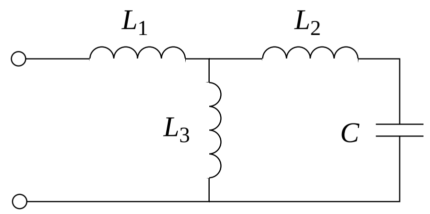
電気回路 II 演習・小テスト (第１回)

演習

下図の回路の直列共振角周波数 ω_0 と並列共振角周波数 ω_∞ を求めよ．また，$L_1 = L_2 = 4$ mH，$L_3 = 6$ mH，$C = 100$ pF のときのリアクタンス線図を書け．



入力インピーダンス $Z_i = R_i + jX_i$ は以下のように求まる

$$
\begin{aligned}
Z_i &= j\omega L_1 + \left\{ j\omega L_3 // \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) \right\} = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_3 \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{j\omega L_3 + \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)} \\
&= j\omega \frac{(L_1 + L_3) - \omega^2 (L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1) C}{1 - \omega^2 (L_2 + L_3) C}
\end{aligned}
$$

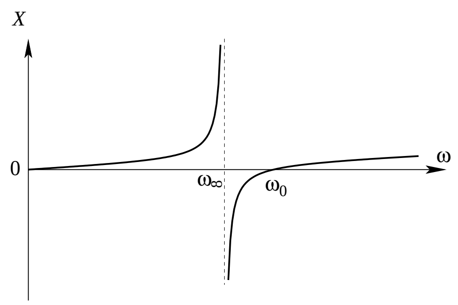
$X_i = 0$ となる直列共振角周波数は以下のように求まる

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \sqrt{\frac{L_1 + L_3}{(L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1) C}} \\
&= \sqrt{\frac{(4+6) \times 10^{-3}}{(4 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 4) \times 10^{-6} \times 100 \times 10^{-12}}} = 1.25 \times 10^6 \text{ rad/s}
\end{aligned}
$$

$1/X_i = 0$ となる並列共振角周波数は以下のように求まる

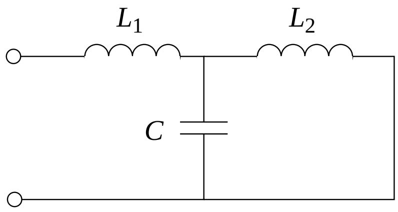
$$
\omega_\infty = \sqrt{\frac{1}{(L_2 + L_3) C}} = \sqrt{\frac{1}{(4+6) \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-12}}} = 1 \times 10^6 \text{ rad/s}
$$

以上の結果より，リアクタンス線図は以下のように書ける．



小テスト

下図の回路の直列共振角周波数 ω_0 と並列共振角周波数 ω_∞ を求めよ．また，$L_1 = 10$ mH，$L_2 = 10$ mH，$C = 100$ pF のときのリアクタンス線図を書け．



入力インピーダンス $Z_i = R_i + jX_i$ は以下のように求まる

$$
\begin{aligned}
Z_i &= j\omega L_1 + \left\{ j\omega L_2 // \left(\frac{1}{j\omega C} \right) \right\} = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \frac{1}{j\omega C}}{\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)} \\
&= j\omega \frac{(L_1 + L_2) - \omega^2 L_1 L_2 C}{1 - \omega^2 L_2 C}
\end{aligned}
$$

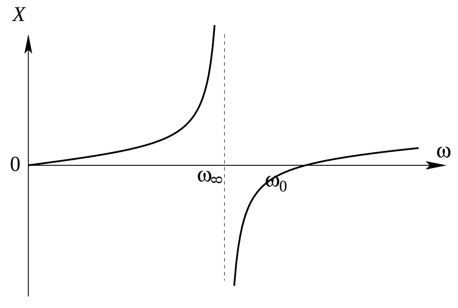
$X_i = 0$ となる直列共振角周波数は以下のように求まる

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} = \sqrt{\frac{(10+10) \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-12}}} = \sqrt{2} \times 10^6 = 1.41 \times 10^6 \text{ rad/s}
$$

$1/X_i = 0$ となる並列共振角周波数は以下のように求まる

$$
\omega_\infty = \sqrt{\frac{1}{L_2 C}} = \sqrt{\frac{1}{10 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-12}}} = 1 \times 10^6 \text{ rad/s}
$$

以上の結果より，リアクタンス線図は以下のように書ける．



演習および小テストの解答は

http://www.elec.kitami-it.ac.jp/ tsuji/

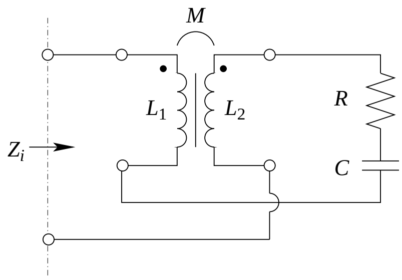
に載せることにしました．

学生には講義の際に連絡します

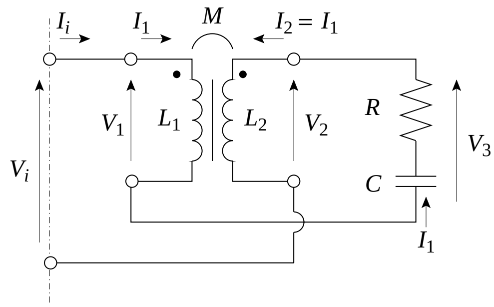
電気回路 II 演習・小テスト (第２回)

演習

下図の回路の入力インピーダンス Z_i を求め，共振角周波数を求めよ．



解答



$I_1 = I_i$ であるので，各部の電圧は以下の様に表される．

$$\begin{aligned} V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega(L_1+M)I_i \\ V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = j\omega(M+L_2)I_i \\ V_3 &= -\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)I_i \end{aligned}$$

入力端での電圧 V_i は

$$V_i = V_1 - V_3 + V_2 = \left\{j\omega(L_1+L_2+2M)+\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)\right\}I_i$$

よって，入力インピーダンスは

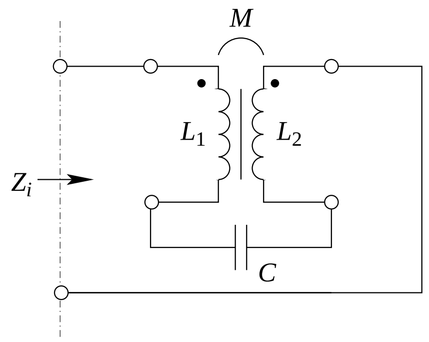
$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{V_i}{I_i} = \left\{j\omega(L_1+L_2+2M)+\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)\right\} \\ &= R + j\frac{\{\omega^2 C\,(L_1+L_2+2M)-1\}}{\omega C} \\ &= R_i + jX_i \end{aligned}$$

$X_i = 0$ となる直列共振角周波数は以下のように求まる

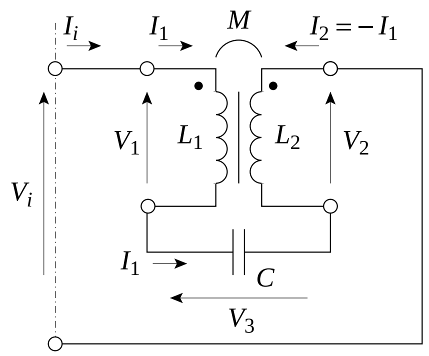
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C(L_1+L_2+2M)}}$$

小テスト

下図の回路の入力インピーダンス Z_i を求め，共振角周波数を求めよ．



解答



$I_1 = I_i$ であるので，各部の電圧は以下の様に表される．

$$
\begin{aligned}
V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega(L_1 - M)I_i \\
V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = j\omega(M - L_2)I_i \\
V_3 &= \frac{1}{j\omega C} I_i
\end{aligned}
$$

入力端での電圧 V_i は

$$
V_i = V_1 + V_3 - V_2 = \left\{ j\omega(L_1 + L_2 - 2M) + \frac{1}{j\omega C} \right\} I_i
$$

よって，入力インピーダンスは

$$
\begin{aligned}
Z_i &= \frac{V_i}{I_i} = \left\{ j\omega(L_1 + L_2 - 2M) + \frac{1}{j\omega C} \right\} \\
&= j \frac{\{\omega^2 C\,(L_1 + L_2 - 2M) - 1\}}{\omega C} \\
&= jX_i
\end{aligned}
$$

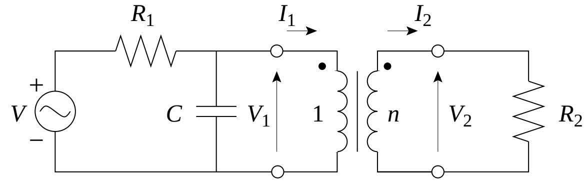
$X_i = 0$ となる直列共振角周波数は以下のように求まる

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C(L_1 + L_2 - 2M)}}
$$

電気回路 II 演習・小テスト (第３回)

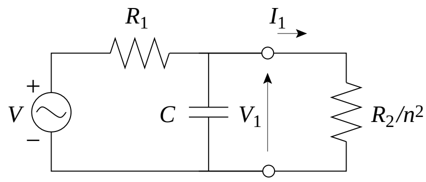
演習

理想変成器を含む下図の回路の電圧 V_1，V_2，電流 I_1，I_2 を求めよ．



解答

２次側の R_2 を１次側に移すと以下の図のようになる．



図より，キャパシタンス C と 抵抗 R_2/n^2 の合成インピーダンス Z は以下で与えられる．

$$Z = \frac{\dfrac{R_2}{n^2} \cdot \dfrac{1}{j\omega C}}{\dfrac{R_2}{n^2} + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{n^2 + j\omega C R_2}$$

