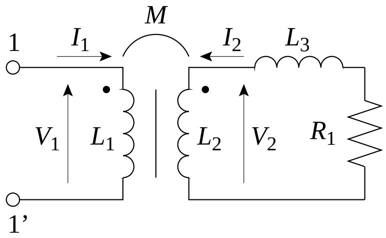
問１ (a)

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \qquad (1)$$

$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \qquad (2)$$

$$V_2 = -(R_1 + j\omega L_3) I_2 \qquad (3)$$

(2) と (3) より



$$j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = -(R_1 + j\omega L_3) I_2$$

$$I_2 = \frac{-j\omega M}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} I_1 \qquad (4)$$

(4) を (1) に代入して

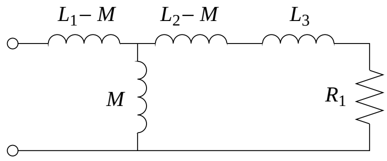
$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} I_1$$

よって，入力インピーダンス Z_i は

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)}$$

問１ (a) **別解**
変成器を T 形等価回路に置き換えると

$$\begin{aligned} Z_i &= j\omega(L_1 - M) + [j\omega M // \{R_1 + j\omega(L_2 - M + L_3)\}] \\ &= j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega M\{R_1 + j\omega(L_2 - M + L_3)\}}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} \\ &= j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega M\{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)\} + \omega^2 M^2}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} \\ &= j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} \end{aligned}$$

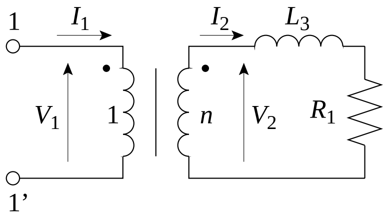


問１ (b)

理想変成器の場合，電圧比は巻数比になる

$$V_1 : V_2 = 1 : n \qquad \rightarrow \qquad V_1 = \frac{1}{n} V_2$$

理想変成器は無損失であるので



$$I_1 V_1 = I_2 V_2 \qquad \rightarrow \qquad I_1 = \frac{V_2}{V_1} I_2 = n I_2$$

よって

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{n^2}\frac{V_2}{I_2} = \frac{R_1 + j\omega L_3}{n^2}$$

問１ (b) **別解**
問１ (a) の結果に理想変成器の条件

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1 \qquad \rightarrow \qquad M^2 = L_1 L_2$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{n^2} \qquad \rightarrow \qquad L_2 = n L_1$$

$$L_1, L_2 \rightarrow \infty$$

を適用すると

$$\begin{aligned} Z_i &= \lim_{L_1, L_2 \to \infty} \left[j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} \right] = \lim_{L_1, L_2 \to \infty} \left[j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} \right] \\ &= \lim_{L_1, L_2 \to \infty} \left[\frac{j\omega L_1 (R_1 + j\omega L_3)}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} \right] = \lim_{L_1 \to \infty} \left[\frac{j\omega L_1 (R_1 + j\omega L_3)}{R_1 + j\omega(n^2 L_1 + L_3)} \right] = \frac{R_1 + j\omega L_3}{n^2} \end{aligned}$$

問 2 (a)

図より，閉路ごとにキルヒホッフの電圧則を適用すると

$$\begin{aligned} V_1 &= R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) + \frac{1}{j\omega C_1}(I_1 - I_3) \\ &= \left(R_1 + R_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right) I_1 - R_2 I_2 - \frac{1}{j\omega C_1} I_3 \\ V_2 &= R_2(I_2 - I_1) + R_3 I_2 + j\omega L_2(I_2 - I_3) \\ &= -R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + j\omega L_2) I_2 - j\omega L_2 I_3 \\ -V_2 &= \frac{1}{j\omega C_1}(I_3 - I_1) + j\omega L_2(I_3 - I_2) + R_4 I_3 \\ &= -\frac{1}{j\omega C_1} I_1 - j\omega L_2 I_2 + \left(R_4 + j\omega L_2 \frac{1}{j\omega C_1}\right) I_3 \end{aligned}$$

これらを行列形式に整理すると

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(R_1 + R_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right) & -R_2 & -\frac{1}{j\omega C_1} \\ -R_2 & (R_2 + R_3 + j\omega L_2) & -j\omega L_2 \\ -\frac{1}{j\omega C_1} & -j\omega L_2 & \left(R_4 + j\omega L_2 \frac{1}{j\omega C_1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

問 2 (b)

節点 0 を基準とした節点 1, 2 の電位を V_1，V_2 とすると，節点方程式は以下のように書ける

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} + j\omega C_1 & -\frac{1}{j\omega L_1} - j\omega C_1 \\ -\frac{1}{j\omega L_1} - j\omega C_1 & \frac{1}{j\omega L_1} + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

問 2 (c)

各素子のアドミタンスは

$$\frac{1}{R_1} = 1 \text{ S}, \quad \frac{1}{j\omega L_1} = \frac{1}{j\omega L_2} = -j2 \text{ S}, \quad j\omega C_1 = j4 \text{ S} \quad j\omega C_2 = j \text{ S}$$

であるので，節点方程式は以下のように書ける

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + j2 & -j2 \\ -j2 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

