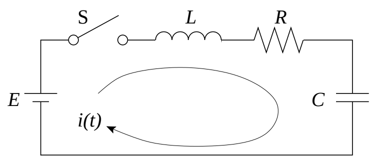
小テスト

下図の RLC 直列回路で，$R = 5\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = 0.5$ F とする．$t = 0$ でスイッチ S を閉じ，直流電圧 $E = 12$ V を印加したときの回路に流れる電流 $i(t)$ を求めよ．



解答

回路に流れる電流を $i(t)$，コンデンサに蓄えられている電荷を $q(t)$ として，キルヒホッフの電圧則を適用すると，以下の回路方程式を得る．

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E \tag{2}$$

単位時間にコンデンサに蓄えられる電荷は回路に流れた電流に等しいので，$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を利用すると，電荷 $q(t)$ に対する以下の微分方程式を得る．

$$L\frac{d^2q(t)}{dt} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E \qquad \rightarrow \qquad 2\frac{d^2q(t)}{dt} + 5\frac{dq(t)}{dt} + 2q(t) = 12$$

定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ に分離して考えると，定常解に対しては

$$2q_s(t) = 12 \qquad \rightarrow \qquad q_s(t) = 6\ \mathrm{C}$$

と求まる．また，過渡解に対しては以下の微分方程式を満足する．

$$2\frac{d^2q_t(t)}{dt} + 5\frac{dq_t(t)}{dt} + 2q_t(t) = 0$$

ここで，上式の解を $q_t(t) = Ae^{mt}$ と仮定すると，特性方程式は

$$2m^2 + 5m + 2 = (2m+1)(m+2) = 0$$

のように書け，$m = -1/2, -2$ と求まるので，$q_t(t)$ は以下のように書ける．

$$q_t(t) = A_1e^{-t/2} + A_2e^{-2t}$$

したがって，$q(t)$ の一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 6 + A_1e^{-t/2} + A_2e^{-2t}$$

であり，電流 $i(t)$ は以下のように求まる．

$$i(t) \quad = \quad \frac{dq_t(t)}{dt} = -\frac{A_1}{2}e^{-t/2} - 2A_2e^{-2t}$$

$t = 0$ で $q(0) = 0$，$i(0) = 0$ という初期条件を用いると

$$\begin{aligned} q(0) &= 6 + A_1 + A_2 = 0 \\ i(0) &= -\frac{A_1}{2} - 2A_2 = 0 \end{aligned}$$

したがって，$A_1 = -8$，$A_2 = 2$ である．よって，電流 $i(t)$ は以下のように求まる．

$$i(t) = -\frac{A_1}{2}e^{-t/2} - 2A_2e^{-2t} = 4\left(e^{-t/2} - e^{-2t}\right)\ \mathrm{A}$$