2.5
講義ノートより，$t = t_0$ で RC 直列回路に直流電圧 E を印加したときの過渡現象は，コンデンサの初期電荷を q_0 として以下のように書ける．(**講義ノートをよく見直してください**)

$$q(t) = CE + (q_0 - CE)\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)$$
$$i(t) = \frac{q(t)}{dt} = \frac{E - q_0/C}{R}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)$$
$$v_R(t) = Ri(t) = (E - q_0/C)\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) = \{E - v_C(t_0)\}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)$$
$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C} = E + (q_0/C - E)\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) = E + \{v_C(t_0) - E\}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)$$

また，この回路の時定数は $\tau = RC = (1\times 10^3)\times(10\times 10^-6) = 10\times 10^{-3}\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{ms}$ である．

(1)
$0 \le t \le 50$ ms の間の解は (初期条件：$t = 0$ ms で $q_0 = 0$)

$$v_R(t) = E\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = 10\exp(-100t) \qquad (t \text{ の単位は s とする})$$
$$v_C(t) = E\left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right\} = 10\{1 - \exp(-100t)\}$$

また，$t = 50$ ms のとき

$$v_C(t = 50\times 10^{-3}) = 10\left\{1 - \exp\left(-50\times 10^{-3}/100\right)\right\} = 10(1 - e^{-5})$$

$t \ge 50$ ms の解は

$$\begin{aligned}
v_R(t) &= \{0 - v_C(t_0)\}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) = -10(1-e^{-5})\exp\left(-100(t - 50\times 10^{-3})\right)\\
&= -10(1-e^{-5})\exp(-(100t-5))\\
v_C(t) &= 0 + \{v_C(t_0) - 0\}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)\\
&= 10(1-e^{-5})\exp(-(100t-5))
\end{aligned}$$

グラフは教科書を参照してください．

(2)
$0 \le t \le 10$ ms の間の解は (1) と同じ．
$t = 10$ ms のとき

$$v_C(t = 10\times 10^{-3}) = 10\left\{1 - \exp\left(-10\times 10^{-3}/100\right)\right\} = 10(1 - e^{-1})$$

$t \ge 10$ ms の解は

$$\begin{aligned}
v_R(t) &= \{0 - v_C(t_0)\}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) = -10(1-e^{-1})\exp\left(-100(t - 10\times 10^{-3})\right)\\
&= -10(1-e^{-1})\exp(-(100t-1))\\
v_C(t) &= 0 + \{v_C(t_0) - 0\}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)\\
&= -10(1-e^{-1})\exp(-(100t-1))
\end{aligned}$$

グラフは教科書を参照してください．

2.6

キルヒホッフの電圧則より回路方程式は以下のように与えられる．

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

$i(t) = dq(t)/dt$ (単位時間にコンデンサに蓄えられる電荷は回路に流れた電流に等しい) とうい関係式を用いると以下の式を得る．

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

定常解 $q_s(t)$ および過渡解 $q_t(t)$ の満たす微分方程式は

$$R\frac{dq_s(t)}{dt} + \frac{q_s(t)}{C} = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$R\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0$$

である．(実際に $q(t) = q_s(t) + q_t(t)$ が回路方程式を満足することが確かめられる) まず，定常解について解く．定常状態に対する解は交流回路理論を用いると，$d/dt \to j\omega$ として

$$j\omega R Q_s + \frac{Q_s}{C} = E_m e^{j\theta}$$

上式を Q_s について解くと以下のように求まる．

$$Q_s = \frac{CE_m e^{j\theta}}{1 + j\omega CR} = CE_m e^{j\theta}\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}e^{-j\phi'} = \frac{CE_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}e^{j(\theta-\phi')}$$
$$\left(\phi' = \tan^{-1}(\omega CR)\right)$$

以上より，定常解は

$$q_s(t) = Q_m \sin(\omega t + \theta - \phi') \qquad \left(Q_m = \frac{CE_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\right)$$

と求まる．

一方，過渡解に対する回路方程式は直流電源を接続した場合の式と同じで，その一般解は

$$q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{CR}} \qquad (A\ :\ 積分定数)$$