行列式 Δ は以下のように求まる

$$\Delta = (1 + j2)j - (-j2)^2 = j - 2 + 4 = 2 + j$$

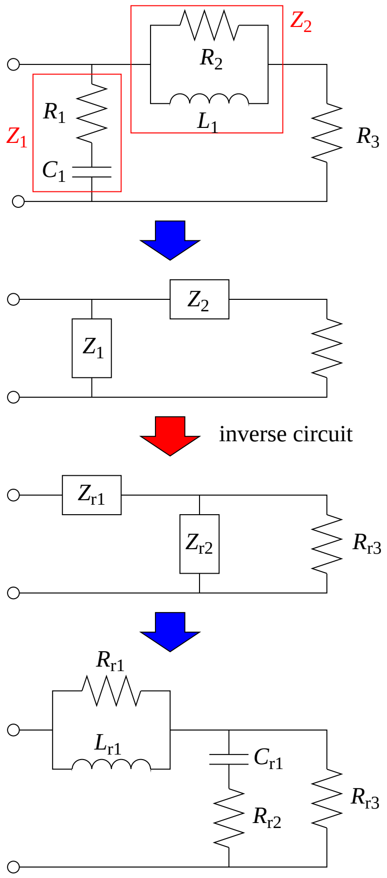
したがって，

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -j2 \\ 0 & j \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{j5}{2 + j} = \frac{j5(2 - j)}{2^2 + 1^2} = 1 + j2 \text{ V}$$

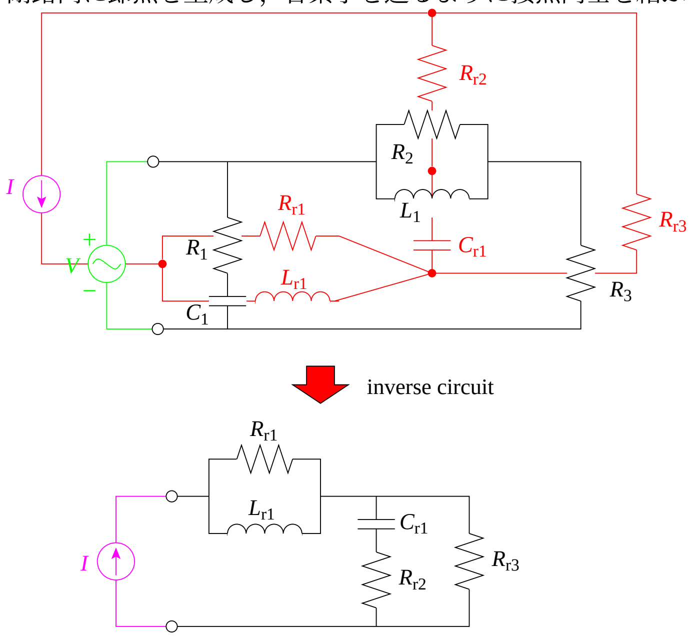
$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + j2 & 5 \\ -j2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{j10}{2 + j} = \frac{j10(2 - j)}{2^2 + 1^2} = 2 + j4 \text{ V}$$

問３

（解法１）
問題図の回路から，直列 $\Longleftrightarrow$ を行うことで逆回路を求める．



（解法２）
閉路内に節点を生成し，各素子を通るように接点同士を結ぶ



逆回路中の各素子の値は以下の通りである

$$R_{r1}=\frac{R_0^2}{R_1},\qquad R_{r2}=\frac{R_0^2}{R_2},\qquad R_{r3}=\frac{R_0^2}{R_3},\qquad C_{r1}=\frac{L_1}{R_0^2},\qquad L_{r1}=C_1R_0^2$$

問3

まず，テブナンの等価回路を求める．まず，全ての電源を取り除いたときの内部抵抗を求め，次に，端子間の開放電圧を重ね合わせの理を用いて求める．

- 内部抵抗

$$Z_0 = R_3 + (R_1 // R_2) = R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1+R_2}$$

- 電圧源 V_1 のみの場合の開放電圧 V_{f1}

$$V_{f1} = \frac{R_2}{R_1+R_2}V_1$$

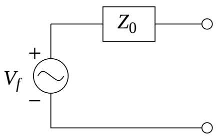
- 電流源 I_2 のみの場合の開放電圧 V_{f2}

$$V_{f2} = R_2\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}I_2\right)$$

よって，開放電圧 V_f は以下のように書ける

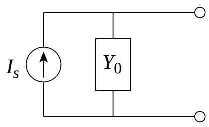
$$V_f = V_{f1} + V_{f2} = \frac{R_2(V_1 + R_1I_2)}{R_1+R_2}$$

従って，テブナンの等価回路は以下のようになる．



$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1+R_2} \\ V_f &= \frac{R_2(V_1 + R_1I_2)}{R_1+R_2} \end{aligned}$$

上で求まったテブナンの等価回路を，ノルトンの等価回路に変換すると以下のようになる．



$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{1}{Z_0} = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\ I_s &= Y_0V_f = \frac{R_2(V_1 + R_1I_2)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \end{aligned}$$

この電源に負荷 Z_L を接続したとき，負荷にかかる電圧 V_L および負荷に流れる電流 I_L は，以下のように求まる．

$$\begin{aligned} V_L &= \frac{Z_L}{Z_0+Z_L}V_f = \frac{(R_1+R_2)Z_L}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 + (R_1+R_2)Z_L} \cdot \frac{R_2(V_1 + R_1I_2)}{R_1+R_2} \\ &= \frac{Z_LR_2(V_1 + R_1I_2)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 + (R_1+R_2)Z_L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_L &= \frac{V_f}{Z_0+Z_L} \\ &= \frac{R_2(V_1 + R_1I_2)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 + (R_1+R_2)Z_L} \end{aligned}$$