したがって，V_1，I_1 は以下で与えられる．

$$V_1 = \frac{\dfrac{R_2}{n^2 + j\omega C R_2}}{R_1 + \dfrac{R_2}{n^2 + j\omega C R_2}} V = \frac{R_2}{(n^2 R_1 + R_2) + j\omega C R_1 R_2} V = R_2 \frac{(n^2 R_1 + R_2) - j\omega C R_1 R_2}{(n^2 R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2} V$$

$$I_1 = \frac{V_1}{R_2/n^2} = \frac{n^2}{(n^2 R_1 + R_2) + j\omega C R_1 R_2} V = n^2 \frac{(n^2 R_1 + R_2) - j\omega C R_1 R_2}{(n^2 R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2} V$$

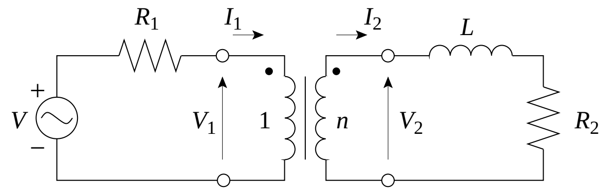
また，２次側の電圧 V_2，電流 I_2 は以下で与えられる．

$$V_2 = nV_1 = \frac{nR_2}{(n^2 R_1 + R_2) + j\omega C R_1 R_2} V = nR_2 \frac{(n^2 R_1 + R_2) - j\omega C R_1 R_2}{(n^2 R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2} V$$

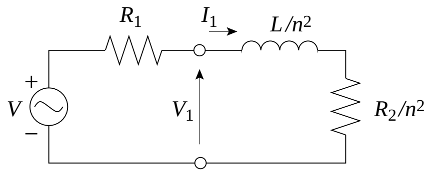
$$I_2 = \frac{I_1}{n} = \frac{n}{(n^2 R_1 + R_2) + j\omega C R_1 R_2} V = n \frac{(n^2 R_1 + R_2) - j\omega C R_1 R_2}{(n^2 R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2} V$$

小テスト

理想変成器を含む下図の回路の電圧 V_1，V_2，電流 I_1，I_2 を求めよ．



解答



図より，インダクタンス L/n^2 と 抵抗 R_2/n^2 の合成インピーダンス Z は以下で与えられる．

$$Z = \frac{R_2 + j\omega L}{n^2}$$

したがって，V_1，I_1 は以下で与えられる．

$$V_1 = \frac{\dfrac{R_2 + j\omega L}{n^2}}{R_1 + \dfrac{R_2 + j\omega L}{n^2}} V = \frac{R_2 + j\omega L}{(n^2 R_1 + R_2) + j\omega L} V = \frac{\left\{\left(n^2 R_1 + R_2\right) R_2 + \omega^2 L^2\right\} + j\omega n^2 L R_1}{(n^2 R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{Z} = \frac{n^2}{(n^2 R_1 + R_2) + j\omega L} V = n^2 \frac{(n^2 R_1 + R_2) - j\omega L}{(n^2 R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2} V$$

また，２次側の電圧 V_2，電流 I_2 は以下で与えられる．

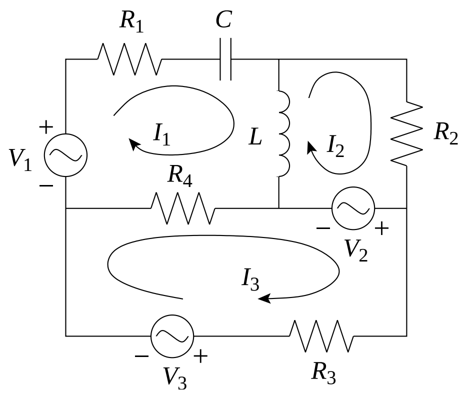
$$V_2 = nV_1 = \frac{n(R_2 + j\omega L)}{(n^2 R_1 + R_2) + j\omega L} V = n \frac{\left\{\left(n^2 R_1 + R_2\right) R_2 + \omega^2 L^2\right\} + j\omega n^2 L R_1}{(n^2 R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2} V$$

$$I_2 = \frac{I_1}{n} = \frac{n}{(n^2 R_1 + R_2) + j\omega L} V = n \frac{(n^2 R_1 + R_2) - j\omega L}{(n^2 R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2} V$$

電気回路 II 演習・小テスト (第 4 回)

演習

下図の回路に対して閉路方程式を立て，行列方程式の形で表せ．また，$f = 50$ Hz，$R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = 1\ \Omega$，$R_3 = 2\ \Omega$，$R_4 = 0\ \Omega$，$L = \frac{1}{100\pi}$ H，$C = \frac{1}{200\pi}$ F，$V_1 = 6$ V，$V_2 = 6$ V，$V_3 = 3$ V のときの I_1，I_2，I_3 を求めよ．



解答

閉路方程式は行列形式で以下のように表される

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \\ V_2 - V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_4 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) & -j\omega L & -R_4 \\ -j\omega L & R_2 + j\omega L & 0 \\ -R_4 & 0 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

数値を代入すると以下の式を得る

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-j & -j & 0 \\ -j & 1+j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

行列式 Δ の値は

$$\Delta = \{(1-j)(1+j) \times 2 + 0 + 0\} - \left\{0 + 0 + 2 \times (-j)^2\right\} = 6$$

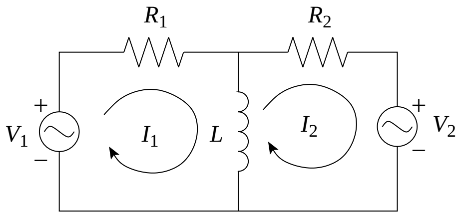
各閉路電流は Cramer の公式を用いて以下のように求まる．

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -j & 0 \\ -6 & 1+j & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = 2\ \mathrm{A}, \qquad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1-j & 6 & 0 \\ -j & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = -2 + j4\ \mathrm{A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1-j & -j & 6 \\ -j & 1+j & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = 1.5\ \mathrm{A}$$

小テスト

下図の回路に対して閉路方程式を立て，行列方程式の形で表せ．また，$f = 50$ Hz，$R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = 1\ \Omega$，$L = \frac{1}{100\pi}$ H，$V_1 = 10$ V，$V_2 = 5$ V のときの I_1，I_2 を求めよ．



解答

閉路方程式は行列形式で以下のように表される

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L & -j\omega L \\ -j\omega L & R_1 + j\omega L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

数値を代入すると以下の式を得る

$$\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + j & -j \\ -j & 1 + j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

行列式 Δ の値は

$$\Delta = (1 + j)^2 - (-j)^2 = 1 + j2$$

各閉路電流は Cramer の公式を用いて以下のように求まる．

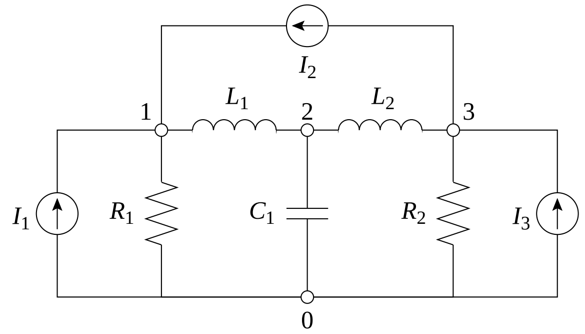
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -j \\ -5 & 1 + j \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{10 + 5j}{1 + 2j} = 4 - j3 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + j & 10 \\ -j & -5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-5 + 5j}{1 + 2j} = 1 + j3 \text{ A}$$

電気回路 II 演習・小テスト (第５回)

演習

下図の交流回路に対して節点0を基準とした節点方程式を書け．また，$f = 50$ Hz，$R_1 = R_2 = 1\,\Omega$，$L_1 = L_2 = \frac{1}{100\pi}$ H，$C_1 = \frac{1}{100\pi}$ F，$I_1 = 2$ A，$I_2 = I_3 = 0$ A とするとき，節点０に対する節点１，２，３の電位 V_1，V_2，V_3 を求めよ．また，求まった解を節点方程式に代入し，式が満たされていることを確認せよ．



解答

節点方程式は行列形式で以下のように表される

$$\begin{bmatrix} I_1 + I_2 \\ 0 \\ I_3 - I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{j\omega L_1} & -\dfrac{1}{j\omega L_1} & 0 \\ -\dfrac{1}{j\omega L_1} & j\omega C_1 + \dfrac{1}{j\omega L_1} + \dfrac{1}{j\omega L_2} & -\dfrac{1}{j\omega L_2} \\ 0 & -\dfrac{1}{j\omega L_2} & \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{j\omega L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

数値を代入すると以下の式を得る

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-j & j & 0 \\ j & -j & j \\ 0 & j & 1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

行列式 Δ の値は

$$\Delta = -j(1-j)^2 - 2(j)^2(1-j) = -2 + 2(1-j) = -2j$$

各節点電位は Cramer の公式を用いて以下のように求まる．

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & j & 0 \\ 0 & -j & j \\ 0 & j & 1-j \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-2j(1-j) - 2(j)^2}{-2j} = \frac{-2j - 2 + 2}{-2j} = 1 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1-j & 2 & 0 \\ j & 0 & j \\ 0 & 0 & 1-j \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-2j(1-j)}{-2j} = (1-j) \text{ V}$$

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1-j & j & 2 \\ j & -j & 0 \\ 0 & j & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2(j)^2}{-2j} = -j \text{ V}$$

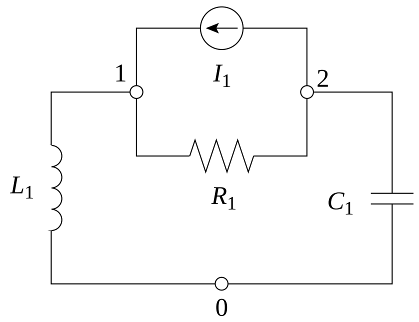
得られた結果を節点方程式の右辺代入すると

$$\begin{bmatrix} 1-j & j & 0 \\ j & -j & j \\ 0 & j & 1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-j \\ -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-j)\times 1 + j \times (1-j) + 0 \times (-j) \\ j \times 1 - j \times (1-j) + j \times (-j) \\ 0 \times 1 + j \times (1-j) + (1-j) \times (-j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり，Cramer の公式による解が正しいことが確認される．

