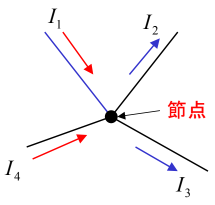
回路の節点と閉路



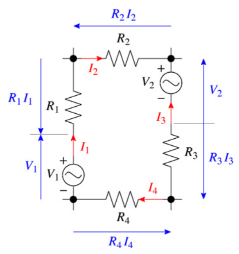
キルヒホッフの電流則

回路の任意の節点に流れ込む電流の和と流れ出す電流の和は等しい

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3$$

or

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$$



キルヒホッフの電圧則

回路の任意の閉路をとってその閉路の中の各素子の電圧の一方向の向きの和と他方の向きの和は等しい

$$V_1 + R_3 I_3 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + V_2 + R_4 I_4$$

or

$$-V_1 + R_1 I_1 + R_2 I_2 + V_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4 = 0$$

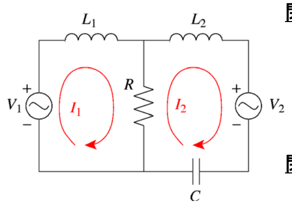
or

$$V_1 - V_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + E_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4$$

閉路方程式

解析手順

- 回路の独立した閉回路を設定
- 閉回路の閉路電流を定める
- キルヒホッフの電圧則より各閉路の方程式を立てる
- 方程式を連立させて閉路電流を求める



閉路方程式

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + R(I_1 - I_2)$$

$$-V_2 = R(I_2 - I_1) + j\omega L_2 I_2 + \frac{1}{j\omega C} I_2$$

閉路行列

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 + R & -R \\ -R & R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

閉路行列の一般的な形

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

（既知の）駆動電源　　（未知の）閉路電流

閉路行列の特徴

- 対称行列

$$Z_{ij} = Z_{ji}$$

- 対角成分は正、非対角成分は負または零

$$Z_{ii} > 0, \quad Z_{ij(i \neq j)} \leq 0$$

- 対角成分はその行の非対角成分の総和の大きさよりも大きい

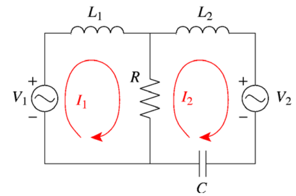
$$Z_{ii} \geq -\sum_{i \neq j} Z_{ij}$$

- 方程式の数（行列のサイズ）は閉路の数に等しい

閉路方程式の簡便な立て方

1. 各閉路の電圧源の和を左辺ベクトルとする
   (閉路電流に対する電圧の向きに注意する)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} =$$



2. 各閉路の素子のインピーダンスの和を
   （正符号として）対角成分とする

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 + R & ? \\ ? & R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

3. 閉路が接している境界にある素子のインピーダンスを
   （負符号として）対応する非対角成分に書く

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 + R & -R \\ -R & R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Cramer の公式 (連立一次方程式の解法)

$$\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+j & -1\\ -1 & 1-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix}V_1\\-V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} j\omega L_1+R & -R\\ -R & R+j\omega L_2+\dfrac{1}{j\omega C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}$$

$V_1=2\,\mathrm{V},\ V_2=1\,\mathrm{V},\ f=50\,\mathrm{Hz}$

$R=1\,\Omega,\ L_1=\dfrac{1}{100\pi}\,\mathrm{H},\ L_2=\dfrac{1}{50\pi}\,\mathrm{H},\ C=\dfrac{1}{150\pi}\,\mathrm{F}$

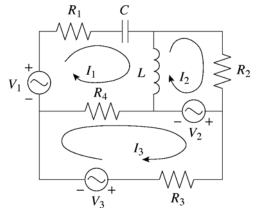
行列の行列式を求める

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+j & -1\\ -1 & 1-j\end{vmatrix}=(1+j)(1-j)-(-1)\times(-1)=2-1=1$$

閉路電流は以下のように求まる

$$I_1=\frac{\begin{vmatrix}V_1 & -1\\ -V_2 & 1-j\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1-j\end{vmatrix}}{1}=2(1-j)-(-1)\times(-1)=1-2j\ \mathrm{A}$$

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix}1+j & V_1\\ -1 & -V_2\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1+j & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}}{1}=(1+j)\times(-1)-2\times(-1)=1-j\ \mathrm{A}$$

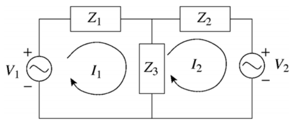


$$\begin{bmatrix}V_1\\-V_2\\V_2-V_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1+\dfrac{1}{j\omega C}+j\omega L+R_4 & -j\omega L & -R_4\\ -j\omega L & R_2+j\omega L & 0\\ -R_4 & 0 & R_4+R_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}$$

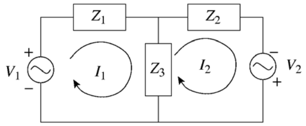
整理する

$$\begin{bmatrix}V_1\\-V_2\\V_2-V_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(R_1+R_4)+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right) & -j\omega L & -R_4\\ -j\omega L & R_2+j\omega L & 0\\ -R_4 & 0 & R_3+R_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}$$

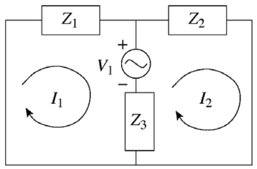
例題) 次の回路の閉路方程式を立てよ



$$\begin{bmatrix}V_1\\-V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_1+Z_3 & -Z_3\\ -Z_3 & Z_2+Z_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_1+Z_3 & -Z_3\\ -Z_3 & Z_2+Z_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}-V_1\\V_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_1+Z_3 & -Z_3\\ -Z_3 & Z_2+Z_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}$$

例題) 以下の行列方程式を解け

$$\begin{bmatrix}6\\-6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-j & -j & 0\\ -j & 1+j & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta&=(1-j)(1+j)\times 2+(-j)\times 0\times 0+0\times(-j)\times 0\\ &\quad-0\times(1+j)\times 0-0\times 0\times(1-j)-2\times(-j)\times(-j)\\ &=4+2=6\end{aligned}$$

$$I_1=\frac{\begin{vmatrix}6 & -j & 0\\ -6 & 1+j & 0\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{6\times(1+j)\times 2-2\times(-j)\times(-6)}{\Delta}=\frac{12}{6}=2$$

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix}1-j & 6 & 0\\ -j & -6 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}}{\Delta}\qquad I_3=\frac{\begin{vmatrix}1-j & -j & 6\\ -j & 1+j & -6\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}}{\Delta}$$