2.7

図のLC直列回路の回路方程式は，回路に流れる電流を $i(t)$，コンデンサの電荷を $q(t)$ として，$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ の関係を用いると

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = E$$

で与えられる．

定常解 $q_s(t)$ と 過渡解 $q_t(t)$ に分けて考えると，定常解に対する解は(直流電源なので $d/dt \rightarrow 0$) として，

$$\frac{q_s(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad q_s(t) = CE$$

と求まる．

過渡解 $q_t(t)$ は，回路方程式の右辺を $E=0$ とした

$$L\frac{d^2q_t(t)}{dt^2} + \frac{q_t(t)}{C} = 0$$

の解を求める．上式の特性方程式は

$$Lm^2 + \frac{1}{C} = 0$$

であり，その根は

$$m = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_0, \quad \left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$$

であるので，以下の解を得る

$$q_t(t) = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t, \quad (A_1, A_2\text{は積分定数})$$

したがって，一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = CE + A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t$$

と求まる．また，回路に流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\omega_0 A_1\sin\omega_0 t + \omega_0 A_2\cos\omega_0 t$$

である．

次に，**初期条件**を考慮して，積分定数 A_1, A_2 を決定する．$t=0$ での初期条件は，$q(t)=0$ と $i(t) = dq(t)/dt = 0$ であるので．積分定数は A_1, A_2 は以下のように求まる

$$\begin{aligned} q(0) &= CE + A_1 = 0 \quad \rightarrow \quad A_1 = -CE \\ i(0) &= \omega_0 A_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_2 = 0 \end{aligned}$$

よって，求める解は

$$q(t) = CE - CE\cos\omega_0 t = CE\left(1 - \cos\omega_0 t\right)$$

と求まる．また，回路に流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \omega_0 CE\sin\omega_0 t = \frac{1}{\sqrt{LC}}CE\sin\omega_0 t = E\frac{C}{\sqrt{L}}\sin\omega_0 t$$

である．ここに $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ である．

2.8

RLC 直列回路の回路方程式は回路に流れる電流を $i(t)$，コンデンサの電荷を $q(t)$ として，$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ の関係を用いると

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

で与えられる．各素子値を上式に代入すると，以下の式を得る．

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 3\frac{dq(t)}{dt} + 2q(t) = 10$$

定常解 $q_s(t)$ と 過渡解 $q_t(t)$ に分けて考えると，定常解に対する解は (直流電源なので $d/dt \rightarrow 0$) として，

$$2q_s(t) = 10 \quad \rightarrow \quad q_s(t) = 5$$

と求まる．

過渡解 $q_t(t)$ は，回路方程式の右辺を $E = 0$ とした

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 3\frac{dq(t)}{dt} + 2q(t) = 0$$

の解を求める．上式の特性方程式は

$$m^2 + 3m + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (m+1)(m+2) = 0$$

であり，その根は $m = -1, -2$ であるので，以下の解を得る

$$q_t(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t} \quad (A_1, A_2 \text{は積分定数})$$

したがって，一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 5 + A_1e^{-t} + A_2e^{-2t}$$

と求まる．また，回路に流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -A_1e^{-t} - 2A_2e^{-2t}$$

である．

次に，**初期条件**を考慮して，積分定数 A_1, A_2 を決定する．$t = 0$ での初期条件は，$q(t) = 0$ と $i(t) = dq(t)/dt = 0$ であるので．以下の連立方程式を得る．

$$\begin{aligned} q(0) &= 5 + A_1 + A_2 = 0 \quad \cdots (A) \\ i(0) &= -A_1 - 2A_2 = 0 \quad \cdots (B) \end{aligned}$$

(B) 式より

$$A_1 = -2A_2 \quad \cdots (C)$$

であるので，これを (A) 式に代入すると

$$5 - 2A_2 + A_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_2 = 5$$

と求まり，これを (C) 式に代入すると

$$A_1 = -2A_2 = -10$$

である．

よって，求める解 $i(t)$ は

$$i(t) = -A_1e^{-t} - 2A_2e^{-2t} = 10e^{-t} - 10e^{-2t} = 10\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)$$

と求まる．

RLC 直列回路の一般的な解

RLC 直列回路の回路方程式は回路に流れる電流を $i(t)$，コンデンサの電荷を $q(t)$ として，$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ の関係を用いると

