3.1

(1) $f(t) = e^{at}e^{j\omega t}$

ラプラス変換の定義より

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty e^{at}e^{j\omega t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(-s+a+j\omega)t}dt = \left[\frac{1}{-s+(a+j\omega)}e^{-st}e^{(a+j\omega)t}\right]_0^\infty = 0 - \frac{1}{-s+(a+j\omega)} \\
&= \frac{1}{s-(a+j\omega)}
\end{aligned}$$

(2) $f(t) = \sin\omega t$

ラプラス変換の定義より

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t dt = \left[\frac{1}{-s}e^{-st}\sin\omega t\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{-s}e^{-st}\omega\cos\omega t dt = 0 + \int_0^\infty \frac{\omega}{s}e^{-st}\cos\omega t dt \\
&= \left[\frac{\omega}{s}\left(\frac{1}{-s}\right)e^{-st}\cos\omega t\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\omega}{s}\left(\frac{1}{-s}\right)e^{-st}(-\omega)\sin\omega t dt \\
&= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t dt \\
&= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}F(s) \\
\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)F(s) &= \frac{\omega}{s^2} \\
F(s) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

(3) $f(t) = \sin\omega t$

ラプラス変換の定義より

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \cosh\omega t e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}e^{-st}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-(s-\omega)t}+e^{-(s+\omega)t}\right)dt \\
&= \left[-\frac{1}{s-\omega}e^{-(s-\omega)t} - \frac{1}{s+\omega}e^{-(s+\omega)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}+\frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-\omega^2} \\
&= \frac{s}{s^2-\omega^2}
\end{aligned}$$

3.2

(1)

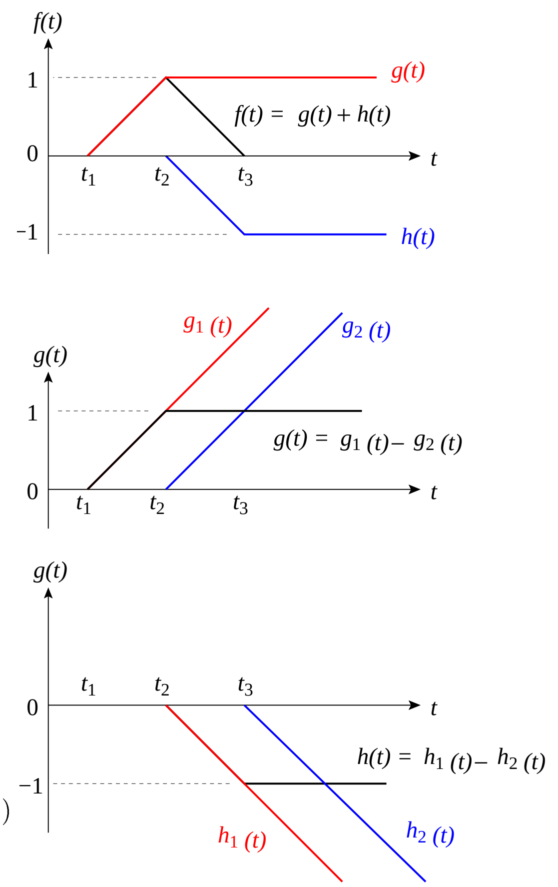
ラプラス変換の定義より計算すると

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t_2-t_1}(t-t_1)e^{-st}dt + \int_{t_2}^{t_3} \frac{1}{t_2-t_3}(t-t_3)e^{-st}dt \\
&= \left[\frac{1}{-s(t_2-t_1)}(t-t_1)e^{-st}\right]_{t_1}^{t_2} + \frac{1}{s(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2} e^{-st}dt \\
&\quad + \left[\frac{1}{-s(t_2-t_3)}(t-t_3)e^{-st}\right]_{t_2}^{t_3} + \frac{1}{s(t_2-t_3)}\int_{t_2}^{t_3} e^{-st}dt \\
&= -\frac{1}{s}e^{-st_2} + \left[\frac{-1}{s^2(t_2-t_1)}e^{-st}\right]_{t_1}^{t_2} + \frac{1}{s}e^{-st_2} + \left[\frac{-1}{s^2(t_2-t_3)}e^{-st}\right]_{t_2}^{t_3} \\
&= \frac{1}{s^2(t_2-t_1)}\left(e^{-st_1}-e^{-st_2}\right) + \frac{1}{s^2(t_2-t_3)}\left(e^{-st_2}-e^{-st_3}\right) \\
&= \frac{1}{s^2(t_2-t_1)}\left(e^{-st_1}-e^{-st_2}\right) - \frac{1}{s^2(t_3-t_2)}\left(e^{-st_2}-e^{-st_3}\right)
\end{aligned}
$$

