電流則**

回路の任意の節点に流れ込む電流の和と流れ出す電流の和は等しい

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3$$
or
$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$$




**キルヒホッフの電圧則**

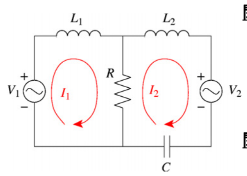
回路の任意の閉路をとってその閉路の中の各素子の電圧の一方向の向きの和と他方の向きの和は等しい

$$V_1 + R_3 I_3 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + V_2 + R_4 I_4$$
or
$$-V_1 + R_1 I_1 + R_2 I_2 + V_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4 = 0$$
or
$$V_1 - V_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + E_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4$$

## 閉路方程式

**解析手順**

- 回路の独立した閉回路を設定
- 閉回路の閉路電流を定める
- キルヒホッフの電圧則より各閉路の方程式を立てる
- 方程式を連立させて閉路電流を求める




**閉路方程式**

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + R(I_1 - I_2)$$
$$-V_2 = R(I_2 - I_1) + j\omega L_2 I_2 + \frac{1}{j\omega C} I_2$$

**閉路行列**

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 + R & -R \\ -R & R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

**閉路行列の一般的な形**

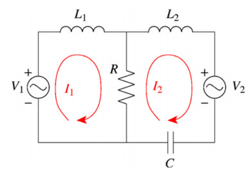
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

（既知の）駆動電源　　（未知の）閉路電流

**閉路行列の特徴**

- 対称行列
  $Z_{ij} = Z_{ji}$
- 対角成分は正、非対角成分は負または零
  $Z_{ii} > 0, \quad Z_{ij(i \neq j)} \leq 0$
- 対角成分はその行の非対角成分の総和の大きさよりも大きい
  $Z_{ii} \geq -\sum_{i \neq j} Z_{ij}$
- 方程式の数（行列のサイズ）は閉路の数に等しい

閉路方程式の簡便な立て方




1. 各閉路の電圧源の和を左辺ベクトルとする（閉路電流に対する電圧の向きに注意する）

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} =$$

2. 各閉路の素子のインピーダンスの和を（正符号として）対角成分とする

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 + R & ? \\ ? & R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

3. 閉路が接している境界にある素子のインピーダンスを（負符号として）対応する非対角成分に書く

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 + R & -R \\ -R & R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

## Cramer の公式（連立一次方程式の解法）

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+j & -1 \\ -1 & 1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 + R & -R \\ -R & R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$V_1 = 2\,\mathrm{V}, \ V_2 = 1\,\mathrm{V}, \ f = 50\,\mathrm{Hz}$

$R = 1\,\Omega, \ L_1 = \frac{1}{100\pi}\,\mathrm{H}, \ L_2 = \frac{1}{50\pi}\,\mathrm{H}, \ C = \frac{1}{150\pi}\,\mathrm{F}$

行列の行列式を求める

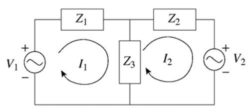
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+j & -1 \\ -1 & 1-j \end{vmatrix} = (1+j)(1-j) - (-1)\times(-1) = 2 - 1 = 1$$

閉路電流は以下のように求まる

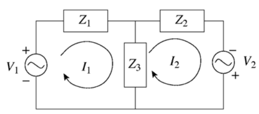
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & -1 \\ -V_2 & 1-j \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1-j \end{vmatrix}}{1} = 2(1-j) - (-1)\times(-1) = 1 - 2j \ \mathrm{A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+j & V_1 \\ -1 & -V_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1+j & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{1} = (1+j)\times(-1) - 2\times(-1) = 1 - j \ \mathrm{A}$$

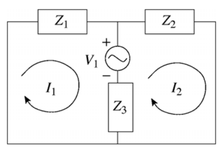
例題）次の回路の閉路方程式を立てよ



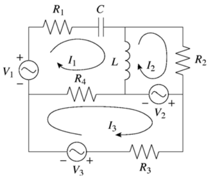

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$




$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$




$$\begin{bmatrix} -V_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$




$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \\ V_2-V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+\dfrac{1}{j\omega C}+j\omega L+R_4 & -j\omega L & -R_4 \\ -j\omega L & R_2+j\omega L & 0 \\ -R_4 & 0 & R_4+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

