2.1

(1)

回路方程式

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=E$$

初期条件

$$t=0 \text{ で } i(0)=0$$

回路方程式から，定常解と過渡解を求める

• 定常解 $(d/dt=0)$

$$Ri_s(t)=E \quad\rightarrow\quad i_s(t)=\frac{E}{R}$$

• 過渡解 (E=0)

$$L\frac{di_t(t)}{dt}+Ri_t(t)=0$$
$$\frac{di_t(t)}{dt}+\frac{R}{L}i_t(t)=0 \quad\rightarrow\quad i_t(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}, \quad (A:\text{未知定数})$$

以上より，一般解は以下のように与えられる

$$i(t)=i_s(t)+i_t(t)=\frac{E}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

次に，初期条件から未知定数 A を決定する．$t=0$ で $i(0)=0$ なので，これを上式に代入すると

$$\frac{E}{R}+A=0 \quad\rightarrow\quad A=-\frac{E}{R}$$

よって，電流 $i(t)$ は

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \left(\text{時定数}:\tau=\frac{L}{R}\right)$$

具体的な数値を代入すると

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{10}{5}\left(1-e^{-\frac{5}{10\times10^{-3}}t}\right)=2\left(1-e^{-500t}\right)\ \text{A}\\
v_R(t) &= Ri(t)=10\left(1-e^{-500t}\right)\ \text{V}\\
v_L(t) &= L\frac{di(t)}{dt}=(10\times10^{-3})\times2\times(+500)e^{-500t}=10e^{-500t}\ \text{V}
\end{aligned}$$

(2)

$$\text{時定数は}\tau=\frac{L}{R}=\frac{10\times10^{-3}}{5}=2\times10^{-3}\ \text{s}=2\ \text{ms}$$

$$i(\tau)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right)=\frac{10}{5}\left(1-\frac{1}{e}\right)\simeq1.3\ \text{A}$$

(2)

$$\begin{aligned}
v_R(t)=v_L(t) \quad\rightarrow\quad & 10\left(1-e^{-500t}\right)=10e^{-500t}\\
& 1=2e^{-t/\tau}\\
& e^{t/\tau}=2\\
& t/\tau=\ln2 \quad\rightarrow\quad t=\tau\ln2=2\times10^{-3}\ln2\simeq1.4\ \text{ms}
\end{aligned}$$

2.2

$0 \leq t << 0.1$ s の解は，問 2.1 の結果をそのまま使うと

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \qquad \left(\text{時定数：}\tau = \frac{L}{R}\right)$$

と書ける．具体的に数値を代入すると

$$i(t) = \frac{10}{10}\left(1 - e^{-10t}\right) = \left(1 - e^{-10t}\right) \ \mathrm{A}$$

次に，$t > 0.1$ s の解を求める，この場合，回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = -E_2, \qquad (\text{電圧源の向きが逆であることに注意する})$$

であり，初期条件は $t = 0.1$ s で

$$i(0.1) = \left(1 - e^{-1}\right) \ \mathrm{A}$$

である．問 9.1 のときと同様にして，定常解と過渡解を求めると

- 定常解 $(d/dt = 0)$

$$Ri_s(t) = -E_2 \quad \rightarrow \quad i_s(t) = -\frac{E_2}{R}$$

- 過渡解 $(E_2 = 0)$

$$L\frac{di_t(t)}{dt} + Ri_t(t) = 0 \quad \rightarrow \quad i_t(t) = A_2 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (A_2 : \text{未知定数})$$

$$i_t(t) = A_2' e^{-\frac{R}{L}(t-0.1)}, \quad \left(A_2' = A_2 e^{-\frac{0.1R}{L}}\text{：後の計算を簡単にするため}\right)$$

以上より，一般解は

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = -\frac{E_2}{R} + A_2' e^{-\frac{R}{L}(t-0.1)} = -0.5 + A_2' e^{-10(t-0.1)}$$

$t = 0.1$ s での初期条件を用いると

$$i(0.1) = -0.5 + A_2' = \left(1 - e^{-1}\right) \quad \rightarrow \quad A_2' = 1.5 - e^{-1}$$

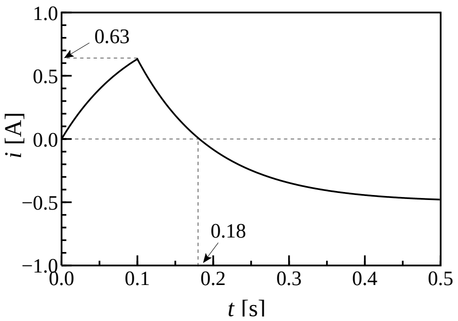
以上より，

$$i(t) = -0.5 + \left(1.5 - e^{-1}\right) e^{-10(t-0.1)} \simeq -0.5 + 1.13e^{-10(t-0.1)} \ \mathrm{A}$$

以上をまとめると

$$0 \leq t \leq 0.1 \ \mathrm{s}： \quad i(t) = \left(1 - e^{-10t}\right) \ \mathrm{A}$$
$$t \geq 0.1 \ \mathrm{s}： \quad i(t) \simeq -0.5 + 1.13e^{-10(t-0.1)} \ \mathrm{A}$$