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{q(t)}{C}=E \qquad \rightarrow \qquad L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=E$$

で与えられる．

定常解 $q_s(t)$ と 過渡解 $q_t(t)$ に分けて考えると，定常解に対する解は (直流電源なので $d/dt \rightarrow 0$) として，

$$\frac{q_s(t)}{C}=E \qquad \rightarrow \qquad q_s(t)=CE$$

と求まる．

過渡解 $q_t(t)$ は，回路方程式の右辺を $E=0$ とした

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=0$$

の解を求める．いま，上式の解を $q(t)=Ae^{mt}$ と仮定すると

$$\begin{aligned}\frac{dq(t)}{dt} &= A\frac{d}{dt}\left(e^{mt}\right)=mAe^{mt}\\ \frac{d^2q(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)=mA\frac{d}{dt}\left(e^{mt}\right)=m^2Ae^{mt}\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}&Lm^2Ae^{mt}+RmAe^{mt}+\frac{1}{C}Ae^{mt}=0\\ &\left(Lm^2+Rm+\frac{1}{C}\right)Ae^{mt}=0\end{aligned}$$

$Ae^{mt}\neq=0$ であるので，以下の式を得る．

$$Lm^2+Rm+\frac{1}{C}=0$$

上式は**特性方程式**と呼ばれる．上式は 2 次方程式であり，以下の 3 種類の解を持つ

1. 相異なる 2 つの実数解 (これを $m=m_1,m_2$ とする)

$$q_t(t)=A_1e^{m_1t}+A_2e^{m_2t}$$

2. 重解 (これを $m=m_1=m_2$ とする)

$$q_t(t)=\left(A_1+A_2t\right)e^{mt}$$

3. 相異なる 2 つの複素数解 (これを $m=\lambda\pm j\mu$ とする)

$$q_t(t)=\left(A_1\cos\mu t+A_2\sin\mu t\right)e^{\lambda t}$$

ここに A_1,A_2 は積分定数である．また，m の解の具体的な形は，2 次方程式の解の公式より

$$m=-\frac{R\pm\sqrt{R^2-4(L/C)}}{2L}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

ここに

$$\begin{aligned}\alpha=\frac{R}{2L} &\quad : \quad \text{減衰定数}\\ \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} &\quad : \quad \text{固有角振動数}\end{aligned}$$

である．

以下，初期条件を考慮して，3 種類のそれぞれの解に対して，電荷 $q(t)$ と 電流 $i(t)$ の一般解を求める．初期条件としては $t=0$ で $q(0)=0$，$i(0)=0$ とする．

1. m が相異なる 2 つの実数解を持つ場合 (過制動)

$\alpha > \omega_0$ の場合であり，$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ とすると

$$q(t) = CE + A_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + A_2 e^{(-\alpha-\beta)t} = CE + e^{-\alpha t}\left(A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}\right)$$

ここで，以下の関係式

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \qquad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

を用いて，$q(t)$ を以下のように表記し直す

$$q(t) = CE + Be^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \phi)$$

ここに B と ϕ は初期条件により決まる定数である．$i(t)$ は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = -\alpha Be^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \phi) + Be^{-\alpha t}\beta\cosh(\beta t + \phi) \\ &= Be^{-\alpha t}\left(-\alpha\sinh(\beta t + \phi) + \beta\cosh(\beta t + \phi)\right) \end{aligned}$$

なお，この導出には以下の関係式を用いた

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)g(t)\right) = \frac{df(t)}{dt}g(t) + f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\cosh t\right) = \sinh t$$
$$\frac{d}{dt}\left(\sinh t\right) = \cosh t$$

初期条件より以下の連立方程式を得る

$$q(0) = CE + B\sinh\phi = 0$$
$$i(0) = B(-\alpha\sinh\phi + \beta\cosh\phi)\sinh\phi = 0$$

