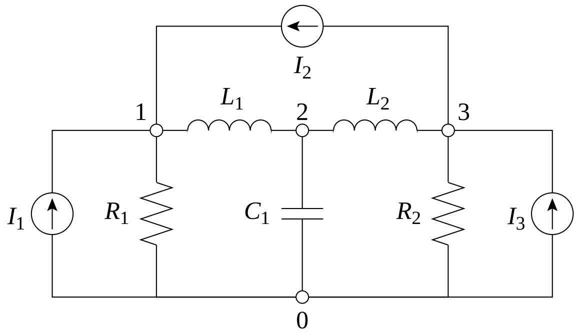
電気回路 II 演習・小テスト (第５回)

演習

下図の交流回路に対して節点0を基準とした節点方程式を書け．また，$f = 50$ Hz，$R_1 = R_2 = 1\ \Omega$，$L_1 = L_2 = \frac{1}{100\pi}$ H，$C_1 = \frac{1}{100\pi}$ F，$I_1 = 2$ A，$I_2 = I_3 = 0$ A とするとき，節点０に対する節点１，２，３の電位 V_1，V_2，V_3 を求めよ．また，求まった解を節点方程式に代入し，式が満たされていることを確認せよ．



解答

節点方程式は行列形式で以下のように表される

$$\begin{bmatrix} I_1 + I_2 \\ 0 \\ I_3 - I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{j\omega L_1} & -\dfrac{1}{j\omega L_1} & 0 \\ -\dfrac{1}{j\omega L_1} & j\omega C_1 + \dfrac{1}{j\omega L_1} + \dfrac{1}{j\omega L_2} & -\dfrac{1}{j\omega L_2} \\ 0 & -\dfrac{1}{j\omega L_2} & \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{j\omega L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

数値を代入すると以下の式を得る

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-j & j & 0 \\ j & -j & j \\ 0 & j & 1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

行列式 Δ の値は

$$\Delta = -j(1-j)^2 - 2(j)^2(1-j) = -2 + 2(1-j) = -2j$$

各節点電位は Cramer の公式を用いて以下のように求まる．

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & j & 0 \\ 0 & -j & j \\ 0 & j & 1-j \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-2j(1-j) - 2(j)^2}{-2j} = \frac{-2j - 2 + 2}{-2j} = 1\ \mathrm{V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1-j & 2 & 0 \\ j & 0 & j \\ 0 & 0 & 1-j \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-2j(1-j)}{-2j} = (1-j)\ \mathrm{V}$$

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1-j & j & 2 \\ j & -j & 0 \\ 0 & j & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2(j)^2}{-2j} = -j\ \mathrm{V}$$

得られた結果を節点方程式の右辺代入すると

$$\begin{bmatrix} 1-j & j & 0 \\ j & -j & j \\ 0 & j & 1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-j \\ -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-j)\times 1 + j \times (1-j) + 0 \times (-j) \\ j \times 1 - j \times (1-j) + j \times (-j) \\ 0 \times 1 + j \times (1-j) + (1-j) \times (-j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり，Cramer の公式による解が正しいことが確認される．