1.1

回路方程式は

$$L\frac{di}{dt}+Ri=10 \quad\rightarrow\quad 0.5\frac{di}{dt}+2i=10 \quad\rightarrow\quad \frac{di}{dt}+4i=20$$

定常解 ： $i_s=5$

過渡解 ： $i_t=Ae^{-4t}$

一般解 ： $i=5+Ae^{-4t}$

$t=0$ での初期条件 ($i(0)=0$) より

$$5+A=0 \quad\rightarrow\quad A=-5$$

よって

$$i(t)=5\left(1-e^{-4t}\right)\ [\mathrm{A}]$$

1.2

回路方程式は

$$L\frac{di}{dt}+Ri=e_s \quad\rightarrow\quad 0.5\frac{di}{dt}+2i=10\sin 2t \quad\rightarrow\quad \frac{di}{dt}+4i=20\sin 2t$$

上式をラプラス変換すると

$$(s+4)I(s)=\frac{20\cdot 2}{s^2+2^2}$$

$$I(s)=\frac{40}{(s+4)(s^2+4)}=\frac{2}{s+4}+\frac{-2s+8}{s^2+4}=\frac{2}{s+4}+\frac{-2s}{s^2+2^2}+\frac{4\cdot 2}{s^2+2^2}$$

上式をラプラス逆変換すると ($i(0)=0$ より)

$$i(t)=2e^{-4t}-2\cos 2t+4\sin 2t\ [\mathrm{A}]$$

1.3

回路方程式は

$$L\frac{di}{dt}+Ri=e_s \quad\rightarrow\quad 0.5\frac{di}{dt}+2i=10e^{-t/T} \quad\rightarrow\quad \frac{di}{dt}+4i=20e^{-t/T}$$

上式をラプラス変換すると

$$(s+4)I(s)=\frac{20}{s+1/T}$$

$$I(s)=\frac{20}{(s+4)(s+1/T)}=\frac{1}{s+4}\cdot\frac{20}{-4+1/T}+\frac{1}{s+1/T}\cdot\frac{20}{-1/T+4}$$

上式をラプラス逆変換すると ($i(0)=0$ より)

$$i(t)=\frac{20}{4-1/T}\left(e^{-t/T}-e^{-4t}\right)\ [\mathrm{A}]$$

$T\rightarrow\infty$ とすると (電源電圧波形はステップ関数になる)

$$i(t)=5\left(1-e^{-4t}\right)\ [\mathrm{A}]$$

となり，(1) の結果と一致する．

2.1

初期条件は $t = 0$ で

$$i_L(0) = \frac{E}{R_0} = 2 \text{ A}, \quad q_C(0) = CE = 2.5 \text{ C}$$

回路方程式は

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E$$

$i = dq/dt$ を代入すると

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad \rightarrow \quad 0.5\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 4q = 10$$
$$\rightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} + 4\frac{dq}{dt} + 8q = 20$$

特性方程式は

$$m^2 + 4m + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -2 \pm 2j$$

したがって

$$\begin{aligned} &\text{定常解} &:& \quad 8q_s = 20 \quad \rightarrow \quad q_s = 2.5 \\ &\text{過渡解} &:& \quad q_t = e^{-2t}\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right) \\ &\text{一般解} &:& \quad q = q_s + q_t = 2.5 + e^{-2t}\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right) \end{aligned}$$

$t = 0$ で $q = 2.5$ より

$$2.5 + A = 2.5 \quad \rightarrow \quad A = 0$$

したがって

$$q = 2.5 + Be^{-2t}\sin 2t$$

電流は

$$i = \frac{dq}{dt} = B\left(-2e^{-2t}\sin 2t + e^{-2t}\cdot 2\cos 2t\right) = 2Be^{-2t}\left(\cos 2t - \sin 2t\right)$$

$t = 0$ で $i = 2$ より

$$i(0) = 2B = 2 \quad \rightarrow \quad B = 1$$

よって

$$i(t) = 2e^{-2t}\left(\cos 2t - \sin 2t\right) \ \text{[A]}$$

2.1 (別解)