小テスト

下図の交流回路に対して節点 0 を基準とした節点方程式を書け．また，$f = 50$ Hz，$R_1 = 1\ \Omega$，$L_1 = \frac{1}{100\pi}$ H，$C_1 = \frac{1}{50\pi}$ F，$I_1 = 5$ A とするとき，節点０に対する節点１，２の電位 V_1，V_2 を求めよ．また，求まった解を節点方程式に代入し，式が満たされていることを確認せよ．



解答

節点方程式は行列形式で以下のように表される

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{j\omega L_1} & -\dfrac{1}{R_1} \\ -\dfrac{1}{R_1} & \dfrac{1}{R_1} + j\omega C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

数値を代入すると以下の式を得る

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-j & -1 \\ -1 & 1+j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

行列式 Δ の値は

$$\Delta = (1-j)(1+j2) - (-1)^2 = 2+j$$

各節点電位は Cramer の公式を用いて以下のように求まる．

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1+j2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{5(1+j2) - (-5)\times(-1)}{2+j} = \frac{j10}{2+j} = (2+j4)\ \mathrm{V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1-j & 5 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(1-j)\times(-5) - 5\times(-1)}{2+j} = \frac{j5}{2+j} = (1+j2)\ \mathrm{V}$$

得られた結果を節点方程式の右辺代入すると

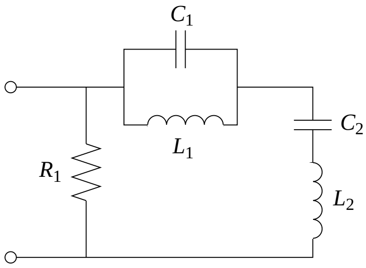
$$\begin{bmatrix} 1-j & -1 \\ -1 & 1+j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+j4 \\ 1+j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-j)(2+j4) - 1\times(1+j2) \\ -1\times(2+j4) + (1+j2)\times(1+j2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

となり，Cramer の公式による解が正しいことが確認される．

電気回路 II 演習・小テスト (第６回)

演習

下図の交流回路の R_0 に関する逆回路を以下の２通りの方法で求め結果が一致することを確認せよ．(a) 直列 $\Longleftrightarrow$ 並列の変換を行う方法．(b) 図的解法．また，$f = 50$ Hz，$R_1 = 2\ \Omega$，$L_1 = \frac{1}{100\pi}$ H，$L_2 = \frac{1}{50\pi}$ H，$C_1 = \frac{1}{200\pi}$ F，$C_2 = \frac{1}{600\pi}$ F，$R_0 = 1\ \Omega$ のときに対して，元の回路の入力インピーダンス Z_i と逆回路の入力インピーダンス Z_{ri} を求め，$Z_i Z_{ri} = R_0^2$ の関係が成り立つことを確かめよ．



解答

(直列 $\Longleftrightarrow$ 並列変換) 図 1 の回路の破線内ををひとつの素子とみなし，図 2 のように書き換え，逆回路を求めると図 3 のように書ける．

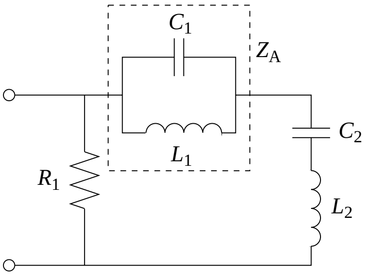


図 1

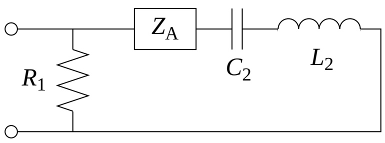


図 2

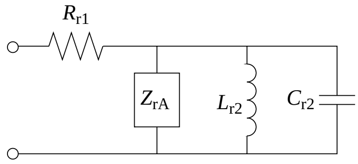
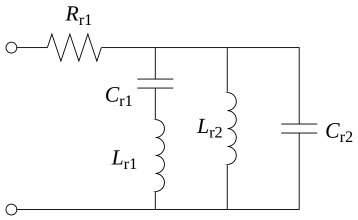


図 3

ここに Z_{rA} は Z_A の逆回路を表し，R_{r1}，L_{r2}，C_{r2} は以下のように与えられる．

$$R_{r1} = \frac{R_0^2}{R_1}, \qquad L_{r2} = C_2 R_0^2, \qquad C_{r2} = \frac{L_2}{R_0^2}$$

Z_A は C_1 と C_2 との並列回路であるので，逆回路は直列回路になり，解図の回路を得る



$$R_{r1} = \frac{R_0^2}{R_1}, \qquad L_{r1} = C_1 R_0^2, \qquad C_{r1} = \frac{L_1}{R_0^2}$$

$$L_{r2} = C_2 R_0^2, \qquad C_{r2} = \frac{L_2}{R_0^2}$$

解図

(図的解法) 図 4 のように，便宜的に電圧源を加え，節点 0〜4 を考え，逆回路を作り，最後に電流源を除去することにより，解図が得られる

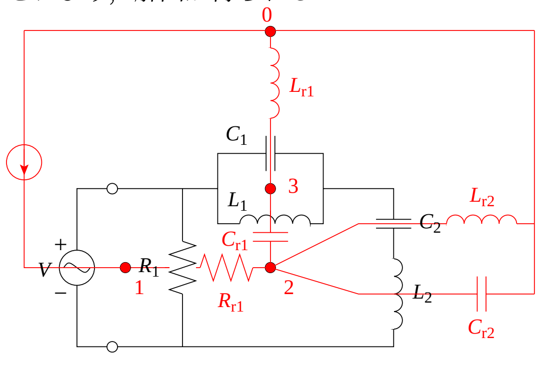


図 4

得られた回路から

$$Z_i = 1 - j\ \Omega$$
$$Z_{ri} = \frac{1+j}{2}\ \Omega$$

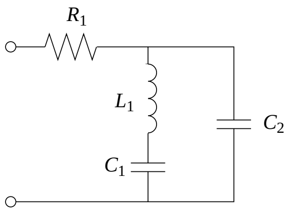
したがって

$$Z_i Z_{ri} = (1-j)\frac{1+j}{2} = 1^2$$

となり逆回路になっていることが確認される．

小テスト

下図の交流回路の R_0 に関する逆回路を以下の 2 通りの方法で求め結果が一致することを確認せよ．(a) 直列 $\Longleftrightarrow$ 並列の変換を行う方法．(b) 図的解法．また，$f = 50$ Hz，$R_1 = 0.5\ \Omega$，$L_1 = \frac{1}{200\pi}$ H，$C_1 = \frac{1}{25\pi}$ F，$C_2 = \frac{1}{50\pi}$ F，$R_0 = 1\ \Omega$ のときに対して，元の回路の入力インピーダンス Z_i と逆回路の入力インピーダンス Z_{ri} を求め，$Z_i Z_{ri} = R_0^2$ の関係が成り立つことを確かめよ．



解答

(直列 $\Longleftrightarrow$ 並列変換) 図 1 の回路の破線内ををひとつの素子とみなし，図 2 のように書き換え，逆回路を求めると図 3 のように書ける．

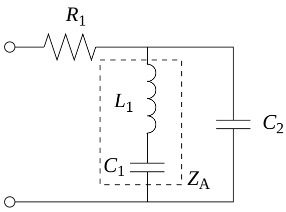


図 1

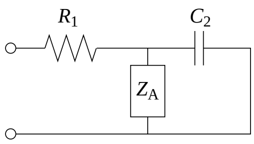


図 2

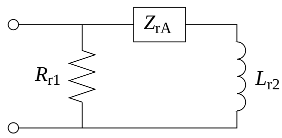
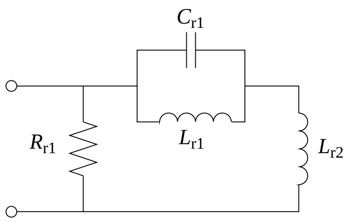


図 3

ここに Z_{rA} は Z_A の逆回路を表し，R_{r1}，L_{r2}，C_{r2} は以下のように与えられる．

$$R_{r1} = \frac{R_0^2}{R_1}, \qquad L_{r2} = C_2 R_0^2$$

Z_A は C_1 と C_2 との並列回路であるので，逆回路は直列回路になり，解図の回路を得る



解図

$$R_{r1} = \frac{R_0^2}{R_1}, \qquad L_{r1} = C_1 R_0^2,$$

$$L_{r2} = C_2 R_0^2, \qquad C_{r1} = \frac{L_1}{R_0^2}$$

(図的解法) 図 4 のように，便宜的に電圧源を加え，節点 0〜3 を考え，逆回路を作り，最後に電流源を除去することにより，解図が得られる

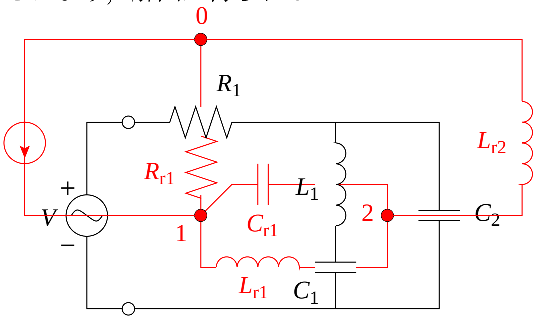


図 4

得られた回路から

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{1+j}{2}\ \Omega \\ Z_{ri} &= 1 - j\ \Omega \end{aligned}$$

したがって

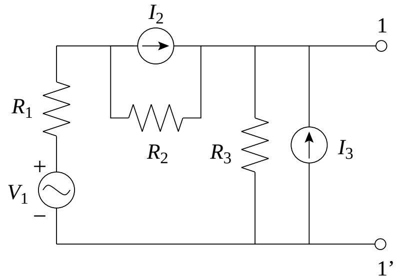
$$Z_i Z_{ri} = \frac{1+j}{2}(1-j) = 1^2$$

となり逆回路になっていることが確認される．

電気回路 II 演習・小テスト (第７回)

