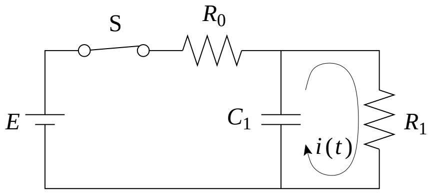
電気回路 II 演習・小テスト (第 10 回)

演習

下図の回路は定常状態であるとする．いま，$t = 0$ でスイッチ S を開いたとするとき，抵抗 R_1 に流れる電流 $i(t)$ を求め，時間変化を図示せよ．また，このときの時定数 τ を求めよ．



解答

定常状態でコンデンサー C_1 にかかる電圧 V_{C1} は

$$V_{C1} = \frac{R_1 E}{R_0 + R_1}$$

であるので，コンデンサ C_1 に蓄えられている電荷 Q は

$$Q = C_1 V_{C1} = \frac{C_1 R_1 E}{R_0 + R_1}$$

である．また，$t = 0$ でスイッチ S を開いた後の回路方程式は，コンデンサ C_1 に蓄えられている電荷を $q(t)$，抵抗 R_1 に流れる電流を $i(t)$ とすると

$$R_1 i(t) = \frac{q(t)}{C}$$

であり，$i(t) = -dq(t)/dt$ という関係式を用いると

$$R_1 \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C_1} = 0$$

という微分方程式式を得る．上式の定常解 $q_s(t)$ と 過渡解 $q_t(t)$ はそれぞれ以下のようになる．

- 定常解

$$\frac{q_s(t)}{C_1} = 0 \qquad \rightarrow \qquad q_s(t) = 0$$

- 過渡解

$$R_1 \frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C_1} = 0 \qquad \rightarrow \qquad q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{C_1 R_1}} \qquad (A : \text{積分定数})$$

したがって，一般解は以下のように与えられる．

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{C_1 R_1}}$$

$t = 0$ での初期条件より積分定数 A は以下のように求まる．

$$q(0) = A = \frac{C_1 R_1 E}{R_0 + R_1}$$

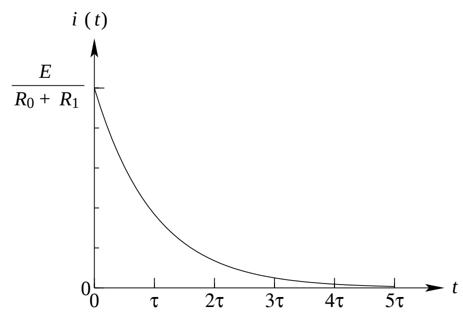
以上より，電荷 $q(t)$ は

$$q(t) = \frac{C_1 R_1 E}{R_0 + R_1} e^{-\frac{t}{C_1 R_1}}$$

と求まるので，抵抗 R_1 に流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{C_1 R_1 E}{R_0 + R_1} \left(-\frac{1}{C_1 R_1} \right) e^{-\frac{t}{C_1 R_1}} = \frac{E}{R_0 + R_1} e^{-\frac{t}{C_1 R_1}}$$

と求まる．グラフは右図のようになる．また，時定数 τ は



$$\tau = C_1 R_1$$

である．