

3.4

抵抗 R_1 に流れる電流を $i(t)$ とすると

$$R_1 i(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} = E \quad (\text{左側の閉ループ})$$

$$R_2 i_R(t) - L \frac{di_L(t)}{dt} = 0 \quad (\text{右側の閉ループ})$$

$$i(t) = i_L(t) + i_R(t) \quad (\text{ある節点に流れ込む電流と流れ出す電流の和は0})$$

上式をラプラス変換すると以下ようになる .

$$R_1 I(s) + sL I_L(s) = \frac{E}{s} \quad (1)$$

$$R_2 I_R(s) - sL I_L(s) = 0 \quad (2)$$

$$I(s) = I_L(s) + I_R(s) \quad (3)$$

ここで、以下の関係式を用いた

$$\frac{di_L(t)}{dt} = sI_L(s) - i_L(0) \quad (\text{微分定理})$$

$$= sI_L(s) \quad (\text{初期条件より } t=0 \text{ で } i_L(0)=0)$$

$$\mathcal{L}\{Eu(t)\} = \mathcal{L}\{Eu(t)\} = E\mathcal{L}\{u(t)\} \quad (\text{電圧は } t \geq 0 \text{ でかかる, 加法定理})$$

$$= E \frac{1}{s} \quad (\text{ラプラス変換表より})$$

普通に連立方程式を解いても良いが、(1)~(3) を行列の形で書くと

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & sL \\ 0 & R_2 & -sL \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(s) \\ I_R(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E/s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

上式の左辺行列の行列式は

$$\begin{aligned} \Delta &= \{R_1 R_2 (-1) + 0 + 0\} - \{R_1 (-sL) (-1) + 0 + (sL) R_2\} = -R_1 R_2 - sL(R_1 + R_2) \\ &= -L(R_1 + R_2) \left(s + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \right) \\ &= -L(R_1 + R_2)(s + \alpha) \quad \left(\text{ただし } \alpha = \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \right) \end{aligned}$$

Cramer の公式より

$$I_R(s) = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & E/s & sL \\ 0 & 0 & -sL \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-EL}{-L(R_1 + R_2)(s + \alpha)} = \frac{E}{(R_1 + R_2)(s + \alpha)}$$

$$I_L(s) = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & 0 & E/s \\ 0 & R_2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{R_2 E/s}{-L(R_1 + R_2)(s + \alpha)} = \frac{R_2 E}{L(R_1 + R_2)s(s + \alpha)} = \frac{\alpha E}{R_1 s(s + \alpha)}$$

$I_R(s)$, $I_L(s)$ をラプラス逆変換すると .

$$i_R(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I_R(s)\} = \frac{E}{(R_1 + R_2)} e^{-\alpha t} \quad (\text{ラプラス変換表より})$$

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I_L(s)\} = sI_L(s)e^{st} \Big|_{s=0} + (s + \alpha)I_L(s)e^{st} \Big|_{s=-\alpha} \quad (\text{留数演算より}) \\ &= \frac{\alpha E}{R_1} \left[\frac{1}{s + \alpha} e^{st} \Big|_{s=0} + \frac{1}{s} e^{st} \Big|_{s=-\alpha} \right] = \frac{\alpha E}{R_1} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right) \\ &= \frac{E}{R_1} (1 - e^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

3.5

閉路方程式は以下のように表せる

$$\begin{aligned} Ri_1(t) + \frac{1}{C} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt &= Eu(t) \\ \frac{1}{C} \int (i_2(t) - i_1(t)) dt + Ri_2(t) + \frac{1}{C} \int (i_2(t) - i_3(t)) dt &= 0 \\ \frac{1}{C} \int (i_3(t) - i_2(t)) dt + Ri_3(t) &= 0 \end{aligned}$$

ここで、積分定理

$$\int i(t) dt = \frac{I(s)}{s} + \frac{1}{s} \int i(t) dt \Big|_{t=0} = \frac{I(s)}{s} + q(0) = \frac{I(s)}{s} \quad (\text{初期電荷は0としているので})$$

を用いると、閉路方程式のラプラス変換は

$$\begin{aligned} \left(R + \frac{1}{sC} \right) I_1(s) - \frac{1}{sC} I_2(s) &= \frac{E}{s} \\ -\frac{1}{sC} I_1(s) + \left(\frac{1}{sC} + R + \frac{1}{sC} \right) I_2(s) - \frac{1}{sC} I_3(s) &= 0 \\ -\frac{1}{sC} I_2(s) + \left(\frac{1}{sC} + R \right) I_3(s) &= 0 \end{aligned}$$