上式を解くと，

$$-\alpha\sinh\phi + \beta\cosh\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \rightarrow \quad \tanh\phi = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{1}{\cosh^2\phi} = 1 - \tanh^2\phi \quad \rightarrow \quad \cosh\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\phi}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

$$\sinh\phi = \cosh\phi\tanh\phi = \frac{\beta}{\omega_0}$$

$$B = -\frac{CE}{\sinh\phi} = -CE\frac{\omega_0}{\beta}$$

したがって

$$q(t) = CE\left(1 - \frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \phi)\right)$$

$$\begin{aligned} i(t) &= -CE\frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\left(-\alpha\sinh(\beta t + \phi) + \beta\cosh(\beta t + \phi)\right) \\ &= -CE\frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\left[-\alpha\left(\sinh\beta t\cosh\phi + \cosh\beta\sinh\phi\right) + \beta\left(\cosh\beta t\cosh\phi + \sinh\beta\sinh\phi\right)\right] \\ &= -CE\frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\left[-\alpha\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\sinh\beta t + \frac{\beta}{\omega_0}\cosh\beta t\right) + \beta\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\cosh\beta t + \frac{\beta}{\omega_0}\sinh\beta t\right)\right] \\ &= -CE\frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\omega_0}\sinh\beta t \\ &= CE\frac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t}\sinh\beta t = \frac{E}{\beta L}e^{-\alpha t}\sinh\beta t \end{aligned}$$

前ページの式変形には，以下の公式を用いた

$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta \pm \sinh\alpha\sinh\beta$$
$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta$$

ここで，三角関数と双曲線関数の関係について示しておく．$x = jx'$ とすると

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \frac{e^{x'} - e^{-x'}}{2j} = -j\sinh x'$$
$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \frac{e^{x'} + e^{-x'}}{2} = \cosh x'$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-j\sinh x'}{\cosh x'} = -j\tanh x'$$

したがって，三角関数の公式から双曲線関数の公式を導出できる．
加法定理は以下のようになる

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\rightarrow \quad -j\sinh(\alpha' \pm \beta') = -j\sinh\alpha'\cosh\beta' \pm \cosh\alpha'(-j\sinh\beta')$$
$$\rightarrow \quad \sinh(\alpha' \pm \beta') = \sinh\alpha'\cosh\beta' \pm \cosh\alpha'\sinh\beta'$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\rightarrow \quad \cosh(\alpha' \pm \beta') = \cosh\alpha'\cosh\beta' \mp (-j\cosh\alpha')(-j\sinh\beta')$$
$$\rightarrow \quad \cosh(\alpha' \pm \beta') = \cosh\alpha'\cosh\beta' \pm \sinh\alpha'\sinh\beta'$$

また，他の公式も

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\rightarrow \quad (\cosh x')^2 + (-j\sinh x')^2 = 1$$
$$\rightarrow \quad \cosh^2 x' - \sinh^2 x' = 1$$

などと求めることができる．

また，以下の関係も成り立つ

$$\sinh(jx) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2} = j\sin x$$
$$\cosh(jx) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x$$
$$\tanh(jx) = \frac{j\sin x}{\cos x} = j\tan x$$

この関係を使うと，特性方程式が異なる 2 つの複素数解を持つ 3 の結果は，既に求めた，特性方程式が異なる 2 つの実数解を持つ 1 の結果を変形することで求められる．

3．m が相異なる 2 つの複素数解を持つ場合 (減衰振動)

$\alpha < \omega_0$ の場合，$m = -\alpha \pm \beta = -\alpha \pm j\omega$ と書ける．すなわち，1 の解で $\beta = j\omega$ と置くと，以下の解が容易に求まる．

$$\begin{aligned} q(t) &= CE\left[1 - e^{-\alpha t}\frac{\omega_0}{j\omega}\sinh(j\omega t + \phi)\right] = CE\left[1 - e^{-\alpha t}\frac{\omega_0}{j\omega}\cdot j\sin\left(\omega t + \phi'\right)\right] \\ &= CE\left[1 - e^{-\alpha t}\frac{\omega_0}{\omega}\sin\left(\omega t + \phi'\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{j\omega L}e^{-\alpha t}\sinh(j\omega t) = \frac{E}{j\omega L}e^{-\alpha t}\cdot j\sin(\omega t) \\ &= \frac{E}{\omega L}e^{-\alpha t}\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{1}$$

ただし

$$\omega = -j\beta = -j\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\begin{aligned} &\tanh\phi = \frac{\beta}{\alpha} \\ &\quad \to \quad \tanh j\phi' = \frac{j\omega}{\alpha} \\ &\quad \to \quad j\tan\phi' = \frac{j\omega}{\alpha} \\ &\quad \to \quad \tan\phi' = \frac{\omega}{\alpha} \end{aligned}$$

2. m が重解を持つ場合 (臨界制動)

