第9回室蘭連続講演会

(測度) 距離空間の p ラプラシアンと無限大ラプラシアンの固有値について

三石 史人 (福岡大学)

mitsuishi [あっと] fukuoka-u.ac.jp

2023 年 3 月 27 日–3 月 29 日

概要. 1999 年, Juutinen-Lindqvist-Manfredi および Fukagai-Ito-Narukawa は, 独立に, ユークリッド空間のドメインの p ラプラシアンのディリクレ第一固有値の $(1/p)$ 乗は, p を無限大に送ると, ドメインの内接半径の逆数に収束する事を示した. 彼らは更に, 固有関数の収束についても論じており, 極限関数が満たす微分方程式も得ている.

本講演では, 主に二つの内容について話したい. (1) 固有値の極限問題. (2) 固有関数の極限が満たす方程式の問題.

(1) は閉リーマン多様体の場合に Grosjean によって拡張されており, 更に Honda や Ambrosio-Honda によって (リーマン幾何の観点から十分良い) 特異空間に拡張されている. 我々は (特異空間上で) 問題 (1) の「第 k 固有値版」について論じたい. ただし, p ラプラシアンの非線形性から, そもそも「第 k 固有値」という概念が存在しない. この様な事情から, 問題を適切に解釈する必要がある. それを適当な幾何学的背景を用いて説明する. (2) の方程式は「無限大ラプラシアンの主固有値方程式」と呼ばれる. 講演者と沖縄科学技術大学院大学の Liu 氏によって, この方程式の「距離空間」上での定式化を与える事ができた. 講演ではその解説と距離空間上の無限大ラプラシアンの持つ基本性質について論じたい.

概要の概要. [13], [4] のとある主張および, それらの拡張 [7], [11], [1] に着想を得て行った仕事 [17], [15] の概説をする. 非常に大事なスパイスとして, [6], [16] があるので, それも紹介したい. 大きな流れとしては, [17] と [15] は繋がるはずであるが, まだそこまでできていない. 従って, (たぶん講演では大きな事を言うが, 実際できている事を並べる限り) まとまりのない雑多な解説になってしまうかもしれない.

本稿について. 主結果を述べる為の用語の定義と背景やコメントを書く. ページ数が長くなるので, 証明は省いた.

1. 用語や記号や簡単な命題など

距離空間 (X, d) と $x \in X$ と $r > 0$ に対し,
$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$
と定める. これを x を中心とする半径 r の開球と呼ぶ.

関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し,
$$\mathrm{Lip}(f) := \sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}$$
と定め, これを f の**リプシッツ定数**という.[*1]
$$\mathrm{Lip}(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid \mathrm{Lip}(f) < \infty\}$$
と定め, この元を**リプシッツ関数**という. また,
$$\mathrm{Lip}_b(X) = \{f \in \mathrm{Lip}(X) \mid f \text{ is bounded}\}$$
とする.

$f : X \to \mathbb{R}$ と $x \in X$ に対し,
$$\mathrm{lip}_a(f)(x) := \lim_{r\to 0+} \mathrm{Lip}(f|_{B_r(x)}) \quad \in [0, +\infty]$$
と定め, これを f の x における asymptotic Lipschitz constant (**漸近的リプシッツ定数**) と呼ぶ. $\mathrm{lip}_a f : X \to [0, +\infty]$ は Borel 可測である.

更に,
$$|\nabla f|(x) = \lim_{r\to 0+} \sup_{y\in B_r(x)\setminus\{x\}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}$$
とし,
$$|\nabla^+ f|(x) = \lim_{r\to 0+} \sup_{y\in B_r(x)\setminus\{x\}} \frac{\max\{f(y) - f(x), 0\}}{d(x, y)}$$
とし,
$$|\nabla^- f|(x) = |\nabla^+(-f)|(x)$$
とする. 順番に slope, superslope, subslope という.

明らかに,
$$\max\{|\nabla^+ f|(x), |\nabla^- f|(x)\} = |\nabla f|(x) \leq (\mathrm{lip}_a f)(x) \leq \mathrm{Lip}(f)$$
が成り立つ.

$\mathrm{diam}\, X = \sup_{x,y\in X} d(x, y)$ を X の**直径** (diameter) という. 開集合 $A \subset X$ に対し,
$$\mathrm{inrad}\, A = \sup_{x\in A} d(\partial A, x)$$
と定める. これは**内半径** (内接半径/inscribed radius/inradius) と呼ばれる. A に含まれる開球体の半径の最大値である.

