課題 6　1 変数の非線形方程式を解く

1 変数の非線形方程式を解くため二分法およびニュートン・ラフソン法のプログラムを作成し，以下の方程式の解を求めよ．

$$f(x) \quad = \quad x^3 - 5x^2 + 5x + 1 \tag{1}$$

(実行例)

探索範囲を $[-10, 10]$ とし，二分法では区間幅 0.2 ごとに解を求め，ニュートン法では 0.5 刻みで初期解を変えて解を求めている．

```
#./bisec.out -10 10 0.2
x =   -0.1700864866,  f(x) = -1.920199e-12
x =    1.6888921825,  f(x) = -7.830039e-13
x =    3.4811943041,  f(x) = -2.099293e-12
# ./newton.out -10 10 0.5
x =   -0.1700864866, f(x) = -7.535205e-17
x =    1.6888921825, f(x) = -2.740863e-16
x =    3.4811943041, f(x) = -1.013079e-15
```

(ヒント)

1. **二分法**
連続関数 $f(x)$ がある区間 $[x_1,\ x_2]$ の間に $f(x) = 0$ を満たす解 $x = x_s$ がただひとつ存在すると仮定する．このとき，$f(x_1)$ と $f(x_2)$ は互いに異符号の値でなければならない．次に，x_1 と x_2 の中点を $x_3 = (x_1 + x_2)/2$ として，$f(x_3)$ の値を求める．このとき $f(x_1)$ と $f(x_3)$ が互いに異符号の値であれば x_s は x_1 と x_3 の間に，互いに同符号であれば x_s は x_3 と x_2 の間にあることがわかり解の存在範囲を 1/2 にできる．この操作を繰り替えすことで解の存在範囲を十分狭い範囲に特定することができ，指定した精度で解 x_s を得ることができる．実際には，まずある範囲に解が存在するかを知るために，解の探索範囲を適当に分割し，各区間の両端での $f(x)$ の値が互いに異符号であれば解が存在するとして二分法を適用することがよく行われる．

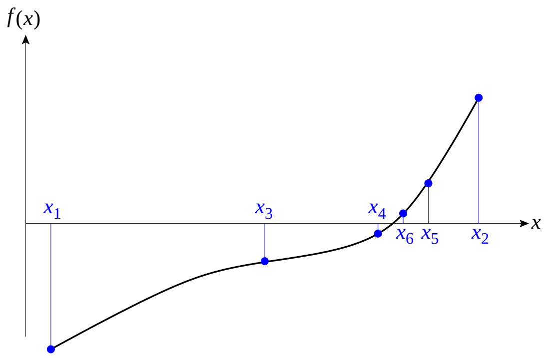
2. **ニュートン・ラフソン法**
いま $f(x)$ が連続で 1 階微分可能であると仮定する．このとき適当な初期解 (近似解) x_1 を考え，その点での関数を 1 次関数として近似するとその 1 次関数は

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \tag{2}$$

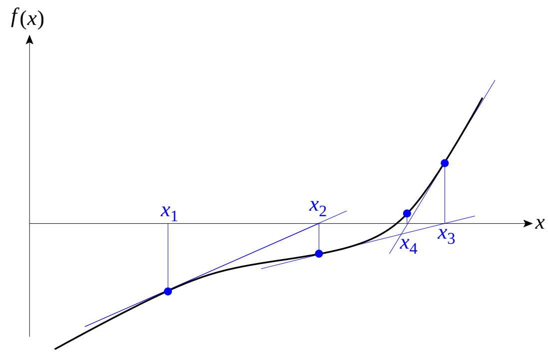
で与えられる．この関数の $y = 0$ の解は

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{3}$$

で与えられ，これを次の近似解 x_2 として同様な操作を繰り返すと，近似解は真の解に近づいていく．実際には，初期解によって収束する解が異なったり，収束しなかったりするため，探索範囲内で初期解を適当に変えながら解の探索を行う．



二分法



ニュートン法