$\alpha = \omega_0$ の場合であり $m = -\alpha$ となるので

$$q(t) = CE + (A_1 + A_2 t)\, e^{-\alpha t}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = [A_2 - \alpha(A_1 + A_2 t)]\, e^{-\alpha t}$$

$t = 0$ で $q(0) = 0$ と $i(0) = 0$ を用いると

$$\begin{aligned} q(0) &= CE + A_1 = 0 \\ i(0) &= A_2 - \alpha A_1 = 0 \end{aligned}$$

これを解くと

$$A_1 = -CE, \quad A_2 = \alpha A_1 = -\alpha CE$$

したがって，求める解は

$$q(t) = CE + (-CE + -\alpha CEt)\, e^{-\alpha t} = CE\left[1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}\right]$$

$$\begin{aligned} i(t) &= [-\alpha CE - \alpha(-CE - \alpha CEt)]\, e^{-\alpha t} \\ &= \left[\alpha^2 CEt\right] e^{-\alpha t} \\ &= \left[\omega_0^2 CEt\right] e^{-\alpha t} \\ &= \left[\frac{1}{LC} CEt\right] e^{-\alpha t} \\ &= \frac{E}{L} t e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

1. m が相異なる 2 つの実数解を持つ場合 (過制動)
(別解 (指数関数のまま解いてから双曲線関数にする))

電荷 $q(t)$ と電流 $i(t)$ の一般解はもともと以下のように書けていた

$$\begin{aligned}
q(t) &= CE + A_1 e^{m_1 t} + A_2 e^{m_2 t} = CE + A_1 e^{-(\alpha+\beta)t} + A_2 e^{-(\alpha-\beta)t} \\
i(t) &= m_1 A_1 e^{m_1 t} + m_2 A_2 e^{m_2 t} = -(\alpha+\beta) A_1 e^{-(\alpha+\beta)t} - (\alpha-\beta) A_2 e^{-(\alpha-\beta)t}
\end{aligned}$$

ここに $m_1 = -\alpha - \beta$, $m_2 = -\alpha + \beta$ である．
$t = 0$ での初期条件 $q(0) = 0$, $i(0) = 0$ より．

$$\begin{aligned}
q(t) &= CE + A_1 + A_2 = 0 \\
i(t) &= -(\alpha+\beta) A_1 - (\alpha-\beta) A_2 = 0
\end{aligned}$$

これを行列の形で表現すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -(\alpha+\beta) & -(\alpha-\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -CE \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

左辺の行列の逆行列を求めて上式を解くと

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\beta} \begin{bmatrix} -(\alpha-\beta) & -1 \\ \alpha+\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -CE \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{CE}{2\beta} \begin{bmatrix} (\alpha-\beta) \\ -(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \tag{3}$$

よって，求める解は

$$\begin{aligned}
q(t) &= CE \left[1 + \frac{1}{2\beta} \left\{ (\alpha-\beta) e^{-(\alpha+\beta)t} - (\alpha+\beta) e^{-(\alpha-\beta)t} \right\} \right] \\
&= CE \left[1 - \frac{1}{2\beta} e^{-\alpha t} \left\{ \alpha \left(e^{\beta t} - e^{-\beta t} \right) + \beta \left(e^{\beta t} + e^{-\beta t} \right) \right\} \right] \\
&= CE \left[1 - \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \left(\alpha \sinh \beta t + \beta \cosh \beta t \right) \right] \\
&= CE \left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \sinh \beta t + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \cosh \beta t \right) \right] \\
&= CE \left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \left(\sinh \beta t \cosh \phi + \cosh \beta t \sinh \phi \right) \right], \qquad \left(\tanh \phi = \frac{\beta}{\alpha} \right) \\
&= CE \left[1 - \frac{\omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \sinh(\beta t + \phi) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{CE}{2\beta} \left[-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) e^{-(\alpha+\beta)t} + (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) e^{-(\alpha-\beta)t} \right] \\
&= \frac{CE}{2\beta} e^{-\alpha t} \left[\left(\alpha^2 - \beta^2 \right) \left(e^{\beta t} - e^{-\beta t} \right) \right] \\
&= \frac{CE}{\beta} e^{-\alpha t} \omega_0^2 \sinh \beta t \\
&= \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha t} \sinh \beta t
\end{aligned} \tag{4}$$