である．したがて，電荷 $q(t)$ の一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = Q_m \sin(\omega t + \theta - \phi') + Ae^{-\frac{t}{CR}}$$

で与えられる．初期条件として $t = 0$ で $q(t = 0) = 0$ を代入すると

$$q(0) = Q_m \sin(\theta - \phi') + A = 0 \qquad \to \qquad A = -Q_m \sin(\theta - \phi')$$

のように A が求まる．したがって，電荷の時間変化 $q(t)$ は

$$\begin{aligned} q(t) &= Q_m \sin(\omega t + \theta - \phi') - Q_m \sin(\theta - \phi')e^{-\frac{t}{CR}} \\ &= Q_m \left\{\sin(\omega t + \theta - \phi') - \sin(\theta - \phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\} \end{aligned}$$

と求まり，回路に流れる電流 $i(t)$ は

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = Q_m \left\{\omega \cos(\omega t + \theta - \phi') + \frac{1}{CR}\sin(\theta - \phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\} \\ &= \frac{E_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\left\{\omega C \cos(\omega t + \theta - \phi') + \frac{1}{R}\sin(\theta - \phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\}, \qquad \left(\phi' = \tan^{-1}(\omega CR)\right) \end{aligned}$$

となる．教科書の解にするためにはさらに以下の変形を行う

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{E_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\left\{\omega C\cos(\omega t+\theta-\phi')+\frac{1}{R}\sin(\theta-\phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\}\\
&= \frac{E_m}{\sqrt{1/(\omega C)^2+R^2}}\left\{\cos(\omega t+\theta-\phi')+\frac{1}{\omega CR}\sin(\theta-\phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\}\\
&= \frac{E_m}{\sqrt{R^2+1/(\omega C)^2}}\left\{\cos(\omega t+\theta-\phi')+\frac{1}{\tan\phi'}\sin(\theta-\phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$\tan\phi = \dfrac{1}{\omega CR}$ とおくと，以下の関係が成り立つ $(\tan\phi' = \omega CR)$

$$
\begin{aligned}
&\tan\phi\cdot\tan\phi' = 1\\
&\phi+\phi' = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

上式を用いて $i(t)$ の式を変形すると

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{E_m}{\sqrt{R^2+1/(\omega C)^2}}\left\{\cos(\omega t+\theta-\pi/2+\phi)+\tan\phi\sin(\theta-\pi/2+\phi)e^{-\frac{t}{CR}}\right\}\\
&= \frac{E_m}{\sqrt{R^2+1/(\omega C)^2}}\left\{\cos(\pi/2-(\omega t+\theta+\phi))-\tan\phi\sin(\pi/2-(\theta+\phi))e^{-\frac{t}{CR}}\right\}\\
&= \frac{E_m}{\sqrt{R^2+1/(\omega C)^2}}\left\{\sin(\omega t+\theta+\phi)-\tan\phi\cos(\theta+\phi)e^{-\frac{t}{CR}}\right\}
\end{aligned}
$$

なお，上式の変形には以下の三角関数の関係式を用いた

$$
\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin x\\
\cos(-x) &= \cos x\\
\sin(\pi/2-x) &= \cos x\\
\cos(\pi/2-x) &= \sin x
\end{aligned}
$$

質問に対する回答

問 5

- **回路方程式の立て方がわからない**

キルヒホッフの電圧則を適用する．下図の回路で各部の電圧は以下の通りである．

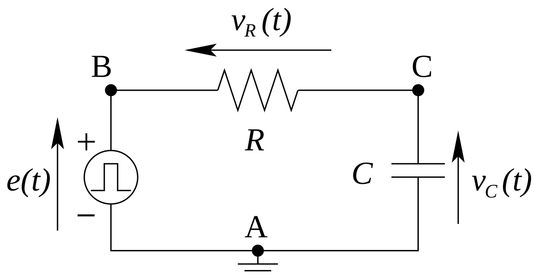
電源電圧：	$e(t)$
抵抗での電圧降下：	$v_R(t) = Ri(t)$
コンデンサでの電圧降下：	$v_C(t) = q(t)/C$