初期条件は $t = 0$ で

$$i_L(0) = \frac{E}{R_0} = 2\ \mathrm{A}, \qquad q_C(0) = CE = 2.5\ \mathrm{C}$$

回路方程式は

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = Eu(t)$$

上式をラプラス変換すると

$$L\left(sI(s) - i(0)\right) + RI(s) + \frac{1}{C}\left(\frac{I(s)}{s} + \frac{1}{s}\int idt\bigg|_{t=0}\right) = \frac{E}{s}$$

素子値と初期条件を代入すると

$$0.5\left(sI(s) - 2\right) + 2I(s) + 4\left(\frac{I(s)}{s} + \frac{2.5}{s}\right) = \frac{10}{s}$$

$I(s)$ について解くと

$$(s + 4 + 8/s)I(s) = 2 \qquad \rightarrow \qquad I(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 8} = \frac{2(s+2) - 2\cdot 2}{(s+2)^2 + 2^2}$$

上式をラプラス逆変換すると

$$i(t) = 2e^{-2t}\left(\cos 2t - \sin 2t\right)\ \ [\mathrm{A}]$$

3.1

閉路方程式は以下のように書ける

$$\begin{aligned}
\text{閉路 1} \quad &: \quad R_0 i_1 + R_1(i_1 - i_2) + R_2(i_1 - i_3) = Eu(t) \\
\text{閉路 2} \quad &: \quad R_1(i_2 - i_1) + \frac{1}{C_1}\int i_2 dt = 0 \\
\text{閉路 3} \quad &: \quad R_2(i_3 - i_1) + \frac{1}{C_2}\int i_3 dt = 0
\end{aligned}$$

上式を，コンデンサの初期電荷が 0 であることを考慮してラプラス変換し，行列の形に整理すると以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} R_0 + R_1 + R_2 & -R_1 & -R_2 \\ -R_1 & R_1 + 1/(sC_1) & 0 \\ -R_2 & 0 & R_2 + 1/(sC_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E/s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

素子値を代入すると

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -1 & (s+1)/s & 0 \\ -2 & 0 & (2s+1)/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30/s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

左辺行列の行列式は

$$\begin{aligned}
\Delta &= 6(s+1)(2s+1)/s^2 - 4(s+1)/s - (2s+1)/s = \frac{1}{s^2}(6s^2 + 13s + 6) \\
&= \frac{(3s+2)(2s+3)}{s^2}
\end{aligned}$$

Cramer の公式より $I_1(s)$ は

$$\begin{aligned}
I_1(s) &= \frac{\begin{vmatrix} 30/s & -1 & -2 \\ 0 & (s+1)/s & 0 \\ 0 & 0 & (2s+1)/s \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{30(s+1)(2s+1)}{s(3s+2)(2s+3)} \\
&= \frac{5}{s} + \frac{3}{3s+2} + \frac{8}{2s+3}
\end{aligned}$$

よって

$$i_1(t) = 5u(t) + e^{-2t/3} + 4e^{-3t/2} \text{ [A]}$$

以下同様に

$$\begin{aligned}
I_2(s) &= \frac{\begin{vmatrix} 6 & 30/2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & (2s+1)/s \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{30(2s+1)}{(3s+2)(2s+3)} \\
&= \frac{-6}{3s+2} + \frac{24}{2s+3}
\end{aligned}$$

よって

$$i_2(t) = -2e^{-2t/3} + 12e^{-3t/2} \text{ [A]}$$

$$\begin{aligned} I_3(s) &= \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & 30/s \\ -1 & (s+1)/s & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{60(s+1)}{(3s+2)(2s+3)} \\ &= \frac{12}{3s+2} + \frac{12}{2s+3} \end{aligned}$$

よって

$$i_3(t) = 4e^{-2t/3} + 6e^{-3t/2} \text{ [A]}$$

4.1

節点方程式は以下のように書ける．

$$
\begin{aligned}
\text{節点 1} \quad &: \quad \frac{v_1}{R_0} + \frac{v_1 - v_2}{R_1} + C_1 \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} = Iu(t) \\
\text{節点 2} \quad &: \quad \frac{v_2 - v_1}{R_1} + C_1 \frac{d(v_2 - v_1)}{dt} + \frac{v_2}{R_2} + C_2 \frac{dv_2}{dt} = 0
\end{aligned}
$$

