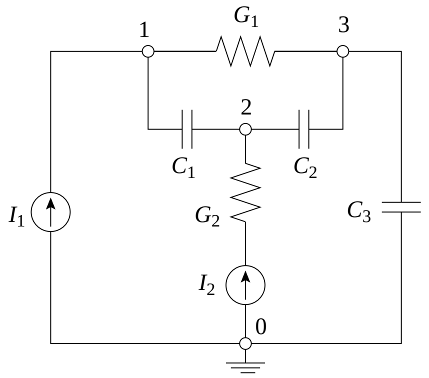
電気回路II宿題 (第4回)

課題1 下図の回路の節点方程式を立てよ (解かなくて良い).



解答

$G_2 = 0$ とすると (これに関しては，講義のときに説明します) 節点方程式は

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 + j\omega C_1 & -j\omega C_1 & -G_1 \\ -j\omega C_1 & j\omega(C_1 + C_2) & -j\omega C_2 \\ -G_1 & -j\omega C_2 & G_1 + j\omega(C_2 + C_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

課題2 下の節点方程式をを解き，V_3/V_0 を求めよ.

$$\begin{bmatrix} \frac{V_0}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} & -\frac{1}{j\omega L_1} & 0 \\ -\frac{1}{j\omega L_1} & j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_3} & -\frac{1}{j\omega L_3} \\ 0 & -\frac{1}{j\omega L_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

解答

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1}\right)\left(j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_3}\right)\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L_3}\right) \\ &\quad - \left(\frac{-1}{j\omega L_1}\right)^2\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L_3}\right) - \left(\frac{-1}{j\omega L_3}\right)^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1}\right) \\ &= -\frac{1}{\omega^2 L_1 L_3}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) + \frac{1}{j\omega}\left(\frac{1}{R_1 R_3 L_1} + \frac{1}{R_1 R_3 L_3} + \frac{1}{C_2 L_1 L_3}\right) \\ &\quad + C_2\left(\frac{1}{R_1 L_3} + \frac{1}{R_3 L_1}\right) + \frac{j\omega C_2}{R_1 R_3} \\ &= \frac{(R_1 + R_3) + j\omega(C_2 R_1 R_3 + L_1 + L_3) - \omega^2 C_2(R_1 L_3 + R_3 L_1) - j\omega^3 C_2 L_1 L_3}{-\omega^2 R_1 R_3 L_1 L_3} \end{aligned}$$

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} & -\frac{1}{j\omega L_1} & \frac{V_0}{R_1} \\ -\frac{1}{j\omega L_1} & j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{j\omega L_3} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{V_0}{R_1}\frac{-1}{j\omega L_1}\frac{-1}{j\omega L_3}}{\Delta} = \frac{\frac{R_3 V_0}{-\omega^2 R_1 R_3 L_1 L_3}}{\Delta}$$

よって

$$\frac{V_3}{V_0}=\frac{R_3}{(R_1+R_3)+j\omega(C_2R_1R_3+L_1+L_3)-\omega^2C_2(R_1L_3+R_3L_1)-j\omega^3C_2L_1L_3}$$

となり，教科書 137 ページの式 (8.41) に一致する．
宿題では V_2/V_1 としたが，この場合には

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{V_0}{R_1} & -\frac{1}{j\omega L_1} & 0 \\ 0 & j\omega C_2+\frac{1}{j\omega L_1}+\frac{1}{j\omega L_3} & -\frac{1}{j\omega L_3} \\ 0 & -\frac{1}{j\omega L_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{j\omega L_3} \end{vmatrix}}{\Delta} \\
&= \frac{V_0}{\Delta}\left(\frac{R_3+j\omega(L_1+L_3)-\omega^2R_3C_2L_1-j\omega^3C_2L_1L_3}{-\omega^2R_3L_1L_3}\right) \\
V_2 &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{j\omega L_1} & \frac{V_0}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{j\omega L_1} & 0 & -\frac{1}{j\omega L_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{j\omega L_3} \end{vmatrix}}{\Delta} \\
&= \frac{V_0}{\Delta}\left(\frac{R_3+j\omega L_3}{-\omega^2R_3L_1L_3}\right)
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{R_3+j\omega L_3}{R_3+j\omega(L_1+L_3)-\omega^2R_3C_2L_1-j\omega^3C_2L_1L_3}$$