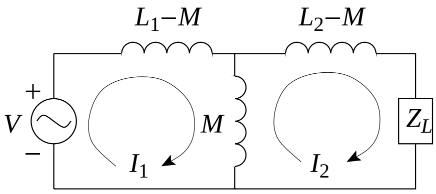
電気回路 II 宿題 (第１回)

課題１

下図の回路に対して閉路方程式を立て，電流 I_1，I_2 を求めよ．また，電源から右側を見込んだインピーダンス $Z_i = V/I_1$ を求め，

$$Z_i = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_L}$$

となることを確かめよ．



解答

各閉路に対する方程式は以下のように書ける

$$\begin{aligned}
\text{閉路１}:V &= j\omega(L_1 - M)I_1 + j\omega M(I_1 - I_2) \\
&= j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \\
\text{閉路２}:0 &= j\omega M(I_2 - I_1) + j\omega(L_2 - M)I_2 + Z_L I_2 \\
&= -j\omega M I_1 + (Z_L + j\omega L_2)I_2
\end{aligned}$$

行列の形にまとめると以下のように書ける

$$\begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & Z_L + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

閉路行列の行列式 Δ は以下のように書ける

$$\Delta = j\omega L_1(j\omega L_2 + Z_L) - (-j\omega M)^2 = j\omega L_1 Z_L - \omega^2(L_1 L_2 - M)^2$$

閉路電流 I_1，I_2 は Cramer の公式より以下のように求まる

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V & -j\omega M \\ 0 & j\omega L_2 + Z_L \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(j\omega L_2 + Z_L)V}{j\omega L_1 Z_L - \omega^2(L_1 L_2 - M)^2}$$

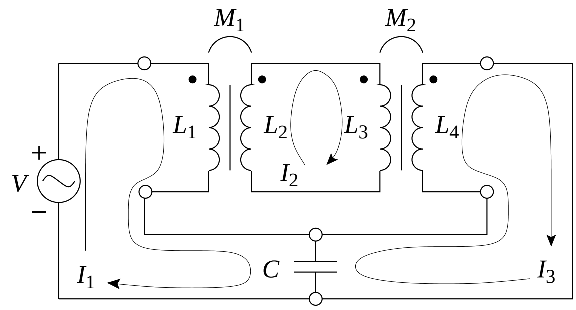
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} j\omega L_1 & V \\ -j\omega M & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{j\omega M V}{j\omega L_1 Z_L - \omega^2(L_1 L_2 - M^2)}$$

電源から右側を見たインピーダンス Z_i は

$$\begin{aligned}
Z_i &= \frac{V}{I_1} = \frac{j\omega L_1 Z_L - \omega^2(L_1 L_2 - M^2)}{(j\omega L_2 + Z_L)} = \frac{j\omega L_1(Z_L + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{(j\omega L_2 + Z_L)} \\
&= j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{(j\omega L_2 + Z_L)}
\end{aligned}$$

課題２

下図の回路に対して閉路方程式を立て，電流 $I_3 = 0$ となる周波数 f を求めよ．



解答

各閉路に対する方程式は以下のように書ける

$$\begin{aligned}
\text{閉路１}: V &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M_1(-I_2) + \frac{I_1 - I_3}{j\omega C} \\
&= \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}\right) I_1 - j\omega M_1 I_2 - \frac{I_3}{j\omega C} \\
\text{閉路２}: 0 &= j\omega L_2 I_2 + j\omega M_1(-I_1) + j\omega L_3 I_2 j\omega M_2(-I_3) \\
&= -j\omega M_1 I_1 + j\omega(L_2 + L_3) I_2 - j\omega M_2 I_3 \\
\text{閉路３}: 0 &= j\omega L_1 I_4 + j\omega M_2(-I_2) + \frac{I_3 - I_1}{j\omega C} \\
&= \frac{I_1}{j\omega C} - j\omega M_2 I_2 + \left(j\omega L_4 + \frac{1}{j\omega C}\right) I_1
\end{aligned}$$

行列の形にまとめると以下のように書ける

$$\begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} & -j\omega M_1 & -\frac{1}{j\omega C} \\ -j\omega M_1 & j\omega(L_2 + L_3) & -j\omega M_2 \\ -\frac{1}{j\omega C} & -j\omega M_2 & j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

閉路行列の行列式を Δ とすると，L_3 を流れる電流 I_3 は Cramer の公式より以下のように求まる

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{\begin{vmatrix} j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} & -j\omega M_1 & V \\ -j\omega M_1 & j\omega(L_2 + L_3) & 0 \\ -\frac{1}{j\omega C} & -j\omega M_2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(-j\omega M_1)(-j\omega M_2)V - j\omega(L_2 + L_3)\frac{-1}{j\omega C}V}{\Delta} \\
&= \frac{-\omega^2 M_1 M_2 C + (L_2 + L_3)}{C\Delta} V
\end{aligned}$$

$I_3 = 0$ となる角周波数 ω は，分子を 0 として

$$\omega = \sqrt{\frac{L_2 + L_3}{C M_1 M_2}} \tag{1}$$

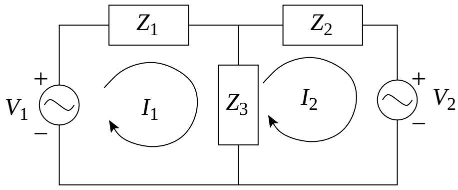
したがって求める周波数 f は

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_2 + L_3}{C M_1 M_2}} \tag{2}$$

次ページも見てください

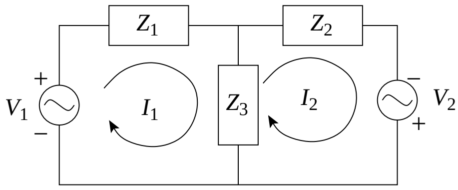
- 3×3 の行列の行列式の求め方について復習しておいてください
- 下図の回路の場合，閉路方程式が以下の式で与えられることを復習しておいてください．

回路 A)



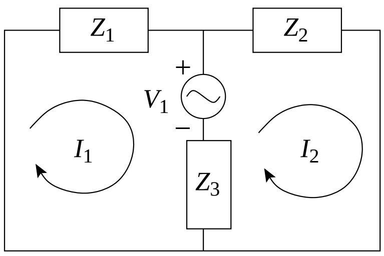
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

回路 B)



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

回路 C)



$$\begin{bmatrix} -V_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$