Lemma 1.1. 開集合 $A \subset X$ と $f \in \mathrm{Lip}(X)$ に対し, もしも $\sup_{x\in X} |f(x)| = 1$ かつ $f = 0$ on $X \setminus A$ が成り立てば,
$$(\mathrm{inrad}\, A)^{-1} \leq \mathrm{Lip}(f)$$
が成り立つ.

[*1] ただし, $\sup \emptyset = 0$ と約束する. 特に, X が一点空間なら, $\mathrm{Lip}(f) = 0$ である.

2. 背景や主結果など

2.1. p ラプラシアンと無限大ラプラシアン. $1 \le p < \infty$ とする (すぐあとで, $p \neq 1$ とする). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ を与える. このとき,

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

を u の p **ラプラシアン** (p-Laplacian) という. $p = 2$ のときは通常のラプラシアン

$$\Delta_2 u = \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

に他ならない.

また,

$$\Delta_\infty u = \operatorname{Hess}(u)(\nabla u, \nabla u) = \frac{1}{2} \left\langle \nabla |\nabla u|^2, \nabla u \right\rangle$$

を u の**無限大ラプラシアン** (infinity-Laplpacian/∞-Laplacian) という.

これらの operators の間には, 次の関係がある:

$$\Delta_p u = (p-2)|\nabla u|^{p-4} \Delta_\infty u + |\nabla u|^{p-2} \Delta u.$$

2.2. 固有方程式. 方程式

$$-\Delta_p u = 0 \text{ in } \Omega \tag{2.1}$$

を p **調和方程式**と呼び, その解を p **調和関数** (p-harmonic function) という. (2.1) は p エネルギー

$$\mathcal{E}_p(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, d\mathcal{L}^n$$

の Euler-Lagrange 方程式として得られる. より厳密には変分法をソボレフ空間 $W^{1,p}(\Omega)$ の上で展開し, 変分を与える関数を $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ の範囲で取る.

更に, 次の束縛条件

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1 \quad \big(\text{あるいは } \||\nabla u|\|_{L^p(\Omega)} = 1\big)$$

の下で変分法を展開すると,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{in } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

という方程式を得る. これを Δ_p の**固有方程式**と呼ぶ. ここで, $\lambda \ge 0$ は定数である. この解 (λ, u) に対し, λ を **(ディリクレ) 固有値**, u を**固有関数**と呼ぶ.

Remark 2.1. (1) より厳密には, (2.1) や (2.2) は**弱解** (weak solution) の意味で理解する. 例えば, (2.2) の意味はあくまでも

$$-\int_\Omega \left\langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi \right\rangle + \lambda |u|^{p-2} u \varphi \, d\mathcal{L}^n = 0 \text{ for all } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

という意味である (従って, $\nabla u = \mathbf{0}$ なる点があっても問題ない). ちなみに, 弱解は**粘性解** (viscosity solution) でもあり, 逆も然りである.

(2) $p \neq 2$ の場合, Δ_p は非線形 operator である. 特に, Δ_p の固有値全体が離散かどうか**誰も知らない**.[*2] ただし, Ω が bounded domain であれば, **第一正固有値**という概念が確定する

[*2] そのはずである. 最も単純だと思われる区間の場合にも知られていないはず. もし筆者の勘違いであればどなたか教えて欲しい.

(ただし, $1 < p < \infty$ とする).[*3] すなわち, レイリー商 (Rayleigh quotient):

$$\lambda_{1,p}^D(\Omega) := \inf_{\substack{u \in C_0^\infty(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\mathcal{E}_p(u)}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}$$

を考えると, $\lambda_{1,p}^D(\Omega) > 0$ かつ $\lambda_{1,p}^D(\Omega)$ は Δ_p の固有値であり, $0 < \lambda < \lambda_{1,p}^D(\Omega)$ に対し, λ は決して固有値にならない.

