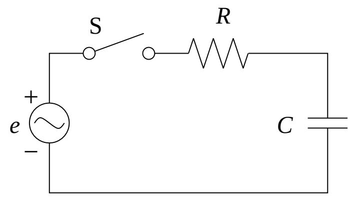
電気回路 II 演習・小テスト (第 11 回)

演習

下図の回路で，$t=0$ でスイッチ S を閉じ，交流電圧 $e=E_m\sin(\omega t+\theta)$ を印加したときの回路電流 $i(t)$ を求めよ．また，過渡電流が最大となる θ の値を求めよ．



解答

　コンデンサの電荷を $q(t)$ とすると，キルヒホッフの電圧則より回路方程式は以下のように与えられる．

$$Ri(t)+\frac{q(t)}{C}=E_m\sin(\omega t+\theta)$$

電流と電荷の関係式 $i(t)=dq(t)/dt$ を用いると以下の式を得る．

$$R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=E_m\sin(\omega t+\theta)$$

定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ に分離して考えると，それぞれが満たす微分方程式は

$$R\frac{dq_s(t)}{dt}+\frac{q_s(t)}{C}=E_m\sin(\omega t+\theta)$$

$$R\frac{dq_t(t)}{dt}+\frac{q_t(t)}{C}=0$$

である．まず，定常解について解く．定常状態に対する解は交流回路理論を用いると，$d/dt\to j\omega$ として

$$j\omega RQ_s+\frac{Q_s}{C}=E_me^{j\theta}$$

上式を Q_s について解くと以下のように求まる．

$$Q_s=\frac{CE_me^{j\theta}}{1+j\omega CR}=CE_me^{j\theta}\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}e^{-j\phi'}=\frac{CE_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}e^{j(\theta-\phi')}\qquad\left(\phi'=\tan^{-1}(\omega CR)\right)$$

以上より，定常解は

$$q_s(t)=Q_m\sin(\omega t+\theta-\phi')\qquad\left(Q_m=\frac{CE_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\right)$$

と求まる．

　一方，過渡解は

$$q_t(t)=Ae^{-\frac{t}{CR}}\qquad(A\ :\ \text{積分定数})$$

である．したがて，電荷 $q(t)$ の一般解は

$$q(t)=q_s(t)+q_t(t)=Q_m\sin(\omega t+\theta-\phi')+Ae^{-\frac{t}{CR}}$$

で与えられる．初期条件として $t=0$ で $q(t=0)=0$ を代入すると

$$q(0)=Q_m\sin(\theta-\phi')+A=0\qquad\to\qquad A=-Q_m\sin(\theta-\phi')$$

と求まり，回路に流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t)\quad=\quad\frac{dq(t)}{dt}=\frac{E_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\left\{\omega C\cos(\omega t+\theta-\phi')+\frac{1}{R}\sin(\theta-\phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\},\qquad\left(\phi'=\tan^{-1}(\omega CR)\right)$$

また，過渡電流が最大となる θ の値は

$$\theta-\phi'=\pm\pi/2\qquad\to\qquad\theta=\phi'\pm\pi/2$$