整理する

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \\ V_2-V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_1+R_4)+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right) & -j\omega L & -R_4 \\ -j\omega L & R_2+j\omega L & 0 \\ -R_4 & 0 & R_3+R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

例題) 以下の行列方程式を解け

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-j & -j & 0 \\ -j & 1+j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-j)(1+j)\times 2+(-j)\times 0\times 0+0\times(-j)\times 0 \\ &\quad -0\times(1+j)\times 0-0\times 0\times(1-j)-2\times(-j)\times(-j) \\ &= 4+2=6 \end{aligned}$$

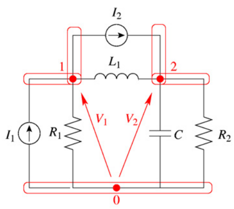
$$I_1=\frac{\begin{vmatrix} 6 & -j & 0 \\ -6 & 1+j & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{6\times(1+j)\times 2-2\times(-j)\times(-6)}{\Delta}=\frac{12}{6}=2$$

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix} 1-j & 6 & 0 \\ -j & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad I_3=\frac{\begin{vmatrix} 1-j & -j & 6 \\ -j & 1+j & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

## *節点方程式*

**解析手順**

- 回路の節点を設定 (一つは基準節点とする)
- 基準節点に対する節点電位を設定する
- キルヒホッフの電流則より各節点の方程式を立てる
- 方程式を連立させて節点電位を求める




**節点方程式**

$$I_1-I_2=\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_1-V_2}{j\omega L_1}$$

$$I_2=\frac{V_2-V_1}{j\omega L_1}+\frac{V_2}{R_2}+j\omega C V_2$$

**節点行列**

$$\begin{bmatrix} I_1-I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{j\omega L_1} & -\dfrac{1}{j\omega L_1} \\ -\dfrac{1}{j\omega L_1} & \dfrac{1}{R_1}+j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

**節点行列の一般的な形**

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

(既知の)駆動電流　　(未知の)節点電位

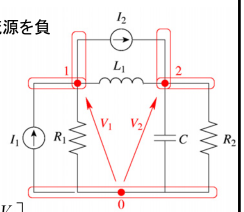
**閉路行列の特徴**

- 対称行列
  $Y_{ij}=Y_{ji}$
- 対角成分は正、非対角成分は負または零
  $Y_{ii}>0,\quad Y_{ij(i\neq j)}\leq 0$
- 対角成分はその行の非対角成分の総和の大きさよりも大きい
  $Y_{ii}\geq -\sum_{i\neq j} Y_{ij}$
- 方程式の数(行列のサイズ)は(節点の数－1)に等しい

節点方程式の簡便な立て方

1. 各節点に流れ込む電流源を正、流れ出す電流源を負として、その和を左辺ベクトルとする

$$\begin{bmatrix} I_1-I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} =$$



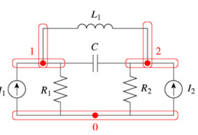

2. 各節点に接続する素子のアドミタンスの和を(正符号として)対角成分とする

$$\begin{bmatrix} I_1-I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{j\omega L_1} & ? \\ ? & \dfrac{1}{R_1}+j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

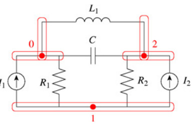
3. 節点間にある素子のアドミタンスを(負符号として)対応する非対角成分に書く

$$\begin{bmatrix} I_1-I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{j\omega L_1} & -\dfrac{1}{j\omega L_1} \\ -\dfrac{1}{j\omega L_1} & \dfrac{1}{R_1}+j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

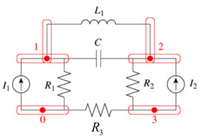
例題) 次の回路の節点方程式を立てよ




$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1}+j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L_1} & -j\omega C-\dfrac{1}{j\omega L_1} \\ -j\omega C-\dfrac{1}{j\omega L_1} & \dfrac{1}{R_2}+j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

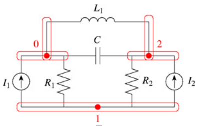



$$\begin{bmatrix} -I_1-I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2} & -\dfrac{1}{R_2} \\ -\dfrac{1}{R_2} & \dfrac{1}{R_2}+j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$