上式を，コンデンサの初期電荷が 0 であることを考慮してラプラス変換し，行列の形に整理すると以下のようになる．

$$
\begin{bmatrix} 1/R_0 + 1/R_1 + sC_1 & -1/R_1 - sC_1 \\ -1/R_1 - sC_1 & 1/R_1 + 1/R_2 + sC_1 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I/s \\ 0 \end{bmatrix}
$$

素子値を代入すると

$$
\begin{bmatrix} (3s+4)/3 & -(s+1) \\ -(s+1) & (4s+3)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/s \\ 0 \end{bmatrix}
$$

左辺行列の行列式は

$$
\Delta = \frac{(3s+4)(4s+3)}{6} - (1+s)^2 = \frac{6s^2 + 13s + 6}{6} = \frac{(3s+2)(2s+3)}{6}
$$

Cramer の公式より $V_1(s)$ は

$$
\begin{aligned}
V_1(s) \quad &= \quad \frac{\begin{vmatrix} 10/s & -(1+s) \\ 0 & (4s+3)/2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{30(4s+3)}{s(3s+2)(2s+3)} \\
&= \quad \frac{15}{s} + \frac{-9}{3s+2} + \frac{-24}{2s+3}
\end{aligned}
$$

上式をラプラス逆変換すると

$$
v_1(t) = 15u(t) - 3e^{-2t/3} - 12e^{-3t/2} \ [\mathrm{V}]
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
V_2(s) \quad &= \quad \frac{\begin{vmatrix} (3s+4)/3 & 10/s \\ -(1+s) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{60(s+1)}{s(3s+2)(2s+3)} \\
&= \quad \frac{10}{s} + \frac{-18}{3s+2} + \frac{-8}{2s+3}
\end{aligned}
$$

上式をラプラス逆変換すると

$$
v_2(t) = 10u(t) - 6e^{-2t/3} - 4e^{-3t/2} \ [\mathrm{V}]
$$

問 3 の結果を用いると，節点 1 の電位は

$$
\begin{aligned}
v_1(t) \quad &= \quad E - R_0 i_1(t) = 30u(t) - 3\left(5u(t) + e^{-2t/3} + 4e^{-3t/2}\right) \\
&= \quad 15u(t) - 3e^{-2t/3} - 12e^{-3t/2} \ [\mathrm{V}]
\end{aligned}
$$

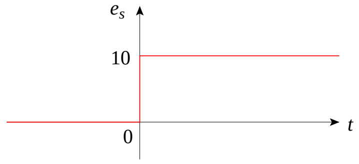
となり，問 4 の結果と一致する．同様に，問 3 の結果より

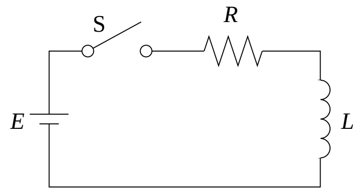
$$
\begin{aligned}
v_2(t) \quad &= \quad R_2\left(i_1 - i_3\right) = 2\left\{\left(5u(t) + e^{-2t/3} + 4e^{-3t/2}\right) - \left(4e^{-2t/3} + 6e^{-3t/2}\right)\right\} \\
&= \quad 10u(t) - 6e^{-2t/3} - 4e^{-3t/2} \ [\mathrm{V}]
\end{aligned}
$$

となり，問 4 の結果と一致する．

多かった間違い

- 問 1(1) の問題の電源に関して $e_s(t) = 10u(t)$ は以下の図 (左) ような関数であり，図 (右) の回路で時刻 0 でスイッチを閉じたのと同じ問題です．





- 問 1(2) と (3) の電源 e_s に含まれる $u(t)$ の意味も 1.1 と同様で，時刻 0 でスイッチが閉じたことを意味している．したがって

$$
\begin{aligned}
(2) \quad : \quad & \mathcal{L}\{e_s\} \neq 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s^2+w^2} \\
& \mathcal{L}\{e_s\} = 10 \cdot \cdot \frac{2}{s^2+w^2}
\end{aligned}
$$