講演で紹介したい仕事の源泉となる定理は以下である:

Theorem 2.2 ([4], [13]). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を bounded domain とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1)

$$\exists \lim_{p \to \infty} \lambda_{1,p}^D(\Omega)^{1/p} = \frac{1}{\operatorname{inrad}\Omega} =: \Lambda_\infty^D(\Omega). \tag{2.3}$$

(2) Let $u_p \in W^{1,p}(\Omega)$ be a weak solution to (2.2) for the 1st positive eigenvalue $\lambda = \lambda_{1,p}^D(\Omega)$ with $\|u_p\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Then $\exists \{p_j\}_{j=1}^\infty$ a subsequence of $\{p\}_{p>1}$ and $\exists u \in C(\Omega)$ such that

$$\exists \lim_{j \to \infty} u_{p_j} = u$$

satisfying

$$\min\{-\Delta_\infty u, |\nabla u| - \Lambda_\infty^D(\Omega) u\} = 0 \text{ in } \Omega \tag{2.4}$$

in the viscosity sense.

最後に登場した方程式 (4.4) を Δ_∞ の**主固有値問題**と呼ぶ.

我々の目的はこの定理と派生する諸問題をしかるべき設定で一般化し解決する事である.

Remark 2.3 (先行研究). 一般化の方向として, Theorem 2.2 の (1), (2) は別個に扱う事ができる.[*4] 特に, (1) は, レイリー商表示に意味があれば良いので, 直接 operator Δ_p や方程式 (2.2) を扱う必要がなく, 特異空間への拡張が成されている.

- まず, (1) は Grosjean ([7]) によって連結閉リーマン多様体 (M, g) の場合に拡張された. この場合, $\Omega = M$ とし, (2.2) は境界条件無しで考える. 第一正固有値は

$$\lambda_{1,p}(M) = \inf_{\substack{u \in C^\infty(M) \\ u \text{ is not constant}}} \frac{\int_M |\nabla u|^p \, d\mathrm{vol}_g}{\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_M |u - a|^p \, d\mathrm{vol}_g}$$

で実現され,

$$\lim_{p \to \infty} \lambda_{1,p}(M)^{1/p} = \frac{2}{\operatorname{diam} M}$$

が成り立つ. ここで, $\operatorname{diam} M = \max_{x,y \in M} d(x, y)$ である.

- Honda ([11]) および Ambrosio-Honda ([1]) は以下の設定を考えた. RCD(K, N) 条件を満たす測度距離空間 (X, d, m) を RCD(K, N) 空間と呼ぶ. ここで, $K \in \mathbb{R}$ と $N \in [1, +\infty)$ は定数である. 本稿では, RCD 空間について説明を割愛するが, 多様体の崩壊理論の観点から重要な対象であり, リーマン多様体上で展開される解析学を "非常にうまく" 展開させる事ができる事が知られている.

[*3] 第一正固有値というのは, あくまでも正の最小固有値という意味である. 人によっては, 第二固有値と呼ぶ事もある.

[*4] 消極的に言えば, 特異空間上ではまだそれらの関係をはっきりさせる事ができていない (すぐにやりたい).

コンパクト RCD(K,N) 空間全体からなるクラス $\mathcal{R}_{K,N}$ を考え (そこには測度付き Gromov-Hausdorff 収束の位相を入れておき), その上で関数

$$F : \mathcal{R}_{K,N} \times [1,+\infty] \to [0,+\infty]$$

を

$$F((X,d,m),p) := \begin{cases} \dfrac{2}{\operatorname{diam}(X,d)} & \text{if } p = +\infty, \\ \left[\inf_{f \in \operatorname{Lip}(X,d)} \dfrac{\displaystyle\int_X \operatorname{lip}_a(f)^p \, dm}{\displaystyle\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_X |f-a|^p \, dm} \right]^{1/p} & \text{if } 1 < p < +\infty, \\ h(X,d,m) & \text{if } p = 1 \end{cases}$$

と定義する. ただし, h は Cheeger 等周定数である:

$$h(X,d,m) := \inf_{\substack{A \subset X:\ \mathrm{open} \\ m(A) \le m(X)/2}} \frac{m^+(A)}{m(A)}, \qquad m^+(A) := \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{m(B_r(A)) - m(A)}{\varepsilon}.$$

彼らは, F が $\mathcal{R}_{K,N} \times [1,+\infty]$ 上の連続関数である事を証明した.

ひとつ強調するが, 彼らの設定では空間も動いてよい事に注意する (例えば位相が同じ空間列であってもその極限空間の位相や次元も変わり得る事にも注意しておく).