$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1}+j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L} & -j\omega C-\dfrac{1}{j\omega L} & 0 \\ -j\omega C-\dfrac{1}{j\omega L} & \dfrac{1}{R_2}+j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L} & -\dfrac{1}{R_2} \\ 0 & -\dfrac{1}{R_2} & \dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

例題) 次の回路の節点電位を求めよ




$$R_1 = R_2 = 1\,\Omega$$

$$C = \frac{1}{50\pi}\ \mathrm{F},\ L = \frac{1}{100\pi}\ \mathrm{H}$$

$$f = 50\,\mathrm{Hz},\ \ I_1 = 1\,\mathrm{A},\ \ I_1 = 1\,\mathrm{A}$$

$$\begin{bmatrix} -I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} & -\dfrac{1}{R_2} \\ -\dfrac{1}{R_2} & \dfrac{1}{R_2} + j\omega C + \dfrac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

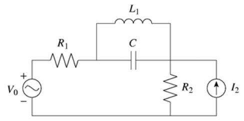
行列式の値は

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1+j \end{vmatrix} = 2(1+j) - (-1)^2 = 1 + j2$$

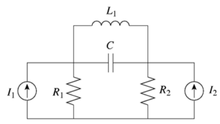
$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1+j \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(1+j2)}{1+j2} = -1\ \mathrm{V}$$

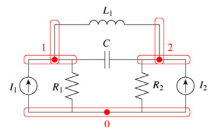
$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{0}{1+j2} = 0\ \mathrm{V}$$

例題) 次の回路の節点電位を求めよ (電圧源を含む場合)




<u>ノルトンの定理を用いて電圧源を電流源に変換</u>



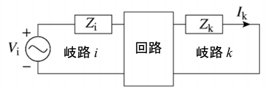




$$I_1 = \frac{V_0}{R_1}$$

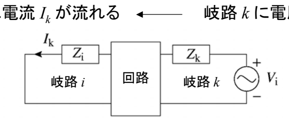
$$\begin{bmatrix} \dfrac{V_0}{R_1} \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + j\omega C + \dfrac{1}{j\omega L_1} & -j\omega C - \dfrac{1}{j\omega L_1} \\ -j\omega C - \dfrac{1}{j\omega L_1} & \dfrac{1}{R_2} + j\omega C + \dfrac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

## *可逆(相反)定理*

岐路 $i$ に電圧源 $V_i$ ⟶ 岐路 $k$ に電流 $I_k$ が流れた




岐路 $i$ に電流 $I_k$ が流れる ⟵ 岐路 $k$ に電圧源 $V_i$




## 相反の定理の証明

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

$i$ 番目の閉路に電圧源 $V_i$ を挿入したとき
岐路 $k$ の電流 $k$ 列

$$I_k = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & 0 & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{i1} & \cdots & V_i & \cdots & Z_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} V_i \quad i \text{ 行}$$

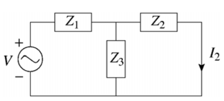
$k$ 番目の閉路に電圧源 $V_k$ を挿入したとき
岐路 $i$ の電流 $i$ 列

$$I_i = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & 0 & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{k1} & \cdots & V_k & \cdots & Z_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} V_k \quad k \text{ 行}$$

対称性 $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$

$$\frac{I_k}{V_i} = \frac{I_i}{V_k}$$

例題)
下図の回路でインピーダンス $Z_1$ の岐路に電圧源 $V$ を接続したとき、
$Z_2$ の岐路に電流 $I_2$ が流れた。このとき相反定理が成り立つことを確かめよ。




解答) 問題図の回路で

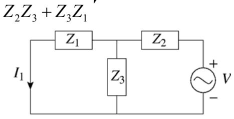
$$I_2 = \frac{V}{Z_1 + (Z_2 /\!/ Z_3)} \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} V$$

右下図の回路で

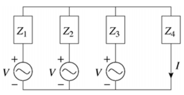
$$I_1 = \frac{V}{Z_3 + (Z_1 /\!/ Z_2)} \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} V$$