であり，$1/s$ は不要である．1.3 も同様に

$$
\begin{aligned}
(3) \quad : \quad & \mathcal{L}\{e_s\} \neq 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1/T} \\
& \mathcal{L}\{e_s\} = 10 \cdot \cdot \frac{1}{s+1/T}
\end{aligned}
$$

である．

- 問 2 の問題で，初期条件はスイッチが閉じた状態の定常状態を考える．このとき，コイルは抵抗 0，コンデンサは抵抗 ∞ となるので，電流は L と R_0 のみを通って流れ，R，C には流れないので，コイルに流れる電流は

$$i_L(0) = \frac{E}{R_0} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

一方，コンデンサには電源電圧 E がそのままかかっている (コイルの抵抗は 0 なので電圧降下はない．また，R には電流が流れていないので，ここでの電圧降下も 0 である) ので

$$q_C(0) = CE = 0.25 \times 10 = 2.5 \text{ C}$$

と求まる．

- 問 2 の問題で特性方程式について．特性方程式は過渡解を求めるときに使用しているので，$q_t = Ae^{mt}$ を代入する方程式は電源を取り除いた

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

である．(**右辺が 0 であることに注意**) 代入してみると

$$\left(m^2L + mR + \frac{1}{C}\right) Ae^{mt} = 0$$

であり，Ae^{mt} は 0 ではにので，左辺括弧内が 0 となる．

$$0.5m^2 + 2m + 4 = 0$$

とすべき t ころを

$$0.5m^2 + 2m + 4 = 10$$

としていた人が多く見られた．また，単純な数値の代入ミスも多く見られた．特に $1/C = 1/0.25 = 4$ とするところを $1/4$ としたり，1 とした解答が多く見られた．

- 問 2 で e^{-2t} とすべきところを，e^{2t} と書いている人が比較的多く見られました．単なる書き間違いと思われるものが多かったですが，指数部が正になると $t \to \infty$ で値が発散するのでおかしいと思うべきです．(抵抗などの損失がある場合) 過渡現象は時間が経つと減衰するということを考えてください．
- 問 3 に関して．問 1，問 2 の正答率が低いのに対して，考え方に関しては比較的よくできていた．ただし，最後の答までたどり着けた人は極めて少なく，多くは $I_1(s)$，$I_2(s)$，$I_3(s)$ を導いて終わっていた．ラプラス逆変換の手順を良く復習してください．たとえば，$I_1(s)$ を以下のように部分分数展開するとき

$$I_1(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2/3} + \frac{K_3}{s+3/2}$$

各係数は以下のようにして求められます.

$$\begin{aligned} K_1 &= sI_1(s)|_{s=0} = 5 \\ K_2 &= (s+2/3)I_1(s)|_{s=-2/3} = 1 \\ K_3 &= (s+3/2)I_1(s)|_{s=-3/2} = 4 \end{aligned}$$

他に多かった間違いは，上記の部分分数展開を

$$I_1(s) = \frac{5}{s} + \frac{3}{3s+2} + \frac{8}{2s+3}$$

とした後 (ここまでは正解)，ラプラス逆変換で

$$i_1(t) = 5u(t) + 3e^{-2t/3} + 8e^{-3t/2}$$

としている人も多く見かけました．分母の s の係数は 1 になるよに分母分子を割る必要があります．これらのことは留数演算の公式を用いるときも同じです．

- 問 3 でコンデンサにかかる電圧の計算を間違えている人も多数見かけました．コンデンサにかかる電圧は

  $$v_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i dt$$

  です．電荷は電流によって運ばれるので，電流を時間積分すると蓄えられた電荷なります．(電流は単位時間辺りに電荷が通り抜けた量を表している)

- 問 3 で右辺の電源をラプラス変換したときに E/s の $1/s$ を忘れている人も多くいました．ステップ関数のラプラス変換は $1/s$ です．

- 問 4 に関して，節点方程式の基本を理解していない人が多く見られました．基本は「(節点に流れ込む電流)=(節点から流れ出る電流)」です．またコンデンサに流れる電流は，以下の式で与えられます．

  $$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cv)}{dt} = C\frac{dv}{dt}$$

  また，2 つの節点について考えれば良いところを，何故か節点を 3 つに増やしている人も相当数いました．

その他不明な点があれば，直接聞きに来てください．