一方, 無限大ラプラシアンを特異空間上で研究する様な話は, Juutinen-Shanmgalingam ([14]) に登場する. そこでは**無限大調和方程式** (∞-harmonic equation)

$$-\Delta_\infty u = 0 \text{ in } \Omega$$

について調べられている.

コメント. 少なくとも私の興味はいまの所, Theorem 2.2 の拡張であるが, 当然, Theorem 2.2 が成り立たない様な wild な空間を構成するという方向の研究もあり得る.

2.3. **主結果.** 以下に主結果を説明する. まず, (X,d) を完備可分距離空間とし, m をその上の Borel measure とする. ただし,

$$\forall x \in X, \forall r > 0, 0 < m(B_r(x)) < \infty$$

を仮定する.

Borel 部分集合 $A \subset X$ に対し,

$$W_0^{1,p}(A) := \{ f \in W^{1,p}(X) \mid f = 0 \ m\text{-a.e. on } X \setminus A \}$$

と定める. 更に,

$$\lambda_{1,p}^D(A) := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(A) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_A |Du|_{*,a}{}^p \, dm}{\displaystyle\int_A |u|^p \, dm}$$

と定める.

Remark (単調性)**.** $A \subset A'$ であれば, $\lambda_{1,p}^D(A) \ge \lambda_{1,p}^D(A')$ となる.

筆者は次の様な “固有値もどき” を導入した:

Definition 2.4. 自然数 $k \geq 1$ に対し,

$$\overline{\lambda}_{k,p}(X) := \inf_{\substack{A_0, A_1, \ldots, A_k \subset X: \\ \text{disjoint open}}} \max_{0 \leq i \leq k} \lambda^D_{1,p}(A_i) \tag{2.5}$$

と定める.

また Grove–Markvorsen によって導入された距離空間の不変量を復習する:

Definition 2.5 ([8])**.** 距離空間 (Y, d) と $k \geq 1$ に対し,

$$\begin{aligned} \operatorname{pack}_{k+1} Y &:= \sup_{y_0, y_1, \ldots, y_k \in Y} \min_{i \neq j} \frac{d(y_i, y_j)}{2} \\ &= \sup \left\{ r > 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists y_0, \ldots, y_k \in Y \text{ such that} \\ \{B_r(y_i)\}_{0 \leq i \leq k} \text{ is disjoint} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

と定め, これを $(k+1)$**-packing radius** と呼ぶ.

Remark 2.6. $k = 1$ のとき, 定義から

$$\operatorname{pack}_2 Y = \frac{\operatorname{diam} Y}{2}$$

である.

また,

$$\overline{\lambda}_{1,p}(X) = \lambda_{1,p}(X)$$

である事が知られている ([1]).

さて, 最初に紹介する結果は以下である (未定義用語は次節で定義する):

Theorem 2.7 ([17])**.** $k \geq 1$ を勝手な自然数とする. (X, d, m) を, volume doubling 条件と $(1, p_0)$-Poincaré inequality と Sobolev-to-Lipschitz 条件を満たす測度距離空間とする.[*5] このとき, 任意の自然数 $k \geq 1$ に対し,

$$\exists \lim_{p \to \infty} \overline{\lambda}_{k,p}(X)^{1/p} = \frac{1}{\operatorname{pack}_{k+1} X}$$

が成り立つ.

更に, bounded domain $\Omega \subset X$ に対し,

$$\operatorname{inpack}_k \Omega := \sup_{x_1, \ldots, x_k \in \Omega} \min_{i \neq j} \left\{ \frac{d(x_i, x_j)}{2}, d(\partial \Omega, x_i) \right\}$$

と定め,[*6]

$$\overline{\lambda}^D_{k,p}(\Omega) = \inf_{\substack{A_1, \ldots, A_k \subset \Omega \\ \text{disjoint open}}} \max_{1 \leq i \leq k} \lambda^D_{1,p}(A_i)$$

と定めると,

$$\exists \lim_{p \to \infty} \overline{\lambda}^D_{k,p}(\Omega)^{1/p} = \frac{1}{\operatorname{inpack}_k \Omega}$$

が成り立つ.

Remark. $\operatorname{inpack}_1 \Omega = \operatorname{inrad} \Omega$ なので, 最後の主張は Theorem 2.2 の (1) の一般化になっている.