見やすくするために全ての式の両辺に s/R を乗じて行列形式で表すと

$$\begin{bmatrix} s + \alpha & -\alpha & 0 \\ -\alpha & s + 2\alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & s + \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E/R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left(\text{ここで } \alpha = \frac{1}{CR} \right)$$

上式の行列式は

$$\begin{aligned} \Delta &= (s + \alpha)^2 (s + 2\alpha) - 2\alpha^2 (s + \alpha) = (s + \alpha) \{ s^2 + 3\alpha s + 2\alpha^2 - 2\alpha^2 \} \\ &= (s + \alpha)(s^2 + 3\alpha s) = s(s + \alpha)(s + 3\alpha) \end{aligned}$$

Cramer の公式より

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} E/R & -\alpha & 0 \\ 0 & s + 2\alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & s + \alpha \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(s + \alpha)(s + 2\alpha)E/R - \alpha^2 E/R}{s(s + \alpha)(s + 3\alpha)} = \frac{E}{R} \frac{s^2 + 3\alpha s + \alpha^2}{s(s + \alpha)(s + 3\alpha)}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s + \alpha & E/R & 0 \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & s + \alpha \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\alpha(s + \alpha)E/R}{s(s + \alpha)(s + 3\alpha)} = \frac{\alpha E}{R} \frac{1}{s(s + 3\alpha)}$$

$$I_3(s) = \frac{\begin{vmatrix} s + \alpha & -\alpha & E/R \\ -\alpha & s + 2\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\alpha^2 E/R}{s(s + \alpha)(s + 3\alpha)} = \frac{\alpha^2 E}{R} \frac{1}{s(s + \alpha)(s + 3\alpha)}$$

$I_1(s)$, $I_2(s)$, $I_3(s)$ を留数演算を用いてラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I_1(s)\} = sI_1(s)e^{st} \Big|_{s=0} + (s + \alpha)I_1(s)e^{st} \Big|_{s=-\alpha} + (s + 3\alpha)I_1(s)e^{st} \Big|_{s=-3\alpha} \\ &= \frac{E}{R} \frac{s^2 + 3\alpha s + \alpha^2}{s(s + \alpha)(s + 3\alpha)} e^{st} \Big|_{s=0} + \frac{E}{R} \frac{s^2 + 3\alpha s + \alpha^2}{s(s + 3\alpha)} e^{st} \Big|_{s=-\alpha} + \frac{E}{R} \frac{s^2 + 3\alpha s + \alpha^2}{s(s + \alpha)} e^{st} \Big|_{s=-3\alpha} \\ &= \frac{E}{R} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} e^{-\alpha t} + \frac{1}{6} e^{-3\alpha t} \right) = \frac{E}{6R} (2 + 3e^{-\alpha t} + e^{-3\alpha t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I_2(s)\} = sI_2(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+3\alpha)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-3\alpha} \\
&= \frac{\alpha E}{R} \frac{1}{(s+3\alpha)} e^{st}\Big|_{s=0} + \frac{\alpha E}{R} \frac{1}{s} e^{st}\Big|_{s=-3\alpha} \\
&= \frac{\alpha E}{R} \left(\frac{1}{3\alpha} - \frac{1}{3\alpha} e^{-3\alpha t} \right) = \frac{E}{3R} (1 - e^{-3\alpha t})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_3(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I_3(s)\} = sI_3(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+\alpha)I_3(s)e^{st}\Big|_{s=-\alpha} + (s+3\alpha)I_3(s)e^{st}\Big|_{s=-3\alpha} \\
&= \frac{\alpha^2 E}{R} \frac{1}{(s+\alpha)(s+3\alpha)} e^{st}\Big|_{s=0} - \frac{\alpha^2 E}{R} \frac{1}{s(s+3\alpha)} e^{st}\Big|_{s=-\alpha} + \frac{\alpha^2 E}{R} \frac{1}{s(s+\alpha)} e^{st}\Big|_{s=-3\alpha} \\
&= \frac{\alpha^2 E}{R} \left(\frac{1}{3\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^2} e^{-\alpha t} + \frac{1}{6\alpha^2} e^{-3\alpha t} \right) = \frac{E}{6R} (2 - 3e^{-\alpha t} + e^{-3\alpha t})
\end{aligned}$$

3.6

回路に流れる電流を $i(t)$ とすると回路方程式は

$$\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e_s(t)$$

と与えられる．電圧源 $e_s(t)$ をラプラス変換すると

$$e_s(t) = \int_0^\infty e_s(t)e^{-st} dt = \int_0^T Ee^{-st} dt = \left[E \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^T = E \frac{e^{-Ts} - 1}{-s} = E \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

