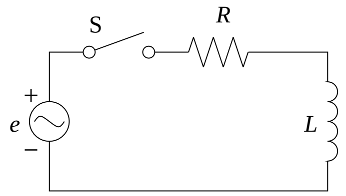
## 小テスト

下図の回路で，$t=0$ でスイッチ S を閉じ，交流電圧 $e=E_m\sin(\omega t+\theta)$ を印加したときの回路電流 $i(t)$ を求めよ．また，過渡電流が流れないための $\theta$ の値を求めよ．




## 解答

キルヒホッフの電圧則より回路方程式は以下のように与えられる．

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=E_m\sin(\omega t+\theta)$$

定常解 $i_s(t)$ と過渡解 $i_t(t)$ に分離して考えると，それぞれが満たす微分方程式は

$$L\frac{di_s(t)}{dt}+Ri_s(t)=E_m\sin(\omega t+\theta)$$

$$L\frac{di_t(t)}{dt}+Ri_t(t)=0$$

である．まず，定常解について解く．定常状態に対する解は交流回路理論を用いると，$d/dt\to j\omega$ として

$$j\omega LI_s+RI_s=E_me^{j\theta}$$

上式を $I_s$ について解くと以下のように求まる．

$$I_s=\frac{E_me^{j\theta}}{R+j\omega L}=E_me^{j\theta}\frac{1}{\sqrt{R^1+\omega^2L^2}}e^{-j\phi'}=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}e^{j(\theta-\phi')}\qquad\left(\phi'=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

以上より，定常解は

$$i_s(t)=I_m\sin(\omega t+\theta-\phi')\qquad\left(I_m=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\right)$$

と求まる．

一方，過渡解は

$$i_t(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}\qquad(A\ :\ \text{積分定数})$$

である．したがて，電流 $i(t)$ の一般解は

$$i(t)=i_s(t)+i_t(t)=I_m\sin(\omega t+\theta-\phi')+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

で与えられる．初期条件として $t=0$ で $i(t=0)=0$ を代入すると

$$i(0)=I_m\sin(\theta-\phi')+A=0\qquad\to\qquad A=-I_m\sin(\theta-\phi')$$

と求まり，回路に流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t)\ =\ \frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left\{\sin(\omega t+\theta-\phi')-\sin(\theta-\phi')e^{-\frac{R}{L}t}\right\},\qquad\left(\phi'=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

また，過渡電流が流れないための $\theta$ の値は

$$\theta-\phi'=0\text{ or }\pi\qquad\to\qquad\theta=\phi'\text{ or }\pi+\phi'$$