以上より

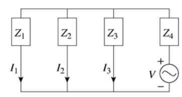
$$I_1 = I_2$$




例題) 次の回路の $Z_4$ に流れる電流を相反定理を利用して求めよ




解答) 下図のように電圧源を置き電流 $I_1, I_2, I_3$ を求めると,
求める電流は $I = I_1 + I_2 + I_3$ と求まる




$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V}{Z_4 + \left( \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3} \right)^{-1}}$$

$$= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_3 Z_4 + Z_3 Z_4 Z_1 + Z_4 Z_1 Z_2} V$$

## 回路の双対性

閉路方程式

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

節点方程式

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

$I$ と $V$, $Z$ と $Y$ を入れ替えても同様な関係が成り立つ

双対性

双対なパラメータ

| | |
|---|---|
| 電圧 | 電流 |
| インピーダンス | アドミタンス |
| R | G |
| L | C |
| 電圧源 | 電流源 |
| 短絡 | 開放 |
| 閉路 | 節点 |

双対な法則

| | |
|---|---|
| 電圧則 | 電流則 |
| Zの直列 | Yの並列 |
| 閉路方程式 | 節点方程式 |
| 直列回路の電圧分配 | 並列回路の電流分配 |
| テブナンの定理 | ノルトンの定理 |

## 逆回路

$Z_1 \cdot Z_2 = R_0^2$ ⟶ $Z_1$ と $Z_2$ は $R_0$ に関して互いに逆回路である

$ab = 1$　　$a$ と $b$ は互いに逆数

$[A][B] = [I]$　　$[A]$ と $[B]$ は互いに逆行列

逆回路の関係

抵抗　$R \to G_r = \dfrac{R}{R_0^2}$　$\left( R_r = \dfrac{R_0^2}{R} \right)$

コイル　$L \to C_r = \dfrac{L}{R_0^2}$

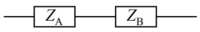
コンデンサ　$C \to L_r = CR_0^2$

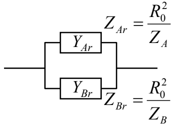
直列接続　⇔　並列接続

$$(j\omega L) \cdot Z_r = R_0^2 \to Z_r = \frac{1}{j\omega (L/R_0^2)} = \frac{1}{j\omega C_r} \longrightarrow C_r = \frac{L}{R_0^2}$$

$$\left( \frac{1}{j\omega C} \right) \cdot Z_r = R_0^2 \to Z_r = j\omega (CR_0^2) = j\omega L_r \longrightarrow L_r = CR_0^2$$

## 直列回路の逆回路



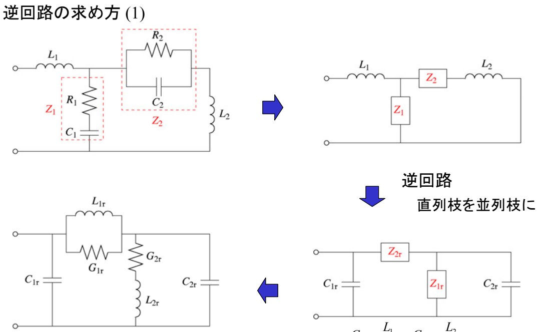

$Z_{Ar} = \dfrac{R_0^2}{Z_A}$　　$Z_{Br} = \dfrac{R_0^2}{Z_B}$

$$Z = Z_A + Z_B \longrightarrow Z_r = \frac{R_0^2}{Z} = \frac{R_0^2}{Z_A + Z_B}$$

$$Y_r = \frac{Z_A + Z_B}{R_0^2} = \frac{Z_A}{R_0^2} + \frac{Z_B}{R_0^2} = Y_{Ar} + Y_{Br}$$

簡単な回路の逆回路

## 逆回路の求め方 (1)

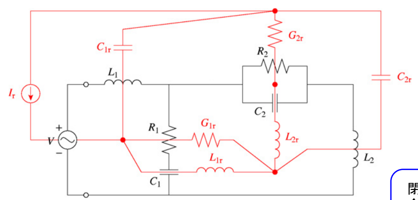



$C_{1r} = \dfrac{L_1}{R_0^2}$,　$C_{2r} = \dfrac{L_2}{R_0^2}$

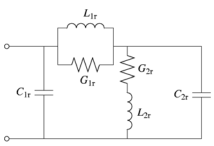
$L_{1r} = C_1 R_0^2$,　$L_{2r} = C_2 R_0^2$

