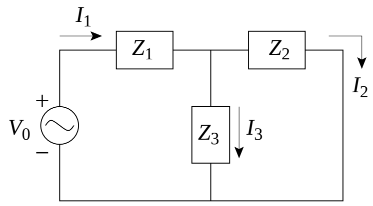
電気回路 II 宿題 (第 7 回)

課題 1 下図の回路のインピーダンス Z_2 が $Z_2 + \Delta Z_2$ に変化したとき，電流 I_1，I_2，I_3 の変化を補償定理より求めよ．



解答
図より

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{V_0}{Z_1 + (Z_2//Z_3)} = \frac{V_0}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2+Z_3}} = \frac{(Z_2+Z_3)V_0}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1} \\
I_2 &= I_1 \cdot \frac{Z_3}{Z_2+Z_3} = \frac{Z_3V_0}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1} \\
I_3 &= I_1 \cdot \frac{Z_2}{Z_2+Z_3} = \frac{Z_2V_0}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}
\end{aligned}
$$

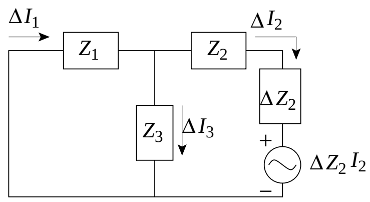
まず，補償定理を用いないで電流変化分を計算してみる．$Z_2 \to Z_2 + \Delta Z_2$ と変化させると

$$
\begin{aligned}
I_1' &= \frac{(Z_2 + \Delta Z_2 + Z_3)V_0}{(Z_2 + \Delta Z_2)(Z_1+Z_3) + Z_3Z_1} \\
I_2' &= \frac{Z_3V_0}{(Z_2 + \Delta Z_2)(Z_1+Z_3) + Z_3Z_1} \\
I_3' &= \frac{(Z_2 + \Delta Z_2)V_0}{(Z_2 + \Delta Z_2)(Z_1+Z_3) + Z_3Z_1}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\Delta I_1 &= I_1' - I_1 = \frac{(Z_2 + \Delta Z_2 + Z_3)V_0}{(Z_2 + \Delta Z_2)(Z_1+Z_3) + Z_3Z_1} - \frac{(Z_2+Z_3)V_0}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1} \\
&= \frac{-\Delta Z_2 Z_3^2 V_0}{\{(Z_2 + \Delta Z_2)(Z_1+Z_3) + Z_3Z_1\}(Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1)} \\
\Delta I_2 &= I_2' - I_2 = \frac{Z_3V_0}{(Z_2 + \Delta Z_2)(Z_1+Z_3) + Z_3Z_1} - \frac{Z_3V_0}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1} \\
&= \frac{-\Delta Z_2 Z_3 (Z_1+Z_3) V_0}{\{(Z_2 + \Delta Z_2)(Z_1+Z_3) + Z_3Z_1\}(Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1)} \\
\Delta I_3 &= I_3' - I_3 = \frac{(Z_2 + \Delta Z_2)V_0}{(Z_2 + \Delta Z_2)(Z_1+Z_3) + Z_3Z_1} - \frac{Z_2V_0}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1} \\
&= \frac{-\Delta Z_2 Z_1 Z_3 V_0}{\{(Z_2 + \Delta Z_2)(Z_1+Z_3) + Z_3Z_1\}(Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1)}
\end{aligned}
$$

次に，補償定理を用いて解く．補償定理を用いると $Z_2 \to Z_2 + \Delta Z_2$ と変化させたときの電流変化分を計算するための回路は以下のように書ける．