ラプラス変換に関する定理を使うと

右図より

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= \frac{1}{t_2-t_1}(t-t_1)u(t-t_1) \\
g_2(t) &= \frac{1}{t_2-t_1}(t-t_2)u(t-t_2) \\
h_1(t) &= -\frac{1}{t_3-t_2}(t-t_2)u(t-t_2) \\
h_2(t) &= -\frac{1}{t_3-t_2}(t-t_3)u(t-t_3)
\end{aligned}
$$



以下の関係式

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s} \quad \text{(ラプラス変換表参照)}$$

$$f(t-a) = e^{-as}F(s) \quad \text{(推移定理)}$$

を使うと，それぞれのラプラス変換は

$$
\begin{aligned}
G_1(s) &= \frac{1}{t_2-t_1}\frac{e^{-t_1s}}{s} \\
G_2(s) &= \frac{1}{t_2-t_1}\frac{e^{-t_2s}}{s} \\
H_1(s) &= -\frac{1}{t_3-t_2}\frac{e^{-t_2s}}{s} \\
H_2(s) &= -\frac{1}{t_3-t_2}\frac{e^{-t_3s}}{s}
\end{aligned}
$$

したがって，$f(t) = g(t) + h(t) = (g_1(t) - g_2(t)) + (h_1(t) - h_2(t))$ のラプラス変換は，加法定理より

$$F(s) = \frac{1}{t_2-t_1}\frac{e^{-t_1s}-e^{-t_2s}}{s} - \frac{1}{t_3-t_2}\frac{e^{-t_2s}-e^{-t_3s}}{s}$$

3.2

(2)

$0 < t < T$ の範囲の関数を $f_1(t)$ とすると，$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + \cdots$ と書ける．
$f_1(t)$ のラプラス変換は定義式より

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_0^T \frac{t}{T} e^{-st} dt = \left[\frac{t}{-sT} e^{-st} \right]_0^T + \int_0^\infty \frac{1}{sT} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-sT} + \left[\frac{1}{-s^2 T} e^{-st} \right]_0^T \\ &= -\frac{1}{s} e^{-sT} - \frac{1}{s^2 T} \left(e^{-sT} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{s^2 T} \left(1 - e^{-sT} \right) - \frac{1}{s} e^{-sT} \end{aligned}$$

一方，$f(t)$ のラプラス変換は，加法定理と推移定理より

$$\begin{aligned} F(s) &= F_1(s) + F_1(s) e^{-Ts} + F_1(s) e^{-2Ts} + F_1(s) e^{-3Ts} + \cdots \\ &= F_1(s)(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \cdots) \end{aligned}$$

無限等比級数の和の公式を用いると

$$F(s) = F_1(s) \frac{1}{1 - e^{-Ts}} = \frac{1}{s^2 T} - \frac{1}{s} \frac{e^{-sT}}{1 - e^{-sT}}$$

3.3

(1) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$

留数定理を用いると，$s = 0, -a, -b$ でそれぞれ 1 位の極となるので

$$\begin{aligned} F(s) &= \left.\frac{1}{(s+a)(s+b)}e^{st}\right|_{s=0} + \left.\frac{1}{s(s+b)}e^{st}\right|_{s=-a} + \left.\frac{1}{s(s+a)}e^{st}\right|_{s=-b} \\ &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}e^{-at} - \frac{1}{b(a-b)}e^{-bt} \\ &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{a-b}\left(\frac{e^{-at}}{a} - \frac{e^{-bt}}{b}\right) \end{aligned}$$

(2) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s+1)}$

留数定理を用いると，$s = 0$ で 2 位の極，$s = -1$ で 1 位の極となるので

$$\begin{aligned} F(s) &= \left.\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}e^{st}\right)\right|_{s=0} + \left.\frac{1}{s^2}e^{st}\right|_{s=-1} \\ &= \left.\left(\frac{-1}{(s+1)^2}e^{st} + \frac{t}{s+1}e^{st}\right)\right|_{s=0} + e^{-t} \\ &= -1 + t + e^{-t} \end{aligned}$$

(3) $F(s) = \dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$

$F(s)$ を以下のように変形する

$$F(s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha+j\omega)(s+\alpha-j\omega)}$$

$F(s)$ は $s = -\alpha \pm j\omega$ にそれぞれ 1 位の極を持つので

$$\begin{aligned} F(s) &= \left.\frac{s+\alpha}{s+\alpha+j\omega}e^{st}\right|_{s=-\alpha+j\omega} + \left.\frac{s+\alpha}{s+\alpha-j\omega}e^{st}\right|_{s=-\alpha-j\omega} \\ &= \frac{j\omega}{j2\omega}e^{(-\alpha+j\omega)t} + \frac{-j\omega}{-j2\omega}e^{(-\alpha-j\omega)t} \\ &= e^{-\alpha t}\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\ &= e^{-\alpha t}\cos\omega t \end{aligned}$$