グラフは以下のようになる



2.3
回路方程式は

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

初期条件は

$$t = 0 \text{ で } q = q_0 = 5 \text{ C}$$

電流と電荷の間の関係 $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ より，回路方程式は以下のように書き直せる．

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

一般解を得るために，定常解と過渡解を求める

• 定常解 $(d/dt = 0)$

$$\frac{q_s(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad q_s(t) = CE$$

• 過渡解 $(E = 0)$

$$R\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{CR}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (\text{時定数}：\tau = CR = 10 \text{ s})$$

以上より，一般解は以下のように書ける

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = CE + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

未知定数 A を決めるために $t = 0$ での初期条件を用いると

$$q(0) = CE + A = q_0 \quad \rightarrow \quad A = q_0 - CE$$

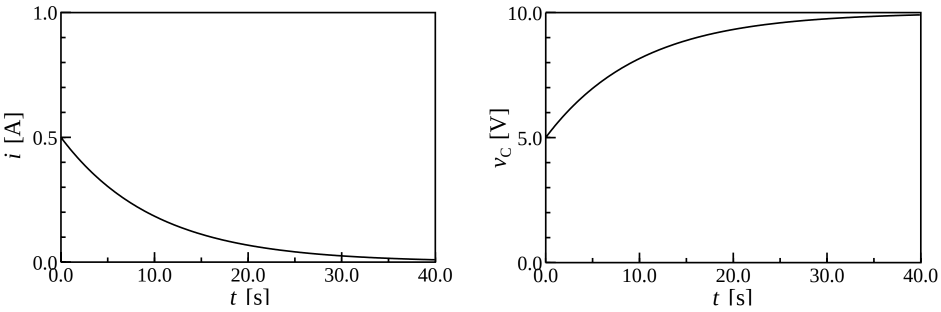
よって，$q(t)$ は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} q(t) &= CE + (q_0 - CE)e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 \times 10 + (5 - 1 \times 10)e^{-t/10} \\ &= 10 - 5e^{-t/10} \end{aligned}$$

回路に流れる電流 i とコンデンサにかかる電圧 v_C は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = -5 \times (-1/10)e^{-t/10} = 0.5e^{-t/10} \\ v_C(t) &= \frac{q(t)}{C} = 10 - 5e^{-t/10} \end{aligned}$$

電流 i ，電圧 v_C のグラフは以下のように書ける．



2.4

回路方程式は

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$$

初期条件は

$$t = 0 \text{ で } q = q_0 = CE_0$$

問 2.3 の結果を利用すると，一般解は以下のように求まる (電源がつながっていないので 9.2 の一般解で $E = 0$ とする)

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (\tau = CR)$$

時刻 t_1 秒においてコンデンサにかかっている電圧は

$$v_C(t_1) = \frac{q(t_1)}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{CE_0}{C} e^{-\frac{t_1}{CR}} = E_0 e^{-\frac{t_1}{CR}} = E_1$$

上式を C について解くと

$$e^{\frac{t_1}{CR}} = \frac{E_0}{E_1}$$

$$\frac{t_1}{CR} = \ln(E_0/E_1)$$

$$C = \frac{t_1}{R\ln(E_0/E_1)}$$

質問に対する答

- **必ず具体的な数値を求めた方がいいのですか？　$\ln 2$ 等は関数電卓がないと計算するのがきついのでテストに出すときは e や $\ln$ はそのままにした方が良い．**

  テストに出すときは ln の計算を必要としないか，必要な数値を与えておくようにします．ただ，$e = 2.718\cdots$ は $\pi = 3.1415926535897$ と同様重要な数なので覚えておいた方が良いです．

- **いきなり最後の式になるのがわからない**

  $$\left[\qquad i(\tau) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = \frac{10}{5}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \simeq 1.3 \text{ A} \qquad \right]$$

  自然対数 $e = 2.718\cdots$ を代入すると

  $$\frac{10}{5}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2.718\cdots}\right) = 1.264\cdots \simeq 1.3 \text{ A}$$

  最後の $\simeq$ は小数点以下第一桁で打ち切っているので，完全に等しいのではなく「およそ」という意味で使っています．

- **最後の式になるのがわからない**

  $$\left[\qquad t = \tau \ln 2 = 2 \times 10^{-3} \ln 2 \simeq 1.4 \text{ ms} \qquad \right]$$

  $$\tau \ln 2 = \frac{L}{R} \ln 2 = \frac{10 \times 10^{-3}}{5} \ln 2 2 \times 10^{-3} 0.693\cdots \simeq 1.4 \times 10^{-3} \text{ s} \quad \simeq 1.4 \text{ ms}$$