[*5] 主張は非コンパクトでも成り立つが, $0 = 0$ という自明な式が成り立つだけなので, コンパクトの場合が本質.

[*6] X は proper なので実際には, 上の式の sup は max である.

もう一つ紹介したい結果は Theorem 2.2 の (2) に関わるものである. 方程式 (4.4) を距離空間上で定式化し, 研究しようというものである.

Theorem 2.8 ([15])**.** (X,d) を固有測地空間とし, $\Omega \subset X$ を domain とし, $\partial\Omega \neq \emptyset$ とする. このとき,

- $\lambda \in \mathbb{R}$ 毎に方程式
$$\begin{cases} \min\{-\Delta_\infty u, |\nabla u| - \lambda u\} = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$
の粘性解としての意味付けを与えた.
- $\lambda = \Lambda_\infty^D(\Omega) = (\mathrm{inrad}\,\Omega)^{-1}$ に対し, $\overline{\Omega}$ 上で連続な上記方程式の正値解 $u : \Omega \to (0,\infty)$ が存在する.

Remark 2.9. (X,d,m) を "十分よい" 特異空間とし, Ω を bounded domain で $\partial\Omega \neq \emptyset$ となっているものとする. いまの時点で, Ω 上の p ラプラシアンの第一正固有値に関する固有関数 u_p と, $p \to \infty$ としたときの極限関数に関する研究は無いが, これは次にやるべき課題である.

3. Theorem 2.7 の為の定義集

Theorem 2.7 に登場した未定義用語を解説する.

改めて (X,d,m) を測度距離空間 (metric measure space) とする. この意味は,

- (X,d) が完備可分距離空間,
- m は (X,d) 上の Borel measure で,
$$\forall x \in X, \forall r > 0, 0 < m(B_r(x)) < \infty$$
を満たす

という意味である. 特に, このとき, m は σ-finite で, m のサポートは X 全体になる. (X,d,m) を以下, 単に X と表す. また, $1 < p < \infty$ に対し, $\mathrm{Lip}_b(X)$ は $L^p(m)$ の中で dense になる.

3.1. **ソボレフ空間の定義.** 以下の定義は [5] を参照した. $1 < p < \infty$ とする. $f \in L^p(m)$ に対し, その p **エネルギー**を

$$(\mathcal{E}_p(f) :=) \quad \mathsf{E}_{*,a,p}(f) := \inf_{\{f_j\} \subset \mathrm{Lip}_b(X)} \liminf_{j\to\infty} \int_X \mathrm{lip}_a(f_j)^p \, dm$$

と定める. ここで, inf は $\{f_j\} \subset \mathrm{Lip}_b(X)$ かつ $f_j \to f$ in $L^p(m)$ となる列 $\{f_j\}$ 全体に渡ってとる.

記号が煩わしいので, 以下, 単に $\mathcal{E}_p(f) = \mathsf{E}_{*,a,p}(f)$ と書く.

Definition 3.1 (Sobolev space)**.** 集合 $W^{1,p}_{*,a}(X)$ を

$$W^{1,p}_{*,a}(X) = \{f \in L^p(m) \mid \mathcal{E}_p(f) < +\infty\}$$

で定め, $f \in W^{1,p}_{*,a}(X)$ の $(1,p)$-norm を

$$\|f\|_{1,p} = \|f\|_{W^{1,p}_{*,a}(X)} := \left(\|f\|^p_{L^p(m)} + \mathcal{E}_p(f)\right)^{1/p}$$

で定義する. 記号が煩わしいときは, $W^{1,p} = W^{1,p}_{*,a}$ と書く.

Remark. 一般の測度距離空間においては, $W^{1,2}$ は Hilbert 空間とは限らない.

Fact 3.2.
(0) $\mathcal{E}_p : L^p(m) \to [0, \infty]$ は lower semicontinuous になる.
(1) $(W^{1,p}_{*,a}(X), \|\cdot\|_{1,p})$ は Banach space になる.
(2) $f \in W^{1,p}_{*,a}(X)$ と $G \in L^p(m)$ with $G \geq 0$ に対し, G が f の (p-)*asymptotic relaxed slope* であるとは, 次を満たすときをいう:

$$\begin{aligned}
&\exists (f_n) \subset \mathrm{Lip}(X) \text{ and } \exists G' \in L^p(m) \text{ such that} \\
&f_n \to f \text{ strongly in } L^p(m) \text{ and} \\
&\mathrm{lip}_a(f_n) \to G' \text{ weakly in } L^p(m) \text{ with } G' \leq G.
\end{aligned}$$