演習

下図の交流回路の端子 $1-1'$ から見たテブナン等価回路，ノルトン等価回路を求めよ．また，端子 $1-1'$ に負荷 Z_L が接続されたとき，負荷にかかる電圧，電流を求めよ．



解答

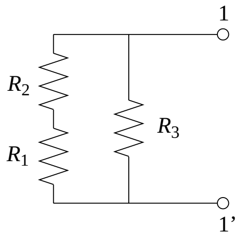
テブナン等価回路の導出

- 内部インピーダンス Z_0

電圧源を短絡，電流源を開放すると内部抵抗は

$$Z_0 = (R_1 + R_2)//R_3 = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

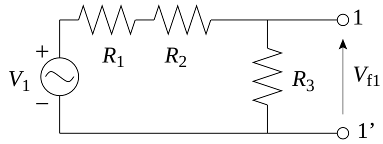
と求まる．



- 開放電圧 V_f は重ね合わせの理を用いると

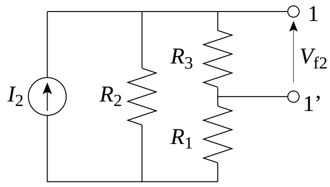
— V_1 のみがあるとき

$$V_{f1} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} V_1$$



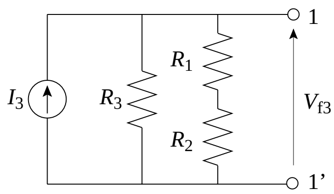
— I_2 のみがあるとき

$$V_{f2} = R_3 \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} I_2 \right)$$



— I_3 のみがあるとき

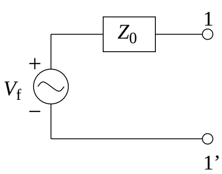
$$V_{f3} = Z_0 I_3 = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} I_3$$



よって，開放電圧 V_f は

$$V_f = V_{f1} + V_{f2} + V_{f3} = \frac{R_3 V_1 + R_2 R_3 I_2 + (R_1 + R_2)R_3 I_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

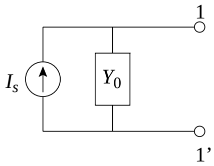
以上より，以下のテブナン等価回路が書ける．



$$\begin{aligned} V_f &= \frac{R_3 V_1 + R_2 R_3 I_2 + (R_1 + R_2)R_3 I_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ Z_0 &= \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned}$$

ノルトン等価回路の導出

上で求めたテブナン等価回路より，ノルトン等価回路は以下のように書ける．



$$
\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{1}{Z_0} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{(R_1 + R_2)R_3} \\
I_s &= Y_0 V_f = \frac{V_1 + R_2 I_2}{(R_1 + R_2)} + I_3
\end{aligned}
$$

負荷にかかる電圧，電流

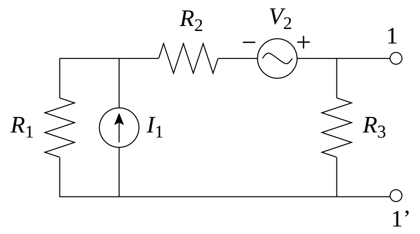
テブナン等価回路より

$$
V_L = \frac{Z_L}{Z_0 + Z_L} V_f, \qquad I_L = \frac{V_f}{Z_0 + Z_L}
$$

　ノルトン等価回路を出してからテブナン等価回路を出す方が簡単だと思います．どちらから出すかは学生にまかせます．

小テスト

下図の交流回路の端子 $1-1'$ から見たテブナン等価回路，ノルトン等価回路を求めよ．また，端子 $1-1'$ に負荷 Z_L が接続されたとき，負荷にかかる電圧，電流を求めよ．



解答

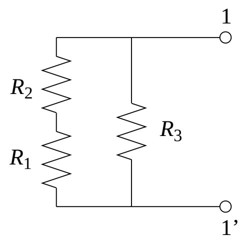
テブナン等価回路の導出

- 内部インピーダンス Z_0

電圧源を短絡，電流源を解放すると内部抵抗は

$$Z_0 = (R_1 + R_2)//R_3 = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

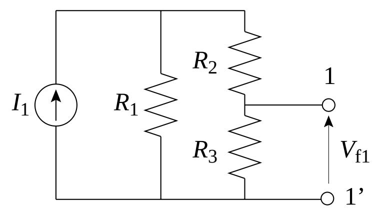
と求まる．



- 解放電圧 V_f は重ね合わせの理を用いると

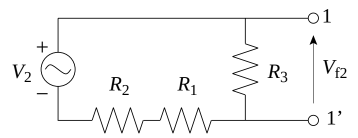
— I_1 のみがあるとき

$$V_{f1} = R_3 \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} I_1 \right)$$



— V_2 のみがあるとき

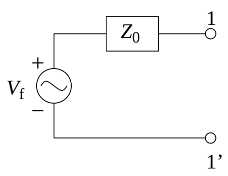
$$V_{f2} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} V_2$$



よって，解放電圧 V_f は

$$V_f = V_{f1} + V_{f2} = \frac{(R_1 I_1 + V_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

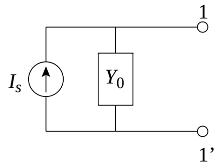
以上より，以下のテブナン等価回路が書ける．



$$\begin{aligned} V_f &= \frac{(R_1 I_1 + V_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ Z_0 &= \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned}$$

ノルトン等価回路の導出

上で求めたテブナン等価回路より，ノルトン等価回路は以下のように書ける．



$$
\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{1}{Z_0} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{(R_1 + R_2)R_3} \\
I_s &= Y_0 V_f = \frac{(R_1 I_1 + V_2)}{(R_1 + R_2)}
\end{aligned}
$$

負荷にかかる電圧，電流

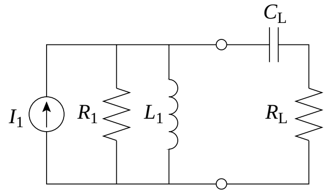
テブナン等価回路より

$$
V_L = \frac{Z_L}{Z_0 + Z_L} V_f, \qquad I_L = \frac{V_f}{Z_0 + Z_L}
$$

電気回路 II 演習・小テスト (第８回)

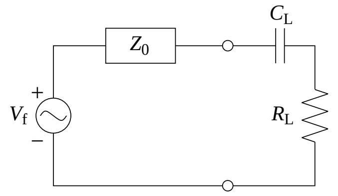
演習

下図の交流回路において負荷抵抗 R_L での消費電力を最大にするための R_L，C_L の最適値とそのときの消費電力を求めよ．また，R_L のみ変化できる場合の R_L の最適値を求めよ．



解答

電源をテブナン等価回路に置き換える



$$
\begin{aligned}
Z_0 &= R_0 + jX_0 = \frac{j\omega L_1 R_1}{j\omega L_1 + R_1} = \frac{\omega^2 L_1^2 R_1 + j\omega L_1 R_1^2}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} \\
V_f &= Z_0 I_1 = \frac{j\omega L_1 R_1}{j\omega L_1 + R_1} I_1
\end{aligned}
$$

R_L，C_L ともに可変の場合，最大電力伝送定理より

$$
\begin{aligned}
R_{L,opt} &= R_0 = \frac{\omega^2 L_1^2 R_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} \\
\frac{1}{j\omega C_{L,opt}} &= -jX_0 = -\frac{j\omega L_1 R_1^2}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} \quad \rightarrow \quad C_{L,opt} = \frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{\omega^2 L_1 R_1^2} \\
P_{\max} &= \frac{|V_f|^2}{4R_0} = \frac{\omega^2 L_1^2 R_1^2}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} |I_1|^2 \frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{4\omega^2 L_1^2 R_1} = \frac{R_1}{4} |I_1|^2
\end{aligned}
$$

R_L のみ可変の場合

$$
I_L = \frac{V_f}{Z_0 + R_L + \frac{1}{j\omega C_L}} = \frac{V_f}{(R_0 + R_L) + j(X_0 - \frac{1}{\omega C_L})}
$$

R_L の実消費電力は

$$
P = R_L |I_L|^2 = \frac{R_L |V_f|^2}{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 - \frac{1}{\omega C_L})^2}
$$

P を R_L で微分すると

$$
\frac{dP}{dR_L} = \frac{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 - \frac{1}{\omega C_L})^2 - 2R_L(R_0 + R_L)}{\{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 - \frac{1}{\omega C_L})^2\}^2} |V_f|^2
$$

極値となるのは $dP/dR_L = 0$ のときで

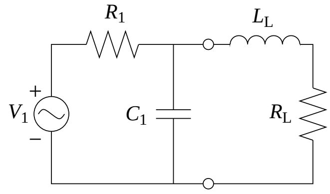
$$
(R_0 + R_L)^2 + (X_0 - \frac{1}{\omega C})^2 - 2R_L(R_0 + R_L) = 0
$$

$$
(R_0^2 - R_L^2) + (X_0 - \frac{1}{\omega C_L})^2 = 0
$$

$$
R_L = \sqrt{R_0^2 + (X_0 - \frac{1}{\omega C_L})^2} = \frac{\sqrt{(\omega^3 C_L L_1^2 R_1)^2 + \{\omega^2 C_L L_1 R_1^2 - (R_1^2 + \omega^2 L_1^2)\}^2}}{\omega C_L (R_1^2 + \omega^2 L_1^2)}
$$

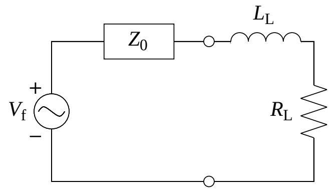
小テスト

下図の交流回路において負荷抵抗 R_L での消費電力を最大にするための R_L，L_L の最適値とそのときの消費電力を求めよ．また，R_L のみ変化できる場合の R_L の最適値を求めよ．