$G_{1r} = \dfrac{R_1}{R_0^2}$,　$G_{2r} = \dfrac{R_2}{R_0^2}$

## 逆回路の求め方 (2)



閉路内に節点を作り
全ての素子を通るように
節点を接続する



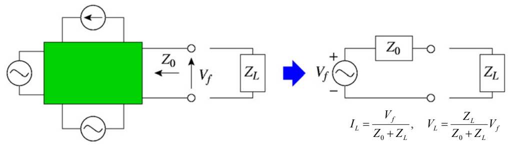
$C_{1r} = \dfrac{L_1}{R_0^2}$,　$C_{2r} = \dfrac{L_2}{R_0^2}$

$L_{1r} = C_1 R_0^2$,　$L_{2r} = C_2 R_0^2$

$G_{1r} = \dfrac{R_1}{R_0^2}$,　$G_{2r} = \dfrac{R_2}{R_0^2}$

## 等価電源の定理

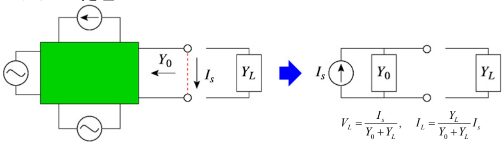
テブナンの定理



$I_L = \dfrac{V_f}{Z_0 + Z_L}$,　$V_L = \dfrac{Z_L}{Z_0 + Z_L} V_f$

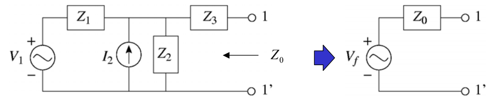
双対な法則

ノルトンの定理



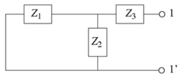
$V_L = \dfrac{I_s}{Y_0 + Y_L}$,　$I_L = \dfrac{Y_L}{Y_0 + Y_L} I_s$

例) 図の端子 1-1' から見たテブナン等価回路を作る



内部インピーダンスの計算

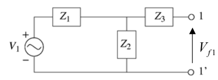
(電圧源は短絡、電流源は開放)



$$Z_0 = Z_3 + (Z_1 // Z_2) = Z_3 + \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$$
$$= \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_1+Z_2}$$

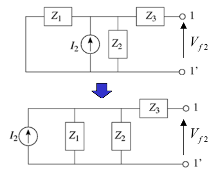
開放電圧の計算

・$V_1$ のみがある場合



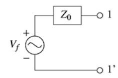
$$V_{f1} = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2}V_1$$

・$I_2$ のみがある場合



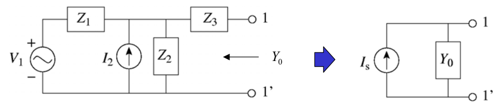
$$V_{f2} = (Z_1 // Z_2)I_2 = \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}I_2$$

テブナン等価回路



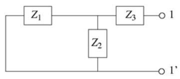
$$Z_0 = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_1+Z_2}$$
$$V_f = V_{f1} + V_{f2} = \frac{Z_2(V_1 + Z_1I_2)}{Z_1+Z_2}$$

例) 図の端子 1-1' から見たノルトン等価回路を作る



内部アドミタンスの計算

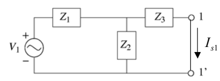
(電圧源は短絡、電流源は開放)



$$Y_0 = Y_3 // (Y_1 + Y_2) = \frac{(Y_1+Y_2)Y_3}{Y_1+Y_2+Y_3} = \frac{Z_1+Z_2}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$

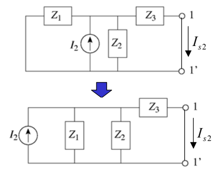
短絡電流の計算

・$V_1$ のみがある場合



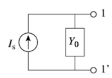
$$I_{s1} = \frac{V_1}{Z_1 + (Z_2 // Z_3)} \cdot \frac{1/Z_3}{1/Z_2 + 1/Z_3}$$
$$= \frac{(Z_2+Z_3)V_1}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1} \cdot \frac{Z_2}{Z_2+Z_3}$$
$$= \frac{Z_2V_1}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$

・$I_2$ のみがある場合



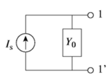
$$I_{s1} = \frac{1/Z_3}{1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3}$$
$$= \frac{Z_1Z_2}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}I_2$$