(3) p-asymptotic relaxed slope 全体を便宜的に $\mathsf{ARS}_p(f)$ と書くとき, $\mathsf{ARS}_p(f)$ は $L^p(m)$ の非空凸閉集合である. 従って, 関数 $|Df|_{*,p} \in \mathsf{ARS}_p(f)$ で,

$$\||Df|_{*,p}\|_{L^p(m)} = \min_{G \in \mathsf{ARS}_p(f)} \|G\|_{L^p(m)}$$

を満たすものが一意的に存在する. この様な $|Df|_{*,p}$ を f の *minimal* (p-)*asymptotic relaxed slope* と呼ぶ. 更に,

$$\mathcal{E}_p(f) = \int_X |Df|_{*,p}{}^p \, dm$$

を満たす.
(4) $|Df|_{*,p}$ は (ほとんど) 各点の意味でも asymptotic relaxed slope 全体の中で最小である. すなわち, 任意の $G \in \mathsf{ARS}_p(f)$ に対し,

$$|Df|_{*,p} \leq G \;\; m\text{-a.e.}$$

が成り立つ. 特に, $f \in \mathrm{Lip}(X)$ に対し,

$$|Df|_{*,p} \leq \mathrm{lip}_a(f) \;\; m\text{-a.e.}$$

が成り立つ.

Definition 3.3. 改めて, Borel subset A に対し,

$$W_0^{1,p}(A) := \left\{ f \in W^{1,p}_{*,a}(X) \,\middle|\, f = 0 \; m\text{-a.e. on } X \setminus A \right\}$$

と定め,

$$\lambda^D_{1,p}(A) := \inf_{\substack{f \in W_0^{1,p}(A) \\ f \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_A |Df|_{*,a}{}^p \, dm}{\displaystyle\int_A |f|^p \, dm}$$

とする. また, $\overline{\lambda}_{k,p}(X)$ を, (2.5) で定める.

Definition 3.4. (X, d, m) が **volume doubling 条件を満たす**とは, $\exists C_D \geq 1$; $\forall x \in X$, $\forall r > 0$, we have

$$m(B_{2r}(x)) \leq C_D m(B_r(x))$$

を満たすときをいう. ここに登場する C_D を doubling 定数という. また, このとき,

$$s = s(C_D) := \log_2 C_D \quad \in [0, +\infty) \tag{3.1}$$

とする.

Example 3.5. (M,g) が n 次元完備リーマン多様体で, $\mathrm{Ric}_g \geq 0$ とする. このとき, Bishop-Gromov の不等式:

$$\frac{\mathrm{vol}_g(B_r(x))}{V_r} \nearrow \text{ as } r \searrow 0+$$

が成り立つ. ここで, V_r は $\mathbb{E}^n$ の半径 r の球体の体積で, 特に,

$$V_r = V_1 r^n$$

となる. 特に,

$$\mathrm{vol}_g(B_{2r}(x)) \leq 2^n \,\mathrm{vol}_g(B_r(x))$$

が成り立つ. このとき, $n = s$ である.

Remark. 上の例に見て取れる様に, (3.1) で定められた s は, volume の増大度の観点から見た "次元 (の上界)" である. 実際に次の期待すべき事が成り立つ: (X,d,m) が C_D について volume doubling であるとき, $x \in X$ と $r > 0$ と $\lambda \geq 1$ に対し,

$$m(B_{\lambda r}(x)) \leq C_D \cdot \lambda^s m(B_r(x))$$

となる. 更に, $x \in X$ と $r > 0$ と $\lambda \geq 1$ と $y \in B_{\lambda r}(x)$ に対し,

$$m(B_{\lambda r}(x)) \leq C_D^2 \cdot \lambda^s m(B_r(y))$$

となる. 証明はたとえば, [10].

Fact. (X,d,m) が volume doubling 条件を満たす測度距離空間であれば, base metric space (X,d) は metric doubling である. つまり, $\exists N \in \mathbb{Z}_{>0}$; $\forall x \in X$, $\forall r > 0$, $\exists x_1, \ldots, x_N \in B_{2r}(x)$ such that

$$B_{2r}(x) \subset B_r(x_1) \cup \cdots \cup B_r(x_N)$$

が成り立つ. これは上に書いた Remark の不等式から簡単に分かる. 特に, (X,d) は proper である. すなわち, X の任意の有界閉集合はコンパクトである.