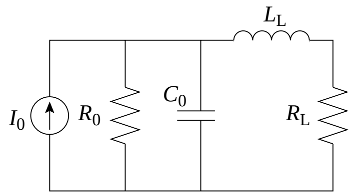


図より

$$
\begin{aligned}
\Delta I_2 &= \frac{-\Delta Z_2 I_2}{(Z_2+\Delta Z_2)+(Z_1//Z_3)} = \frac{-\Delta Z_2 I_2}{(Z_2+\Delta Z_2)+\frac{Z_1Z_3}{Z_1+Z_3}} \\
&= \frac{-\Delta Z_2(Z_1+Z_3)}{(Z_2+\Delta Z_2)(Z_1+Z_3)+Z_1Z_3} I_2 \\
&= \frac{-\Delta Z_2(Z_1+Z_3)}{(Z_2+\Delta Z_2)(Z_1+Z_3)+Z_1Z_3} \cdot \frac{Z_3V_0}{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1} \\
&= \frac{-\Delta Z_2 Z_3(Z_1+Z_3)V_0}{\{(Z_2+\Delta Z_2)(Z_1+Z_3)+Z_3Z_1\}(Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1)} \\
\Delta I_1 &= \Delta I_2 \cdot \frac{Z_3}{Z_1+Z_3} \\
&= \frac{-\Delta Z_2 Z_3^2 V_0}{\{(Z_2+\Delta Z_2)(Z_1+Z_3)+Z_3Z_1\}(Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1)} \\
\Delta I_3 &= \Delta I_2 \cdot \frac{Z_1}{Z_1+Z_3} \\
&= \frac{-\Delta Z_2 Z_1 Z_3 V_0}{\{(Z_2+\Delta Z_2)(Z_1+Z_3)+Z_3Z_1\}(Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1)} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

以上より，補償定理を用いて求めた電流の変化量は，変化前後の電流を直接計算して差を取った結果と一致することが確かめられる．

課題 2 下図の回路で負荷 R_L の電力が最大となる L_L，R_L の値を求めよ．また，L_L の値が固定で R_L のみが可変の場合はどうなるか求めよ．



解答

電源をテブナン等価回路に置き換える．

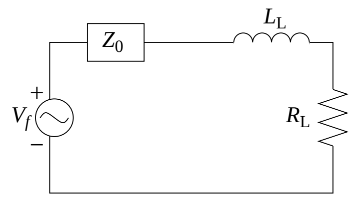
● 内部インピーダンス Z_0

$$\begin{aligned} Z_0 &= R_0//(1/j\omega C_0) = \frac{R_0}{1+j\omega C_0 R_0} \\ &= \frac{R_0 - j\omega C_0 R_0^2}{1+(\omega C_0 R_0)^2} = R_0' + jX_0' \quad \rightarrow \quad R_0' = \frac{R_0}{1+(\omega C_0 R_0)^2}, \quad X_0' = -\frac{\omega C_0 R_0^2}{1+(\omega C_0 R_0)^2} \end{aligned}$$

● 開放電圧 V_f

$$V_f = Z_0 I_0 = \frac{R_0 I_0}{1+j\omega C_0 R_0}$$

以上より，テブナン等価回路を用いて以下の回路を得る



いま，R_L，L_L を独立に変化させることができるとき，最大電力伝送定理より，
R_L，L_L の最適値は

$$\begin{aligned} R_{L,opt} &= R_0' = \frac{R_0}{1+(\omega C_0 R_0)^2} \\ \omega L_{L,opt} &= -X_0' = \frac{\omega C_0 R_0^2}{1+(\omega C_0 R_0)^2} \quad \rightarrow \quad L_{L,opt} = \frac{C_0 R_0^2}{1+(\omega C_0 R_0)^2} \end{aligned}$$

このときの R_L での消費電力は

$$P_{\max} = \frac{|V_f|^2}{4R_0'} = \frac{R_0^2 I_0^2}{1+(\omega C_0 R_0)^2} \frac{1+(\omega C_0 R_0)^2}{4R_0} = \frac{R_0 I_0^2}{4}$$

次に，R_L のみが可変の場合，R_L での消費電力は

$$I_L = \frac{V_f}{Z_0 + (R_L + j\omega L_L)} = \frac{V_f}{(R_0' + R_L) + j(X_0' + \omega L_L)}$$

$$P = R_L |I_L|^2 = \frac{R_L |V_f|^2}{(R_0' + R_L)^2 + (X_0' + \omega L_L)^2}$$

と表せるので，R_L で P を微分して

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{(R_0' + R_L)^2 + (X_0' + \omega L_L)^2 - 2R_L(R_0' + R_L)}{\{(R_0' + R_L)^2 + (X_0' + \omega L_L)^2\}^2} |V_f|^2$$