したがって，回路方程式は

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = e(t)$$

となる．下図の回路の各点の電位は以下のように表せる．
(矢印の矢の方が電位が高いことを表している，アース点の電位は 0 V)

A：	0		
B：	$e(t)$	or	$v_C(t) + v_R(t)$
C：	$e(t) - v_R(t)$	or	$v_C(t)$



- **最初の $q(t)$ の出し方がノートを見てもわからなかった．だから以下の $i(t)$，$v_R(t)$，$v_C(t)$ もわからずつまらなかった．**

おそらく，ノートの参照する場所を間違えているのではないかと思います．交流回路の過渡現象ではなく，直流回路の過渡現象の一般解を参照してください．電源電圧は時間的に変化しますが，時間を区切って見れば，その範囲では電圧は一定なので直流の過渡現象を，繋ぎ合わせることで方形波パルスの過渡現象を解くことができます．

- **$t = 50$ ms の以下の式で，$v_R(t)$ はいらないのか？ 分母の 100 はおかしくないか？**

$$v_C(t = 50 \times 10^{-3}) = 10 \left\{1 - \exp\left(-50 \times 10^{-3}/100\right)\right\} = 10(1 - e^{-5})$$

$v_C(t = 50 \times 10^3)$ の値を求めたのは，$t \geq 50$ ms の解を出すために必要だったからです．この値を問うてはいないので，$v_R(t = 50 \times 10^3)$ の値は必ずしも求める必要はありませんが，グラフを書く際にはあった方が良いと思います．

$\exp\left(-50 \times 10^{-3}/100\right)$ の部分は $\exp\left(-50 \times 10^{-3} \times 100\right)$ の間違いでした．申し訳ないです．

- **パルス幅と単一方形パルス電圧の意味がわかりません**

単一方形パルス電圧は，図 2.16(a) のように，一定時間 (0¡t¡T) だけ一定の電圧を示すもので，このときの時間間隔 T がこのパルスのパルス幅になります．ちなみに，繰り返し方形波は図 3.14(b) に示されています．

- **以下の微分はどうすればよいのかわからない**

$$
\begin{aligned}
q(t) &= CE + (q_0 - CE)\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) \\
i(t) &= \frac{q(t)}{dt} = \frac{E - q_0/C}{R}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)
\end{aligned}
$$

第一項の CE は時間に依存しないので微分値は 0 です．第二項は $\exp(x)$ の時間微分が $\exp(x)$ であることを思い出し，$x = -(t-t_0)/RC$ と置いてみると

$$
\frac{d}{dt}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) = \frac{d}{dt}\exp(x) = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}\exp(x) = -\frac{1}{RC}\cdot\exp(x) = -\frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)
$$

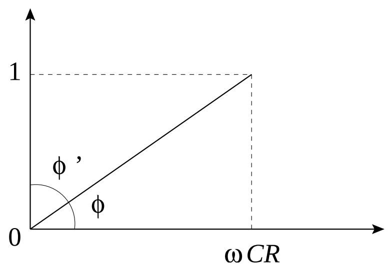
問6

- **以下はどうしてか？**

ここで，$\tan\phi = \dfrac{1}{\omega CR}$ **とおくと，以下の関係が成り立つ** $(\tan\phi' = \omega CR)$

$$
\begin{aligned}
&\tan\phi\cdot\tan\phi' = 1 \\
&\phi + \phi' = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$\tan\phi = \frac{1}{\omega CR}$ と置いたのは，単に教科書の変数に合わせただけです．
最後の式は，以下の図を見てください．ϕ と ϕ' を合成すると 90° になることがわかると思います．



- **以下の式になることを説明してください**

$$
i(t) \quad = \quad \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}}\left\{\cos(\omega t + \theta - \pi/2 + \phi) + \tan\phi\sin(\theta - \pi/2 + \phi)e^{-\frac{t}{CR}}\right\}
$$

$\tan\phi' = \frac{1}{\tan\phi}$ と $\phi' = \pi/2 - \phi$ の関係を代入すると出るはずです．