ノルトン等価回路



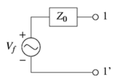
$$Y_0 = \frac{Z_1+Z_2}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$
$$I_s = I_{s1} + I_{s2} = \frac{Z_2(V_1 + Z_1I_2)}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$

ノルトン等価回路



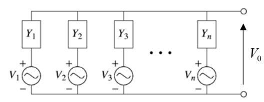
$$Y_0 = \frac{Z_1+Z_2}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$
$$I_s = I_{s1} + I_{s2} = \frac{Z_2(V_1 + Z_1I_2)}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$

テブナン等価回路を求める



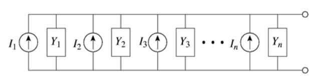
$$Z_0 = (Y_0)^{-1} = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_1+Z_2}$$
$$V_f = \frac{I_s}{Y_0} = \frac{Z_2(V_1 + Z_1I_2)}{Z_1+Z_2}$$

ミルマンの定理

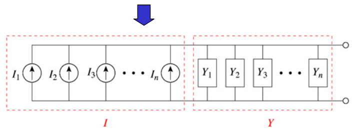


$$V_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_iV_i}{\sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

ノルトンの定理

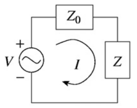


$$I_i = Y_iV_i$$



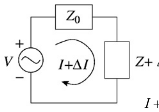
$$I = \sum_{i=1}^{n} Y_iV_i$$
$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$
$$V_0 = \frac{I}{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_iV_i}{\sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

## *補償定理* (素子の変化による影響を調べるのに有用)



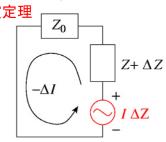

$$I=\frac{V}{Z_0+Z}$$

$Z \longrightarrow Z+\Delta Z$




$$I+\Delta I=\frac{V}{Z_0+Z+\Delta Z}$$

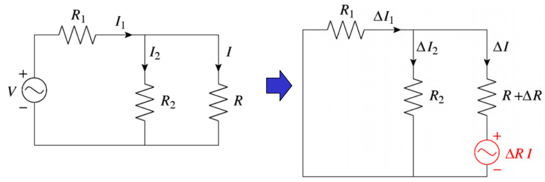
補償定理




$$-\Delta I=\frac{I\Delta Z}{Z_0+(Z+\Delta Z)}=\frac{V\Delta Z}{(Z_0+Z)\{Z_0+(Z+\Delta Z)\}}$$

$$\begin{aligned}I+\Delta I&=\frac{V}{Z_0+Z}-\frac{V\Delta Z}{(Z_0+Z)\{Z_0+Z+\Delta Z\}}\\&=\frac{Z_0+Z}{(Z_0+Z)\{Z_0+Z+\Delta Z\}}V\\&=\frac{V}{Z_0+Z+\Delta Z}\end{aligned}$$

例) 以下の回路の $R$ を $R+\Delta R$ に変化させたときの電流変化 $\Delta I$ を求めよ




$$I=\frac{V}{R_1+(R_2/\!/R)}\cdot\frac{1/R}{1/R_2+1/R}=\frac{R_2V}{R_1R_2+R_2R+RR_1}$$

$$\Delta I=-\frac{\Delta RI}{(R+\Delta R)+(R_1/\!/R_2)}=-\frac{(R_1+R_2)\Delta R}{(R+\Delta R)(R_1+R_2)+R_1R_2}I$$

$$\Delta I_1=\frac{1/R_1}{1/R_1+1/R_2}\Delta I=-\frac{R_2\Delta R}{(R+\Delta R)(R_1+R_2)+R_1R_2}I$$

$$\Delta I_2=\frac{1/R_2}{1/R_1+1/R_2}\Delta I=-\frac{R_1\Delta R}{(R+\Delta R)(R_1+R_2)+R_1R_2}I$$

$R_1=3\ \Omega$, $R_2=6\ \Omega$, $R=2\Omega$, $V=12\,\mathrm{V}$, $\Delta R=-1\Omega$ のとき，この結果を確かめる

$R=2\Omega$ のとき

$$I=\frac{12}{(3/\!/6)+2}=\frac{12}{4}=3\,\mathrm{A}\qquad I_1=\frac{1/3}{1/3+1/6}I=2\,\mathrm{A}\qquad I_2=\frac{1/6}{1/3+1/6}I=1\,\mathrm{A}$$