であるので，回路方程式のラプラス変換は

$$L\{sI(s) - i(0)\} + RI(s) = \frac{E}{s} (1 - e^{-Ts})$$

初期電流は 0 なので

$$sLI(s) + RI(s) = \frac{E}{s} (1 - e^{-Ts})$$

$I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{E}{s(sL + R)} (1 - e^{-Ts}) = F(s) (1 - e^{-Ts}) \quad \left(\text{ここで } F(s) = \frac{E/L}{s(s + R/L)} \right)$$

留数演算を用いて $F(s)$ のラプラス逆変換 $f(t)$ を求めると

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = sF(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s + R/L)F(s)e^{st}\Big|_{s=-R/L} \\ &= \frac{E/L}{(s + R/L)} e^{st}\Big|_{s=0} + \frac{E/L}{s} e^{st}\Big|_{s=-R/L} \\ &= E/R - E/Re^{-Rt/L} = \frac{E}{R} (1 - e^{-\alpha t}) u(t) \quad \left(\text{ここで } \alpha = \frac{R}{L} \right) \end{aligned}$$

したがって， $I(s)$ のラプラス逆変換は加法定理と推移定理を用いて

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} - \mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-Ts}\} \\ &= f(t) - f(t - T) \\ &= \frac{E}{R} (1 - e^{-\alpha t}) u(t) - \frac{E}{R} (1 - e^{-\alpha(t-T)}) u(t - T) \end{aligned}$$

以上より， $v_R(t)$ ， $v_L(t)$ は

$$v_R(t) = Ri(t) = E \left\{ (1 - e^{-\alpha t}) u(t) - (1 - e^{-\alpha(t-T)}) u(t - T) \right\}$$

$$v_L(t) = e_s(t) - Ri(t) = \{u(t) - u(t - T)\} - Ri(t) = E \left\{ e^{-\alpha t} u(t) - e^{-\alpha(t-T)} u(t - T) \right\}$$

いま， $L/R \gg T$ とすると

$$\begin{aligned} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e_s(t) &\rightarrow \frac{di(t)}{dt} + (L/R)^{-1} i(t) = e_s(t)/L \rightarrow \frac{di(t)}{dt} \simeq e_s(t)/L \\ \rightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int e_s(t) dt &\rightarrow v_R(t) = Ri(t) = \frac{R}{L} \int e_s(t) dt \end{aligned}$$

となり， $v_R(t)$ は $e_s(t)$ の積分に比例する．

一方， $L/R \ll T$ とすると

$$\begin{aligned} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e_s(t) &\rightarrow (L/R) \frac{di(t)}{dt} + i(t) = e_s(t)/R \rightarrow i(t) \simeq e_s(t)/R \\ \rightarrow v_L = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{L}{R} \frac{de_s(t)}{dt} \end{aligned}$$

となり， $v_L(t)$ は $e_s(t)$ の微分に比例する．

3.7

回路に流れる電流を $i(t)$ とすると，回路方程式は

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e_s(t) \quad \rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} + i(t) = e_s(t)$$

ここで，電源電圧のラプラス変換は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{e_s(t)\} &= \int_0^{\infty} e_s(t) dt = \int_0^1 t e^{-st} dt = \left[t \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{s} e^{-st} dt = -\frac{e^{-s}}{s} + \left[\frac{e^{-st}}{-s^2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1 - e^{-s}}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2} e^{-s} \end{aligned}$$

微分定理から

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{di(t)}{dt} \right\} = sI(s) - i(0) = sI(s) \quad (\text{初期電流は } 0)$$

の関係を利用して，回路方程式をラプラス変換すると

$$sI(s) + I(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2} e^{-s}$$

$I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} - \frac{1}{s^2} e^{-s}$$

ここで，留数演算を利用すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s+1)} \right\} &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} e^{st} \right) \Big|_{s=0} + \frac{1}{s^2} e^{st} \Big|_{s=-1} \\ &= \left(\frac{-1}{(s+1)^2} e^{st} + \frac{t}{s+1} e^{st} \right) \Big|_{s=0} + e^{-t} \\ &= -1 + t + e^{-t} = (-1 + t + e^{-t}) u(t) \end{aligned}$$

また，ラプラス変換表より

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = tu(t)$$

推移定理を用いると

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} e^{-s} \right\} = (t-1)u(t-1)$$

よって

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{I(s)\} = (-1 + t + e^{-t}) u(t) + (t-1)u(t-1) \\ &= (t-1)(u(t) - u(t-1)) + e^{-t}u(t) \end{aligned}$$