解答

電源をテブナン等価回路に置き換える



$$
\begin{aligned}
Z_0 &= R_0 + jX_0 = \frac{\frac{R_1}{j\omega C_1}}{\frac{1}{j\omega C_1} + R_1} = \frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} = \frac{R_1 - j\omega C_1 R_1^2}{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2} \\
V_f &= \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} V_1 = \frac{1}{1 + j\omega C_1 R_1} V_1
\end{aligned}
$$

R_L，C_L ともに可変の場合，最大電力伝送定理より

$$
\begin{aligned}
R_{L,opt} &= R_0 = \frac{R_1}{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2} \\
j\omega L_{L,opt} &= -jX_0 = \frac{j\omega C_1 R_1^2}{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2} \qquad \rightarrow \qquad L_{L,opt} = \frac{C_1 R_1^2}{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2} \\
P_{\max} &= \frac{|V_f|^2}{4R_0} = \frac{1}{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2} |V_1|^2 \frac{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2}{4R_1} = \frac{|V_1|^2}{4R_1}
\end{aligned}
$$

R_L のみ可変の場合

$$
I_L = \frac{V_f}{Z_0 + R_L + j\omega L_L} = \frac{V_f}{(R_0 + R_L) + j(X_0 + \omega L_L)}
$$

R_L の実消費電力は

$$
P = R_L |I_L|^2 = \frac{R_L |V_f|^2}{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + \omega L_L)^2}
$$

P を R_L で微分すると

$$
\frac{dP}{dR_L} = \frac{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + \omega L_L)^2 - 2R_L(R_0 + R_L)}{\{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + \omega L_L)^2\}^2} |V_f|^2
$$

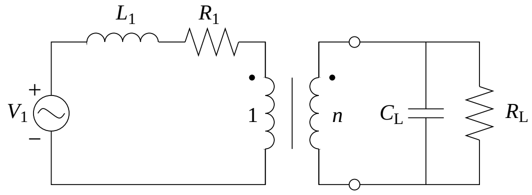
極値となるのは $dP/dR_L = 0$ のときで

$$
\begin{aligned}
&(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + \omega L_L)^2 - 2R_L(R_0 + R_L) = 0 \\
&(R_0^2 - R_L^2) + (X_0 + \omega L_L)^2 = 0 \\
&R_L = \sqrt{R_0^2 + (X_0 + \omega L_L)^2} = \frac{\sqrt{R_1^2 + \{\omega L_L(1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2) - \omega C_1 R_1^2\}^2}}{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2}
\end{aligned}
$$

電気回路 II 演習・小テスト (第 9 回)

演習

下図の交流回路において負荷抵抗 R_L での消費電力を最大にするための R_L，C_L の最適値とそのときの消費電力を求めよ．なお，変成器は理想変成器とする．



解答

図 1 に示すように 1 次側の素子を 2 次側に移し，端子 $1-1'$ から左をノルトンの等価回路に置き換えると図 2 の回路を得る．

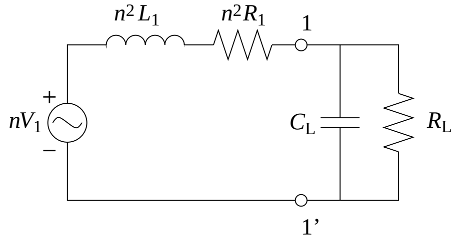


図 1

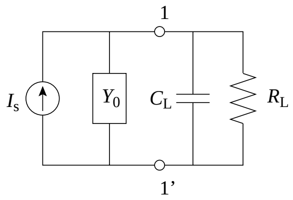


図 2

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= \left\{n^2R_1 + j\omega n^2 L_1\right\}^{-1} = \frac{1}{n^2}\frac{1}{R_1+j\omega L_1} = \frac{1}{n^2}\frac{R_1 - j\omega L_1}{R_1^2+\omega^2L_1^2} \\
&= \frac{R_1}{n^2(R_1^2+\omega^2L_1^2)} - j\frac{\omega L_1}{n^2(R_1^2+\omega^2L_1^2)} = G_0 + jB_0 \\
I_s &= Y_0(nV_1) = \frac{V_1}{n(R_1+j\omega L_1)}
\end{aligned}
$$

最大電力伝送定理より負荷のアドミタンスを Y_L とすると

$$
\begin{aligned}
&Y_{L,opt} = Y_0^* \\
&\frac{1}{R_L} + j\omega C_L = \frac{R_1}{n^2(R_1^2+\omega^2L_1^2)} + j\frac{\omega L_1}{n^2(R_1^2+\omega^2L_1^2)}
\end{aligned}
$$

よって

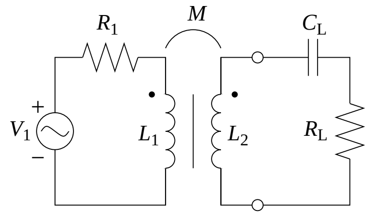
$$
\begin{aligned}
R_{L,opt} &= \frac{n^2(R_1^2+\omega^2L_1^2)}{R_1} \\
C_{L,opt} &= \frac{L_1}{n^2(R_1^2+\omega^2L_1^2)}
\end{aligned}
$$

このときの負荷で消費される電力は

$$
P = \frac{|I_s|^2}{4G_0} = \frac{|V_1|^2}{n^2(R_1^2+\omega^2L_1^2)}\frac{n^2(R_1^2+\omega^2L_1^2)}{4R_1} = \frac{|V_1|^2}{4R_1}
$$

小テスト

下図の交流回路において負荷抵抗 R_L での消費電力を最大にするための R_L，C_L の最適値とそのときの消費電力を求めよ.



解答

変成器を図 1 ようにT 形等価回路で置き換え，端子 $1-1'$ から左側をテブナン等価回路に置き換えると図 2 の回路を得る

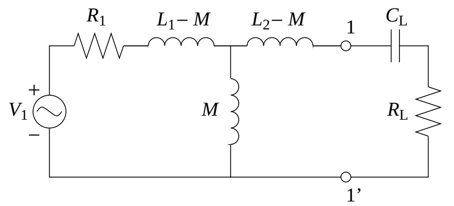


図 1

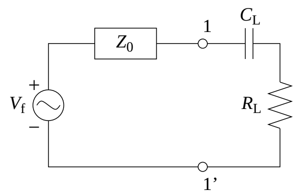


図 2

ここで，Z_0，V_f は以下の通りである

$$
\begin{aligned}
Z_0 &= j\omega(L_2 - M) + [\{R_1 + j\omega(L_1 - M)\} // j\omega M] \\
&= j\omega L_2 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega L_1} \\
&= \frac{\omega^2 M^2 R_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} + j\omega \frac{R_1^2 L_2 + \omega^2 L_1 (L_1 L_2 - M^2)}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} = R_0 + jX_0
\end{aligned}
$$

$$
V_f = \frac{j\omega M}{R_1 + j\omega L_1} V_1
$$

最大電力伝送定理より負荷のインピーダンスを Z_L とすると

$$
\begin{aligned}
&Z_{L,opt} = Z_0^* \\
&R_{L,opt} + \frac{1}{j\omega C_{L,opt}} = \frac{\omega^2 M^2 R_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} - j\omega \frac{R_1^2 L_2 + \omega^2 L_1 (L_1 L_2 - M^2)}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
R_{L,opt} &= \frac{\omega^2 M^2 R_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} \\
C_{L,opt} &= \frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{\omega^2 \left\{R_1^2 L_2 + \omega^2 L_1 (L_1 L_2 - M^2)\right\}}
\end{aligned}
$$

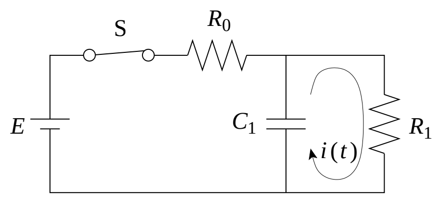
このときの負荷で消費される電力は

$$
P = \frac{|V_f|^2}{4R_0} = \frac{\dfrac{\omega^2 M^2}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} |V_1|^2}{4 \dfrac{\omega^2 M^2 R_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}} = \frac{|V_1|^2}{4R_1}
$$

電気回路 II 演習・小テスト (第 10 回)

演習

下図の回路は定常状態であるとする．いま，$t = 0$ でスイッチ S を開いたとするとき，抵抗 R_1 に流れる電流 $i(t)$ を求め，時間変化を図示せよ．また，このときの時定数 τ を求めよ．



解答

定常状態でコンデンサー C_1 にかかる電圧 V_{C1} は

$$V_{C1} = \frac{R_1 E}{R_0 + R_1}$$

であるので，コンデンサ C_1 に蓄えられている電荷 Q は

$$Q = C_1 V_{C1} = \frac{C_1 R_1 E}{R_0 + R_1}$$

である．また，$t = 0$ でスイッチ S を開いた後の回路方程式は，コンデンサ C_1 に蓄えられている電荷を $q(t)$，抵抗 R_1 に流れる電流を $i(t)$ とすると

$$R_1 i(t) = \frac{q(t)}{C}$$

であり，$i(t) = -dq(t)/dt$ という関係式を用いると

$$R_1 \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C_1} = 0$$

という微分方程式式を得る．上式の定常解 $q_s(t)$ と 過渡解 $q_t(t)$ はそれぞれ以下のようになる．

● 定常解

$$\frac{q_s(t)}{C_1} = 0 \qquad \rightarrow \qquad q_s(t) = 0$$

● 過渡解

$$R_1 \frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C_1} = 0 \qquad \rightarrow \qquad q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{C_1 R_1}} \qquad (A : \text{積分定数})$$