$R=2-1=1\Omega$ のとき

$$I=\frac{12}{(3/\!/6)+1}=\frac{12}{3}=4\,\mathrm{A}\qquad I_1=\frac{1/3}{1/3+1/6}I=\frac{8}{3}\,\mathrm{A}\qquad I_2=\frac{1/6}{1/3+1/6}I=\frac{4}{3}\,\mathrm{A}$$

以上より

$$\Delta I=4-3=1\,\mathrm{A},\quad \Delta I_1=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}\,\mathrm{A},\quad \Delta I_2=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}\,\mathrm{A}$$

一方、補償定理より

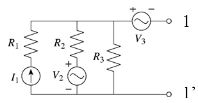
$$\Delta I=-\frac{(R_1+R_2)\Delta R}{(R+\Delta R)(R_1+R_2)+R_1R_2}I=-\frac{(3+6)\cdot(-1)}{(2-1)(3+6)+3\cdot 6}\cdot 3=\frac{9}{27}\cdot 3=1\,\mathrm{A}$$

$$\Delta I_1=\frac{1/R_1}{1/R_1+1/R_2}\Delta I=\frac{R_2}{R_1+R_2}\Delta I=\frac{6}{3+6}\cdot 1=\frac{2}{3}\,\mathrm{A}$$

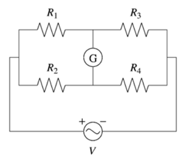
$$\Delta I_2=\frac{1/R_2}{1/R_1+1/R_2}\Delta I=\frac{R_1}{R_1+R_2}\Delta I=\frac{3}{3+6}\cdot 1=\frac{1}{3}\,\mathrm{A}$$

**宿題**

下図の端子 1-1’ から見たテブナン等価回路、ノルトン等価回路を求めよ

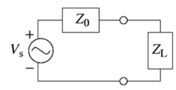



下図のブリッジ回路が平衡しているとき、抵抗 $R$ に直列に抵抗 $R_0$ を接続したときに検流計にはいくらの電流がどちら向きに流れるか、補償定理より求めよ




## *最大電力伝送定理*

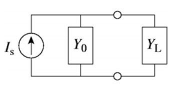
負荷インピーダンスと電源の内部インピーダンスが複素共役の関係(共役整合)にあるとき、負荷に供給される電力は最大になる




$$P=\frac{R_L|V_s|^2}{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2}$$

$$Z_{L,opt}=Z_0^* \Rightarrow P_{\max}=\frac{|V_s|^2}{4R_0}$$

$$\begin{pmatrix}R_{L,opt}=R_0\\X_{L,opt}=-X_0\end{pmatrix}$$




$$P=\frac{G_L|I_s|^2}{(G_0+G_L)^2+(B_0+B_L)^2}$$

$$Y_{L,opt}=Y_0^* \Rightarrow P_{\max}=\frac{|I_s|^2}{4G_0}$$

$$\begin{pmatrix}G_{L,opt}=G_0\\B_{L,opt}=-B_0\end{pmatrix}$$

### *最大電力伝送定理の証明*

$$P=\frac{R_L|V_s|^2}{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2}$$

分母を最小化する $X_L=-X_0$

$$P=\frac{R_L|V_s|^2}{(R_0+R_L)^2}=\frac{|V_s|^2}{R_0\left(\sqrt{\frac{R_0}{R_L}}+\sqrt{\frac{R_L}{R_0}}\right)^2}=\frac{|V_s|^2}{R_0\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\qquad\left(x=\sqrt{\frac{R_0}{R_L}}\right)$$

分母を最小化する $x=\frac{1}{x}=1$

$R_L=R_0$

$$P=\frac{|V_s|^2}{4R_0}$$

$x$ が正の実数のとき

$$x+\frac{1}{x}\geq 2$$

等号は $x=1/x=1$ のとき

## $R_L$ のみが変化できるとき

$$\frac{\partial P}{\partial R_L}=\frac{\left\{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2\right\}-2R_L(R_0+R_L)}{\left\{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2\right\}^2}|V_s|^2$$

$$=\frac{\left\{(R_0+R_L)(R_0-R_L)+(X_0+X_L)^2\right\}}{\left\{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2\right\}^2}|V_s|^2$$

$$=\frac{\left\{R_0^2-R_L^2+(X_0+X_L)^2\right\}}{\left\{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2\right\}^2}|V_s|^2=0 \quad \Rightarrow \quad R_L=\sqrt{R_0^2+(X_0+X_L)^2}$$

