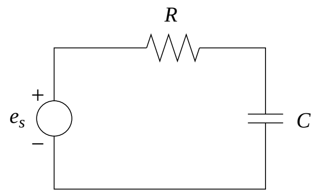
電気回路 II 演習・小テスト (第 15 回)

演習

下図の RC 直列回路で，以下の 2 種類の入力電圧に対する電流の過渡応答を求めよ．なお，$R = 1\ \Omega$, $C = 0.5$ F，コンデンサの初期電荷は 0 とする．
(1) $e_s(t) = 5e^{-t}\sin 2t \cdot u(t)$ [V]，(2) $e_s(t) = \delta(t)$ [V]



時間があれば，(2) の結果を利用して (1) の結果を確認せよ．(採点はしない)

$$i(t) = \int_0^t h(\tau)\, e_s(t-\tau)\, d\tau \qquad (h(t)\text{ は回路のインパルス応答})$$

解答

電源のラプラス変換を $E_s(t)$ と書くと，回路方程式とそのラプラス変換は以下のようになる．

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = e_s(t)$$

$$\left(R + \frac{1}{sC}\right) I(s) = E_s(s) \qquad \rightarrow \qquad I(s) = \frac{E_s(s)}{\left(R + \frac{1}{sC}\right)} = \frac{1}{R}\frac{sE_s(s)}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{sE_s(s)}{s+2}$$

(1) $\mathcal{L}\{5e^{-t}\sin(2t)\} = \dfrac{5\cdot 2}{(s+1)^2 + 2^2}$ であるので，

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{s}{s+2}\cdot\frac{10}{(s+1)^2+2^2} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2 s + K_3}{(s+1)^2+2^2} = \frac{-4}{s+2} + \frac{4s+10}{(s+1)^2+2^2} \\
&= \frac{-4}{s+2} + \frac{4(s+1)+3\cdot 2}{(s+1)^2+2^2} \\
i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = -4e^{-2t} + e^{-t}\left(4\cos 2t + 3\sin 2t\right) \\
&= -4e^{-2t} + 5e^{-t}\sin(2t+\phi)\ [\mathrm{A}] \qquad (\phi = \tan^{-1}\frac{4}{3})
\end{aligned}$$

(2) $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ であるので，インパルス応答は

$$I(s) = \frac{s}{s+2} = 1 + \frac{-2}{s+2} \qquad \rightarrow \qquad i(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \delta(t) - 2e^{-2t}\ [\mathrm{A}]$$

(3)

$$\begin{aligned}
i(t) &= \int_0^t h(\tau)\, e_s(t-\tau)\, d\tau \\
&= \int_0^t 5\left(\delta(\tau) - 2e^{-2\tau}\right) e^{-(t-\tau)}\sin 2(t-\tau) d\tau \\
&= \int_0^t 5\delta(\tau) e^{-(t-\tau)}\sin 2(t-\tau) d\tau - 10e^{-2t}\int_0^t e^{(t-\tau)}\sin 2(t-\tau) d\tau \\
&= 5e^{-t}\sin 2t - 10e^{-2t}\int_t^0 e^x \sin 2x \cdot (-dx) \\
&= 5e^{-t}\sin 2t - 10e^{-2t}\int_0^t e^x \sin 2x dx \\
&= 5e^{-t}\sin 2t - 10e^{-2t}\frac{1}{5}\left(e^t \sin 2t - 2e^t\cos 2t + 2\right) \\
&= 5e^{-t}\sin 2t - 2e^{-t}\sin 2t + 4e^{-t}\cos 2t - 4e^{-2t} \\
&= -4e^{-2t} + e^{-t}\left(4\cos 2t + 3\sin 2t\right)\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}$$