したがって，一般解は以下のように与えられる．

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{C_1 R_1}}$$

$t = 0$ での初期条件より積分定数 A は以下のように求まる．

$$q(0) = A = \frac{C_1 R_1 E}{R_0 + R_1}$$

以上より，電荷 $q(t)$ は

$$q(t) = \frac{C_1 R_1 E}{R_0 + R_1} e^{-\frac{t}{C_1 R_1}}$$

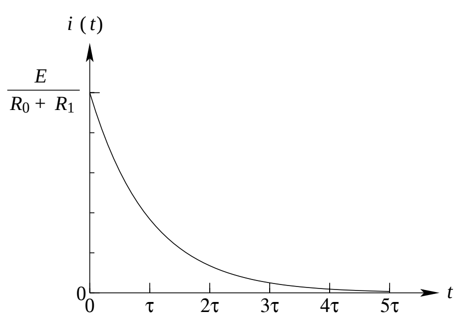
と求まるので，抵抗 R_1 に流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{C_1 R_1 E}{R_0 + R_1} \left(-\frac{1}{C_1 R_1} \right) e^{-\frac{t}{C_1 R_1}} = \frac{E}{R_0 + R_1} e^{-\frac{t}{C_1 R_1}}$$

と求まる．グラフは右図のようになる．また，時定数 τ は

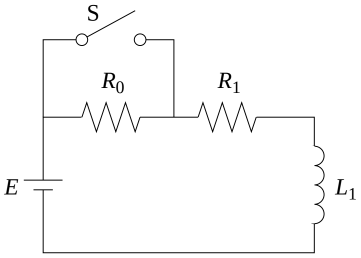
$$\tau = C_1 R_1$$

である．



小テスト

下図の回路は定常状態であるとする．いま，$t=0$ でスイッチ S を閉じたとするとき，インダクタ L_1 に流れる電流 $i(t)$ を求め，$R_0=2R_1$ として時間変化を図示せよ．また，このときの時定数 τ を求めよ．



解答

定常状態でインダクタ L_1 に流れる電流は

$$I=\frac{E}{R_0+R_1}$$

である．また，$t=0$ でスイッチ S を閉じた後の回路方程式は

$$L_1\frac{di(t)}{dt}+R_1 i(t)=E$$

である．上式の定常解 $i_s(t)$ と 過渡解 $i_t(t)$ はそれぞれ以下のようになる．

- 定常解

$$R_1 i_s(t)=E \qquad \rightarrow \qquad i_s(t)=\frac{E}{R_1}$$

- 過渡解

$$L_1\frac{di_t(t)}{dt}+R_1 i_t(t)=0 \qquad \rightarrow \qquad i_t(t)=Ae^{-\frac{R_1}{L_1}t} \qquad (A:\text{積分定数})$$

したがって，一般解は以下のように与えられる．

$$i(t)=i_s(t)+i_t(t)=\frac{E}{R_1}+Ae^{-\frac{R_1}{L_1}t}$$

$t=0$ での初期条件より積分定数 A は以下のように求まる．

$$i(0)=\frac{E}{R_1}+A=\frac{E}{R_0+R_1} \qquad \rightarrow \qquad A=\left(\frac{1}{R_0+R_1}-\frac{1}{R_1}\right)E$$

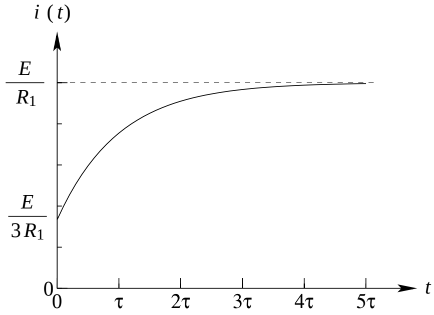
以上より，電流 $i(t)$ は

$$i(t)=\frac{E}{R_1}+\left(\frac{1}{R_0+R_1}-\frac{1}{R_1}\right)Ee^{-\frac{R_1}{L_1}t}$$

と求まる．グラフは下図のようになる．また，時定数 τ は

$$\tau=\frac{L_1}{R_1}$$

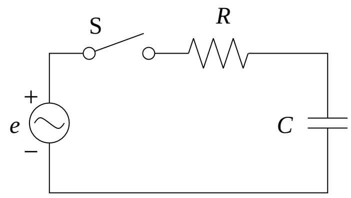
である．



電気回路 II 演習・小テスト (第 11 回)

演習

下図の回路で，$t=0$ でスイッチ S を閉じ，交流電圧 $e = E_m \sin(\omega t + \theta)$ を印加したときの回路電流 $i(t)$ を求めよ．また，過渡電流が最大となる θ の値を求めよ．



解答

コンデンサの電荷を $q(t)$ とすると，キルヒホッフの電圧則より回路方程式は以下のように与えられる．

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

電流と電荷の関係式 $i(t) = dq(t)/dt$ を用いると以下の式を得る．

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ に分離して考えると，それぞれが満たす微分方程式は

$$R\frac{dq_s(t)}{dt} + \frac{q_s(t)}{C} = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$R\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0$$

である．まず，定常解について解く．定常状態に対する解は交流回路理論を用いると，$d/dt \to j\omega$ として

$$j\omega R Q_s + \frac{Q_s}{C} = E_m e^{j\theta}$$

上式を Q_s について解くと以下のように求まる．

$$Q_s = \frac{CE_m e^{j\theta}}{1 + j\omega CR} = CE_m e^{j\theta}\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}e^{-j\phi'} = \frac{CE_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}e^{j(\theta-\phi')} \qquad \left(\phi' = \tan^{-1}(\omega CR)\right)$$

以上より，定常解は

$$q_s(t) = Q_m \sin(\omega t + \theta - \phi') \qquad \left(Q_m = \frac{CE_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\right)$$

と求まる．

一方，過渡解は

$$q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{CR}} \qquad (A\ :\ 積分定数)$$

である．したがて，電荷 $q(t)$ の一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = Q_m \sin(\omega t + \theta - \phi') + Ae^{-\frac{t}{CR}}$$

で与えられる．初期条件として $t=0$ で $q(t=0)=0$ を代入すると

$$q(0) = Q_m \sin(\theta - \phi') + A = 0 \quad \to \quad A = -Q_m \sin(\theta - \phi')$$

と求まり，回路に流れる電流 $i(t)$ は

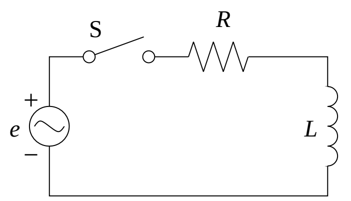
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{E_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\left\{\omega C\cos(\omega t + \theta - \phi') + \frac{1}{R}\sin(\theta - \phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\}, \qquad \left(\phi' = \tan^{-1}(\omega CR)\right)$$

また，過渡電流が最大となる θ の値は

$$\theta - \phi' = \pm\pi/2 \quad \to \quad \theta = \phi' \pm \pi/2$$

小テスト

下図の回路で，$t = 0$ でスイッチ S を閉じ，交流電圧 $e = E_m \sin(\omega t + \theta)$ を印加したときの回路電流 $i(t)$ を求めよ．また，過渡電流が流れないための θ の値を求めよ．



解答

キルヒホッフの電圧則より回路方程式は以下のように与えられる．

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

定常解 $i_s(t)$ と過渡解 $i_t(t)$ に分離して考えると，それぞれが満たす微分方程式は

$$L\frac{di_s(t)}{dt} + Ri_s(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$L\frac{di_t(t)}{dt} + Ri_t(t) = 0$$

である．まず，定常解について解く．定常状態に対する解は交流回路理論を用いると，$d/dt \to j\omega$ として

$$j\omega L I_s + RI_s = E_m e^{j\theta}$$

上式を I_s について解くと以下のように求まる．

$$I_s = \frac{E_m e^{j\theta}}{R + j\omega L} = E_m e^{j\theta}\frac{1}{\sqrt{R^1 + \omega^2 L^2}}e^{-j\phi'} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}e^{j(\theta - \phi')} \qquad \left(\phi' = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

以上より，定常解は

$$i_s(t) = I_m \sin(\omega t + \theta - \phi') \qquad \left(I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\right)$$

と求まる．

一方，過渡解は

$$i_t(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} \qquad (A\ :\ \text{積分定数})$$

である．したがて，電流 $i(t)$ の一般解は

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = I_m \sin(\omega t + \theta - \phi') + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

で与えられる．初期条件として $t = 0$ で $i(t = 0) = 0$ を代入すると

$$i(0) = I_m \sin(\theta - \phi') + A = 0 \qquad \to \qquad A = -I_m \sin(\theta - \phi')$$

と求まり，回路に流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t) \quad = \quad \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\left\{\sin(\omega t + \theta - \phi') - \sin(\theta - \phi')e^{-\frac{R}{L}t}\right\}, \qquad \left(\phi' = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

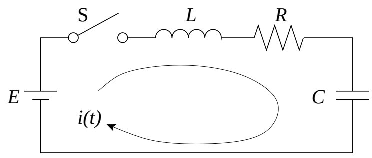
また，過渡電流が流れないための θ の値は

$$\theta - \phi' = 0 \text{ or } \pi \qquad \to \qquad \theta = \phi' \text{ or } \pi + \phi'$$

電気回路 II 演習・小テスト (第 12 回)

演習

下図の RLC 直列回路で，$R = 2\ \Omega$，$L = 1$ H，$C = 0.2$ F とする．$t = 0$ でスイッチ S を閉じ，直流電圧 $E = 10$ V を印加したときの回路に流れる電流 $i(t)$ を求めよ．



解答

回路に流れる電流を $i(t)$，コンデンサに蓄えられている電荷を $q(t)$ として，キルヒホッフの電圧則を適用すると，以下の回路方程式を得る．

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E \tag{1}$$

単位時間にコンデンサに蓄えられる電荷は回路に流れた電流に等しいので，$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を利用すると，電荷 $q(t)$ に対する以下の微分方程式を得る．

$$L\frac{d^2q(t)}{dt} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E \qquad \rightarrow \qquad \frac{d^2q(t)}{dt} + 2\frac{dq(t)}{dt} + 5q(t) = 10$$