### 微分による最大･最小の計算

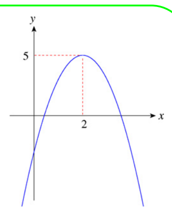
$$y=-2x^2+8x-3 \longrightarrow y=-2(x-2)^2+5$$

$\frac{\partial y}{\partial x}=0$ で極値

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-4x+8=0$$

$$\therefore \quad x=2$$

$$y\big|_{x=2}=-2\cdot 2^2+8\cdot 2-3=5$$



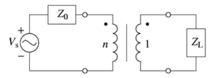

## $X_L/R_L$ 一定で大きさを変化させるとき

$$P=\frac{n^2R_L|V_s|^2}{(R_0+n^2R_L)^2+(X_0+n^2X_L)^2}=\frac{R_L|V_s|^2}{\left(\frac{R_0}{n}+nR_L\right)^2+\left(\frac{X_0}{n}+nX_L\right)^2}$$

分母を最小化する

$\vec{A}=(R_0,X_0),\quad \vec{B}=(R_L,X_L)$ と考えると

$$\left(\frac{R_0}{n}+nR_L\right)^2+\left(\frac{X_0}{n}+nX_L\right)^2=\left|\frac{\vec{A}}{n}+n\vec{B}\right|^2$$

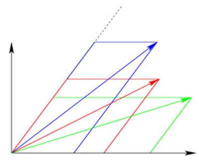



一方 $\frac{\vec{A}}{n}\times n\vec{B}=\vec{A}\times\vec{B} \longrightarrow$ 面積一定

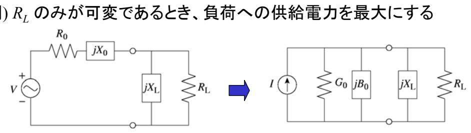
よって面積一定の下で対角線の長さを最小にする

$$\left|\frac{\vec{A}}{n}\right|=\left|n\vec{B}\right| \longrightarrow \left|\vec{A}\right|=n^2\left|\vec{B}\right|$$

$$|Z_0|=n^2|Z_L|$$



## 例) $R_L$ のみが可変であるとき、負荷への供給電力を最大にする




$$G_0=\frac{R_0}{R_0^2+X_0^2},\quad B_0=\frac{-X_0}{R_0^2+X_0^2}$$

$$G_{L,opt}=\sqrt{G_0^2+(B_0+B_L)^2}=\sqrt{\left(\frac{R_0}{R_0^2+X_0^2}\right)^2+\left(\frac{-X_0}{R_0^2+X_0^2}-\frac{1}{X_L}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{R_0}{R_0^2+X_0^2}\right)^2+\left(\frac{R_0^2+X_0^2+X_0X_L}{(R_0^2+X_0^2)X_L}\right)^2}=\sqrt{\frac{R_0^2X_L^2+(R_0^2+X_0^2)^2+2X_0X_L(R_0^2+X_0^2)+X_0^2X_L^2}{(R_0^2+X_0^2)^2X_L^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(R_0^2+X_0^2)\left\{R_0^2+X_0^2+2X_0X_L+X_0^2X_L^2\right\}}{(R_0^2+X_0^2)^2X_L^2}}$$

$$=\frac{1}{X_L}\sqrt{\frac{R_0^2+(X_0+X_L)^2}{(R_0^2+X_0^2)}} \longrightarrow R_{L,opt}=X_L\sqrt{\frac{R_0^2+X_0^2}{R_0^2+(X_0+X_L)^2}}$$

## *宿題*

下図の回路で電源の角周波数を ω とし、
以下に指定する素子を用いて負荷を構成するとき、
負荷に供給される電力を最大にするための回路と素子値を求めよ

(1) $R_L$
(2) $R_L$, $C_L$
(3) $R_L$, $L_L$

但し、(1) については微分を用いて $R_L$ の最適地を求める