- **最後の式になるのがわからない**

  $$\left[\qquad i(t) = -0.5 + \left(1.5 - e^{-1}\right) e^{-10(t-0.1)} \simeq -0.5 + 1.13 e^{-10(t-0.1)} \text{ A} \qquad \right]$$

  $$i(t) = -0.5 + \left(1.5 - e^{-1}\right) e^{-10(t-0.1)} = -0.5 + \left(1.5 - \frac{1}{2.718\cdots}\right) e^{-10(t-0.1)} \simeq -0.5 + 1.13 e^{-10(t-0.1)} \text{ A}$$

- **グラフの描き方がわかりません．**

  以下の点に注意してグラフを書いてください

  - 横軸：変化が十分緩やかになって，グラフの特徴がわかる時間幅を取る
  - 縦軸：最大と最小が収まる幅を取る．
  - 横軸・縦軸：軸のラベルを必ず付ける．単位も忘れない．
  - 横軸・縦軸：適当な区切りの良い数値のところに軸のスケールがわかるように数値を書く．
  - グラフ上の特徴的な点がわかるように適宜数値を書き込む．(グラフが急激に変化する点，0 を横切る点，時定数がわかるような点，$\cdots$)
  - グラフの線が複数になるときは，各線の条件 (パラメータ) を記入する．

- **なぜ左から右の式になるのかわからない**

$$\left[\qquad \frac{di_t(t)}{dt}+\frac{R}{L}i_t(t)=0 \quad\to\quad i_t(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}, \quad (A:\text{未知定数}) \qquad\right]$$

以下のようにして式を積分して変形する．

$$\begin{aligned}
&\frac{di_t(t)}{dt}+\frac{R}{L}i_t(t)=0\\
&\frac{1}{i(t)}di_t(t)=-\frac{R}{L}dt \qquad \leftarrow \text{この式の両辺を積分する}\\
&\int\frac{1}{i(t)}di_t(t)=-\int\frac{R}{L}dt \qquad \leftarrow \int\frac{1}{x}=\ln x\\
&\ln i(t)=-\frac{R}{L}t+k \qquad (k:\text{積分定数})\\
&i(t)=e^{-\frac{R}{L}t+k} \qquad \leftarrow \ln y=\log_e y\ \text{のことである．}\log_e y=x \ \to\ y=e^x\\
&i(t)=e^ke^{-\frac{R}{L}t} \qquad \leftarrow k\ \text{は定数であり,}\ e^k\ \text{も定数になるので,}\\
&\qquad\qquad\qquad A=e^k\ \text{として (見やすいように) 新たな定数に置き換える．}\\
&i(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}$$

- **なぜ積分するのかわからない**

$i(t)$ について解くためです．$i(t)$ は微分の形で与えられているので，積分することで $i(t)$ の表式を得ます．他の解き方があればそれでも良いですし，一階の微分方程式の答は覚えてしまっているなら途中を省略しても構いません．

- $i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}$ **の関係は？**

電流とは電荷の流れのことで，電流の大きさの定義は「単位時間 (1 秒) に通過する電荷量 (C)」です．ここで，コンデンサの電荷は電流によって運ばれてくるので，単位時間にコンデンサに蓄えられた電荷量が流れた電流と等しくなり，これを式で書くと上の式が書けます．

- **どうして右のようにするのか？**

$$\left[\qquad i_t(t)=A_2e^{-\frac{R}{L}t}, \quad\to\quad i_t(t)=A_2'e^{-\frac{R}{L}(t-0.1)} \qquad\right]$$

もちろん左の式のまま計算しても同じ答になります．右のように置き換えたのは，後に初期条件として $t=0.1$ s を代入したときに，e の累乗が $e^{0.1-0.1}=e^0=1$ となって消えるようにです．講義で行った，一般的な $t=t_0$ でスイッチする場合の解も参考にしてください．式の右側のような置き方をしなくても最終的には同じ答になっています．

- **なぜこうなるのか？**

$$\left[\qquad v_c(t)=\frac{q(t)}{C} \qquad\right]$$

コンデンサに蓄えられる電荷 Q は，コンデンサにかかる電圧 V とコンデンサの静電容量 C を用いて $Q=CV$ で表せます．V について解くと $V=Q/C$ であり，電圧，電荷はいま時間の関数なので $V\to v_c(t)$，$Q\to q(t)$ と置いています．

- $<\leq$，$>\leq$，$\simeq$ の記号の意味がわからない

$$\left[\quad \begin{array}{ll} 0 \leq t <\leq 0.1\ \mathrm{s}： & i(t) = \left(1 - e^{-10t}\right)\ \mathrm{A} \\ t >\leq 0.1\ \mathrm{s}： & i(t) \simeq -0.5 + 1.13e^{-10(t-0.1)}\ \mathrm{A} \end{array} \quad\right]$$

$<\leq$，$>\leq$ は単純な書き間違いで $\leq$，$\geq$ のことです．解答を修正しました．$\simeq$ は「およそ等しい」という記号で，高校までで使う「　」と同じ意味です．

- **問 9.1 とはどこのことですか？**

問 2.1 の書き間違えで，２章の章末演習問題１のつもりでした．

- **問 4 が良くわからない**

どこがわからないかをもう少し詳しくレポートしてください．