定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ に分離して考えると，定常解に対しては

$$5q_s(t) = 10 \qquad \rightarrow \qquad q_s(t) = 2\ \mathrm{C}$$

と求まる．また，過渡解に対しては以下の微分方程式を満足する．

$$\frac{d^2q_t(t)}{dt} + 2\frac{dq_t(t)}{dt} + 5q_t(t) = 0$$

ここで，上式の解を $q_t(t) = Ae^{mt}$ と仮定すると，特性方程式は

$$m^2 + 2m + 5 = 0$$

のように書け，$m = -1 \pm j2$ と求まるので，$q_t(t)$ は以下のように書ける．

$$q_t(t) = e^{-t}\left(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t\right)$$

したがって，$q(t)$ の一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 2 + e^{-t}\left(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t\right)$$

であり，電流 $i(t)$ は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq_t(t)}{dt} = -e^{-t}\left(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t\right) + e^{-t}\left(-2A_1 \sin 2t + 2A_2 \cos 2t\right) \\ &= e^{-t}\left\{(-A_1 + 2A_2)\cos 2t + (-2A_1 - A_2)\sin 2t\right\} \end{aligned}$$

$t = 0$ で $q(0) = 0$，$i(0) = 0$ という初期条件を用いると

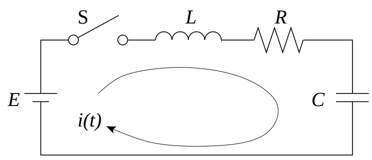
$$\begin{aligned} q(0) &= 2 + A_1 = 0 \\ i(0) &= -A_1 + 2A_2 = 0 \end{aligned}$$

したがって，$A_1 = -2$，$A_2 = -1$ である．よって，電流 $i(t)$ は以下のように求まる．

$$i(t) = e^{-t}\left\{(-A_1 + 2A_2)\cos 2t + (-2A_1 - A_2)\sin 2t\right\} = 5e^{-t}\sin 2t\ \mathrm{A}$$

小テスト

下図の RLC 直列回路で，$R = 5\ \Omega$，$L = 2\ \mathrm{H}$，$C = 0.5\ \mathrm{F}$ とする．$t = 0$ でスイッチ S を閉じ，直流電圧 $E = 12\ \mathrm{V}$ を印加したときの回路に流れる電流 $i(t)$ を求めよ．



解答

回路に流れる電流を $i(t)$，コンデンサに蓄えられている電荷を $q(t)$ として，キルヒホッフの電圧則を適用すると，以下の回路方程式を得る．

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E \tag{2}$$

単位時間にコンデンサに蓄えられる電荷は回路に流れた電流に等しいので，$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を利用すると，電荷 $q(t)$ に対する以下の微分方程式を得る．

$$L\frac{d^2q(t)}{dt} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad 2\frac{d^2q(t)}{dt} + 5\frac{dq(t)}{dt} + 2q(t) = 12$$

定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ に分離して考えると，定常解に対しては

$$2q_s(t) = 12 \quad \rightarrow \quad q_s(t) = 6\ \mathrm{C}$$

と求まる．また，過渡解に対しては以下の微分方程式を満足する．

$$2\frac{d^2q_t(t)}{dt} + 5\frac{dq_t(t)}{dt} + 2q_t(t) = 0$$

ここで，上式の解を $q_t(t) = Ae^{mt}$ と仮定すると，特性方程式は

$$2m^2 + 5m + 2 = (2m+1)(m+2) = 0$$

のように書け，$m = -1/2, -2$ と求まるので，$q_t(t)$ は以下のように書ける．

$$q_t(t) = A_1e^{-t/2} + A_2e^{-2t}$$

したがって，$q(t)$ の一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 6 + A_1e^{-t/2} + A_2e^{-2t}$$

であり，電流 $i(t)$ は以下のように求まる．

$$i(t) \quad = \quad \frac{dq_t(t)}{dt} = -\frac{A_1}{2}e^{-t/2} - 2A_2e^{-2t}$$

$t = 0$ で $q(0) = 0$，$i(0) = 0$ という初期条件を用いると

$$q(0) = 6 + A_1 + A_2 = 0$$
$$i(0) = -\frac{A_1}{2} - 2A_2 = 0$$

したがって，$A_1 = -8$，$A_2 = 2$ である．よって，電流 $i(t)$ は以下のように求まる．

$$i(t) = -\frac{A_1}{2}e^{-t/2} - 2A_2e^{-2t} = 4\left(e^{-t/2} - e^{-2t}\right)\ \mathrm{A}$$

電気回路 II 演習・小テスト (第 13 回)

演習

(1)，(2)，(3) のラプラス変換と (4)，(5) のラプラス逆変換を求めよ．

$$(1)\ f_1(t) = e^{j\omega t},\quad (2)\ f_2(t) = \cos(\omega t),\quad (3)\ f_3(t) = \begin{cases} t/T & (0 \le t \le T) \\ 0 & (t < 0, t > T) \end{cases}$$

$$(4)\ F_4(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)},\quad (5)\ F_5(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}$$

解答

(1) $f_1(t) = e^{\pm j\omega t}$

$$F_1(s) = \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s\mp j\omega)t}dt = \left[-\frac{e^{-(s\mp j\omega)t}}{(s\mp j\omega)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s\mp j\omega}$$

(2) $f_1(t) = \cos\omega t = \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$

$$\begin{aligned} F_2(s) &= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-(s-j\omega)t} + e^{-(s+j\omega)t}\right)dt \quad \left(= \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-(s-j\omega)t}}{(s-j\omega)} - \frac{e^{-(s+j\omega)t}}{(s+j\omega)}\right]_0^\infty\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{2}\frac{(s+j\omega)+(s-j\omega)}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} F_3(s) &= \int_0^\infty f_3(t)dt = \int_0^T \frac{t}{T}e^{-st}dt = \left[\frac{t}{T}\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^T + \int_0^T \frac{1}{sT}e^{-st}dt = -\frac{e^{-Ts}}{s} + \left[\frac{e^{-st}}{-s^2T}\right]_0^T \\ &= -\frac{e^{-Ts}}{s} + \frac{1-e^{-Ts}}{Ts^2} \end{aligned}$$

(4) 留数演算から求めると

$$\begin{aligned} f_4(t) &= (s+1)F_4(s)e^{st}\big|_{s=-1} + (s+2)F_4(s)e^{st}\big|_{s=-2} = \left.\frac{3s+4}{s+2}\right|_{s=-1} e^{-t} + \left.\frac{3s+4}{s+1}\right|_{s=-2} e^{-2t} \\ &= e^{-t} + 2e^{-2t} \end{aligned}$$

(5) 留数演算から求めると

$$\begin{aligned} f_5(t) &= \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}\left\{s^2F_5(s)e^{st}\right\}\Big|_{s=0} + (s+1)F_5(s)e^{st}\big|_{s=-2} \\ &= \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s+2}e^{st}\right\}\Big|_{s=0} + \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=-2} e^{-2t} \\ &= \left(\frac{t}{s+2} + \frac{-e^{st}}{(s+2)^2}\right)\Big|_{s=0} + \frac{e^{-2t}}{4} \\ &= \frac{2t-1+e^{-2t}}{4} \end{aligned}$$

小テスト

(1)，(2)，(3) のラプラス変換と (4)，(5) のラプラス逆変換を求めよ．

$$(1)\ f_1(t)=e^{\beta t}\quad (2)\ f_2(t)=\sinh\beta t=\frac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{2},\quad (3)\ f_3(t)=\begin{cases}1 & (0\le t\le T)\\ 0 & (t<0, t>T)\end{cases}$$

$$(4)\ F_4(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)},\quad (5)\ F_5(s)=\frac{2}{(s+1)^2-2^2}$$

解答

(1)

$$F_1(s) = \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s-\beta)t}dt=\left[-\frac{e^{-(s-\beta)t}}{(s-\beta)}\right]_0^\infty=\frac{1}{s-\beta}$$

(2)

$$\begin{aligned}F_2(s) &= \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(e^{-(s-\beta)t}-e^{-(s+\beta)t}\right)dt\quad\left(=\frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-(s-\beta)t}}{(s-\beta)}+\frac{e^{-(s+\beta)t}}{(s+\beta)}\right]_0^\infty\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\beta}-\frac{1}{s+\beta}\right)=\frac{1}{2}\frac{(s+\beta)-(s-\beta)}{s^2-\beta^2}=\frac{\beta}{s^2-\beta^2}\end{aligned}$$

(3)

$$F_3(s)=\int_0^\infty f_3(t)e^{-st}=\int_0^T 1\cdot e^{-st}dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^T=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

(4) 留数演算から求めると

$$\begin{aligned}f_4(t) &= (s+1)F_4(s)e^{st}\big|_{s=-1}+(s+2)F_4(s)e^{st}\big|_{s=-2}=\left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-1}e^{-t}+\left.\frac{1}{s+1}\right|_{s=-2}e^{-2t}\\ &= e^{-t}-e^{-2t}\end{aligned}$$

(5) (2) のラプラス変換式で $\beta=1$ とすると

$$\mathcal{L}\{\sinh 2t\}=\frac{2}{s^2-2^2}\to\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-2^2}\right\}=\sinh 2t$$

推移定理を用いて $s\to s+1$ とすると

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2-2^2}\right\}=e^{-t}\sinh 2t$$

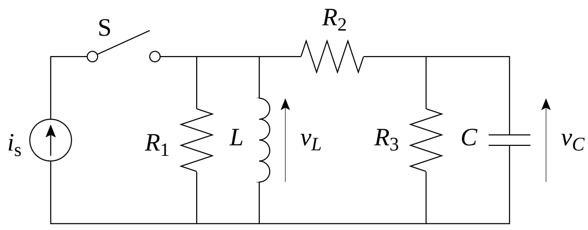
したがて

$$f_5(t)=e^{-t}\sinh 2t$$

電気回路 II 演習・小テスト (第 14 回)

演習

下図の回路で，$t=0$ でスイッチ S を閉じた後の電圧 v_R，v_C の時間変化を求めよ．$R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = 1\ \Omega$，$R_3 = 1\ \Omega$，$L_{=}1$ H，$C = 1$ F，$I_s = 2$ A，コイルの初期電流は 0 A，コンデンサの初期電荷は 0 C とする．