極致を取るのは，$\frac{dP}{dR_L}=0$ のときなので

$$(R_0'+R_L)^2+(X_0'+\omega L_L)^2-2R_L(R_0'+R_L)=0$$
$$(R_0'-R_L)(R_0'+R_L)+(X_0'+\omega L_L)^2=0$$
$${R_0'}^2-R_L^2+(X_0'+\omega L_L)^2=0$$

よって

$$\begin{aligned}
R_{L,opt} &= \sqrt{{R_0'}^2+(X_0'+\omega L_L)^2} \\
&= \sqrt{\frac{R_0^2}{\{1+(\omega C_0R_0)^2\}^2}+\left(-\frac{\omega C_0R_0^2}{1+(\omega C_0R_0)^2}+\omega L_L\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{R_0^2+\omega^2\left[L_L\{1+(\omega C_0R_0)^2\}-C_0R_0^2\right]^2}}{1+(\omega C_0R_0)^2}
\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}
P_{\max} &= \frac{\sqrt{{R_0'}^2+(X_0'+\omega L_L)^2}}{\left(R_0'+\sqrt{{R_0'}^2+(X_0'+\omega L_L)^2}\right)^2+(X_0'+\omega L_L)^2}|V_f|^2 \\
&= \frac{\sqrt{{R_0'}^2+(X_0'+\omega L_L)^2}}{2\left\{{R_0'}^2+(X_0'+\omega L_L)^2\right\}+2R_0'\sqrt{{R_0'}^2+(X_0'+\omega L_L)^2}}|V_f|^2 \\
&= \frac{1}{R_0'+\sqrt{{R_0'}^2+(X_0'+\omega L_L)^2}}\frac{|V_f|^2}{2} \\
&= \frac{1}{\frac{R_0}{1+(\omega C_0R_0)^2}+\sqrt{\left(\frac{R_0}{1+(\omega C_0R_0)^2}\right)^2+\left(\frac{-\omega C_0R_0^2}{1+(\omega C_0R_0)^2}+\omega L_L\right)^2}}\frac{|V_f|^2}{2} \\
&= \frac{1+(\omega C_0R_0)^2}{R_0+\sqrt{R_0^2+\left[\omega L_L\{1+(\omega C_0R_0)^2\}-\omega C_0R_0^2\right]^2}}\frac{|V_f|^2}{2} \\
&= \frac{1+(\omega C_0R_0)^2}{R_0+\sqrt{R_0^2+\left[\omega L_L\{1+(\omega C_0R_0)^2\}-\omega C_0R_0^2\right]^2}}\cdot\frac{R_0^2I_0^2}{2\left\{1+(\omega C_0R_0)^2\right\}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{R_0^2I_0^2}{R_0+\sqrt{R_0^2+\omega^2\left[L_L\{1+(\omega C_0R_0)^2\}-C_0R_0^2\right]^2}}
\end{aligned}$$

参考までに，上式を L_L で微分して L_L に関する最適値を求めると

$$\frac{dP_{\max}}{dL_L}$$
$$=-\frac{R_0^2I_0^2}{2}\frac{\frac{1}{2}2\omega^2\left(1+(\omega C_0R_0)^2\right)\left[L_L\{1+(\omega C_0R_0)^2\}-C_0R_0^2\right]\left[R_0^2+\omega^2\left[L_L\{1+(\omega C_0R_0)^2\}-C_0R_0^2\right]^2\right]^{-1/2}}{\left[R_0+\sqrt{R_0^2+\omega^2\left[L_L\{1+(\omega C_0R_0)^2\}-C_0R_0^2\right]^2}\right]^2}$$

よって $dP_{\max}/dL_L=0$ より

$$\left[L_L\{1+(\omega C_0R_0)^2\}-C_0R_0^2\right]=0$$

$$L_{L,opt}=\frac{C_0R_0^2}{1+(\omega C_0R_0)^2}$$

これを前述の $P_{\max}$ の式に代入すると

$$P_{\max}=\frac{1}{2}\frac{R_0^2I_0^2}{R_0+\sqrt{R_0^2+\omega^2\left[C_0R_0^2-C_0R_0^2\right]^2}}=\frac{R_0I_0^2}{4} \qquad (2)$$