解答

節点方程式は以下のように書ける

$$\frac{1}{R_1}v_L + \frac{1}{L}\int v_L dt + \frac{v_L - v_C}{R_2} = I_s u(t)$$
$$\frac{v_C - v_L}{R_2} + \frac{1}{R_3}v_C + C\frac{dv_C}{dt} = 0$$

上式をラプラス変換すると

$$\frac{1}{R_1}V_L(s) + \frac{1}{L}\left(\frac{V_L(s)}{s} + \frac{1}{s}\int v_L(t)dt\bigg|_{t=0}\right) + \frac{V_L(s) - V_C(s)}{R_2} = \frac{I_s}{s}$$
$$\frac{V_C(s) - V_L(s)}{R_2} + \frac{1}{R_3}V_C(s) + C\left(sV_C(s) - v_C(0)\right) = 0$$

初期条件を考慮して，具体的な数値を代入して，行列形式で表現すると

$$\begin{bmatrix} 2+1/s & -1 \\ -1 & 2+s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$V_L(s)$，$V_C(s)$ について解くと

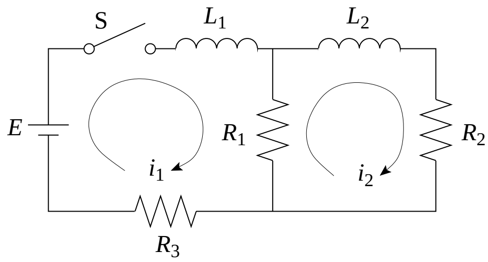
$$V_L(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$
$$V_C(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$V_L(s)$，$V_C(s)$ をラプラス逆変換すると

$$v_L(t) = e^{-t} + te^{-t} = (1+t)e^{-t}\ \text{[V]}$$
$$v_C(t) = te^{-t}\ \text{[V]}$$

小テスト

下図の回路で，$t=0$ でスイッチ S を閉じた後の電流 i_R，i_C の時間変化を求めよ．$R_1=2\ \Omega$，$R_2=4\ \Omega$，$R_3=1\ \Omega$，$L_1=1$ H，$L_2=1$ H，$E=7$ V，コイルの初期電流は 0 A とする．



解答

閉路方程式は以下のように書ける

$$
\begin{aligned}
&L_1\frac{di_1}{dt}+R_1(i_1-i_2)+R_3i_1=Eu(t)\\
&R_1(i_2-i_1)+L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2=0
\end{aligned}
$$

上式をラプラス変換すると

$$
\begin{aligned}
&L_1(sI_1(s)-i_1(0))+R_1(I_1(s)-I_2(s))+R_3I_1(s)=\frac{E}{s}\\
&R_1(I_2(s)-I_1(s))+L_2(sI_2(s)-i_2(0))+R_2I_2(s)=0
\end{aligned}
$$

初期条件を考慮して，具体的な数値を代入して，行列形式で表現すると

$$
\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ -2 & s+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7/s \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$V_L(s)$，$V_C(s)$ について解くと

$$
\begin{aligned}
I_1(s) &= \frac{7(s+6)}{s(s+2)(s+7)}\\
I_2(s) &= \frac{14}{s(s+2)(s+7)}
\end{aligned}
$$

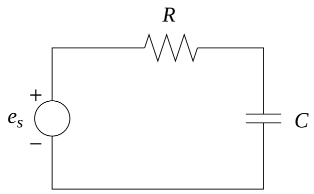
$I_1(s)$，$I_2(s)$ のラプラス逆変換は留数演算より

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= \left(sI_1(s)e^{st}\right)\Big|_{s=0}+\left((s+2)I_1(s)e^{st}\right)\Big|_{s=-2}+\left((s+7)I_1(s)e^{st}\right)\Big|_{s=-7}\\
&= 3-\frac{14}{5}e^{-2t}-\frac{1}{5}e^{-7t}\ \text{[A]}\\
i_2(t) &= \left(sI_2(s)e^{st}\right)\Big|_{s=0}+\left((s+2)I_2(s)e^{st}\right)\Big|_{s=-2}+\left((s+7)I_2(s)e^{st}\right)\Big|_{s=-7}\\
&= 1-\frac{7}{5}e^{-2t}+\frac{2}{5}e^{-7t}\ \text{[A]}
\end{aligned}
$$

電気回路 II 演習・小テスト (第 15 回)

演習

下図の RC 直列回路で，以下の 2 種類の入力電圧に対する電流の過渡応答を求めよ．なお，$R = 1$ Ω，$C = 0.5$ F，コンデンサの初期電荷は 0 とする．
(1) $e_s(t) = 5e^{-t}\sin 2t \cdot u(t)$ [V]，(2) $e_s(t) = \delta(t)$ [V]



時間があれば，(2) の結果を利用して (1) の結果を確認せよ．(採点はしない)

$$i(t) = \int_0^t h(\tau)\, e_s(t-\tau)\, d\tau \qquad (h(t) \text{ は回路のインパルス応答})$$

解答

電源のラプラス変換を $E_s(t)$ と書くと，回路方程式とそのラプラス変換は以下のようになる．

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = e_s(t)$$

$$\left(R + \frac{1}{sC}\right) I(s) = E_s(s) \qquad \rightarrow \qquad I(s) = \frac{E_s(s)}{\left(R + \frac{1}{sC}\right)} = \frac{1}{R}\frac{sE_s(s)}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{sE_s(s)}{s+2}$$

(1) $\mathscr{L}\{5e^{-t}\sin(2t)\} = \dfrac{5 \cdot 2}{(s+1)^2 + 2^2}$ であるので，

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{s}{s+2} \cdot \frac{10}{(s+1)^2+2^2} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2 s + K_3}{(s+1)^2+2^2} = \frac{-4}{s+2} + \frac{4s+10}{(s+1)^2+2^2} \\ &= \frac{-4}{s+2} + \frac{4(s+1) + 3\cdot 2}{(s+1)^2+2^2} \\ i(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = -4e^{-2t} + e^{-t}\left(4\cos 2t + 3\sin 2t\right) \\ &= -4e^{-2t} + 5e^{-t}\sin(2t+\phi) \text{ [A]} \qquad (\phi = \tan^{-1}\frac{4}{3}) \end{aligned}$$

(2) $\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$ であるので，インパルス応答は

$$I(s) = \frac{s}{s+2} = 1 + \frac{-2}{s+2} \qquad \rightarrow \qquad i(t) = h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = \delta(t) - 2e^{-2t} \text{ [A]}$$

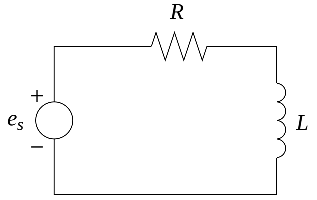
(3)

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t h(\tau)\, e_s(t-\tau)\, d\tau \\ &= \int_0^t 5\left(\delta(\tau) - 2e^{-2\tau}\right) e^{-(t-\tau)} \sin 2(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t 5\delta(\tau) e^{-(t-\tau)} \sin 2(t-\tau) d\tau - 10e^{-2t}\int_0^t e^{(t-\tau)} \sin 2(t-\tau) d\tau \\ &= 5e^{-t}\sin 2t - 10e^{-2t}\int_t^0 e^x \sin 2x \cdot (-dx) \\ &= 5e^{-t}\sin 2t - 10e^{-2t}\int_0^t e^x \sin 2x dx \\ &= 5e^{-t}\sin 2t - 10e^{-2t}\frac{1}{5}\left(e^t \sin 2t - 2e^t \cos 2t + 2\right) \\ &= 5e^{-t}\sin 2t - 2e^{-t}\sin 2t + 4e^{-t}\cos 2t - 4e^{-2t} \\ &= -4e^{-2t} + e^{-t}\left(4\cos 2t + 3\sin 2t\right) \text{ [A]} \end{aligned}$$

小テスト

下図の RL 直列回路で，以下の 2 つの入力電圧に対する電流の過渡応答を求めよ．なお，$R=1\,\Omega$，$L=0.2\,\mathrm{H}$，コイルの初期電流は 0 とする．

(1) $e_s(t)=2e^{-3t}u(t)$ [V]，(2) $e_s(t)=\delta(t)$ [V]



時間があれば，(2) の結果を利用して (1) の結果を確認せよ．(採点はしない)

$$i(t)=\int_0^t h(\tau)\,e_s(t-\tau)\,d\tau \qquad (h(t)\text{ は回路のインパルス応答})$$

解答

電源のラプラス変換を $E_s(t)$ と書くと，回路方程式とそのラプラス変換は以下のようになる．

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=e_s(t)$$

$$(R+sL)\,I(s)=E_s(s) \qquad \rightarrow \qquad I(s)=\frac{E_s(s)}{(sL+R)}=\frac{1}{L}\frac{E_s(s)}{s+\frac{R}{L}}=\frac{5}{s+5}E_s(s)$$

(1) $\mathcal{L}\{2e^{-3t}\}=\dfrac{2}{s+3}$ であるので，

$$I(s)=\frac{5}{s+5}\cdot\frac{2}{s+3}=\frac{10}{(s+3)(s+5)}=\frac{5}{s+3}-\frac{5}{s+5}$$

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}=5\left(e^{-3t}-e^{-5t}\right)\ [\mathrm{A}]$$

(2) $\mathcal{L}\{\delta(t)\}=1$ であるので，インパルス応答は

$$I(s)=\frac{5}{s+5} \qquad \rightarrow \qquad i(t)=h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}=5e^{-5t}\ [\mathrm{A}]$$

(3) インンパルス応答から (1) の結果を求めると

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t h(\tau)\,e_s(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t 5e^{-5\tau}\cdot 2e^{-3(t-\tau)}d\tau \\ &= 10e^{-3t}\int_0^t e^{-2\tau}d\tau=10e^{-3t}\left[\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right]_0^t=5e^{-3t}\left(1-e^{-2t}\right) \\ &= 5\left(e^{-3t}-e^{-5t}\right)\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$