Definition 3.6. $1 \leq p_0 < +\infty$ とする. 各 ball で可積分な関数 $f : X \to [-\infty, +\infty]$ と m 可測関数 $g : X \to [0, +\infty]$ に対し, 組 (f,g) が $(1,p_0)$**-Poincaré 不等式**を満たすとは, $\exists C > 0$, $\exists \sigma \geq 1$ such that $\forall x \in X$, $\forall r > 0$, we have

$$⨍_{B_r(x)} \left| f - ⨍_{B_r(x)} f \, dm \right| dm \leq Cr ⨍_{B_{\sigma r}(x)} g^p \, dm$$

を満たすときをいう. より正確には, このとき, (f,g) は (C,σ) に対し, $(1,p_0)$-Poincaré 不等式を満たすという.

空間 (X,d,m) が $(1,p_0)$**-Poincaré 不等式を満たす**とは, ある固定された定数のペア (C,σ) が存在し, 任意の $f \in \mathrm{Lip}_b(X)$ に対し, $(f, \mathrm{lip}_a(f))$ が (C,σ) で $(1,p_0)$-Poincaré 不等式を満たすときをいう.

Proposition 3.7. $1 < p_0 < \infty$ とする. (X,d,m) が (C,σ) で $(1,p_0)$-Poincaré 不等式を満たすとき, 任意の $f \in W^{1,p_0}_{*,a}(X)$ に対し, $(f, |Df|_{*,a})$ は (C,σ) で $(1,p_0)$-Poincaré 不等式を満たす.

volume doubling 条件と適当な $1 \leq p_0 < \infty$ に対し $(1,p_0)$-Poincaré 不等式を満たす測度距離空間を **PI 空間**という. (X,d,m) が PI 空間であれば, 任意の $p,q \in (1,\infty)$ に対し,

- $W^{1,p}(X) \cap W^{1,q}(X)$ は $W^{1,p}(X)$ の中で dense であり,
- $f \in W^{1,p}(X) \cap W^{1,q}(X)$ に対し, $|Df|_{*,p} = |Df|_{*,q}$

となる事が知られている ([2]).

以後, PI 空間に対しては, $f \in W^{1,p}(X)$ に対し,

$$|Df| = |Df|_{*,p}$$

と書いてしまう事にする.

Proposition 3.8 ([9])**.** (X, d, m) を有界な PI 空間とする (特に $m(X) < \infty$ である). s を (3.1) で定める. このとき, $p > \max\{s, 1\}$ であれば, 任意の $f \in W^{1,p}(X)$ は Hölder version を持つ. より詳しく, doubling 定数や Poincaré 不等式に登場する定数にのみ依存する (明示的な) 定数 $C > 0$ が存在し, $\forall f \in W^{1,p}(X)$, $\forall x, y \in X$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C(\operatorname{diam} X)^{s/p} \left(\frac{\mathcal{E}_p(f)}{m(X)}\right)^{1/p} d(x, y)^{1-(s/p)}$$

が成り立つ.

Definition 3.9. PI 空間 (X, d, m) が **Sobolev-to-Lipschitz 条件**を満たすとは,

$$\forall f \in W^{1,2}(X) \cap W^{1,\infty}(X), f \in \mathrm{Lip}(X) \text{ and } \||Df|\|_{L^\infty(m)} = \mathrm{Lip}(f)$$

を満たすときをいう.

ここで,

$$W^{1,2} \cap W^{1,\infty} = \{f \in W^{1,2} \mid \|f\|_{L^\infty(m)} < \infty \text{ and } \||Df|\|_{L^\infty(m)} < \infty\}$$

と解釈する. $\mathrm{Lip}_b \subset W^{1,2} \cap W^{1,\infty}$ である.

4. 距離空間上の無限大ラプラシアンの解析

距離空間 $X = (X, d)$ が**固有** (proper) とは, その中の任意の有界閉集合がコンパクトになる事をいうのだった.

距離空間 (X, d) 内の連続曲線 $\gamma : [0, 1] \to X$ に対し, その**長さ**を

$$L(\gamma) = \sup_{0=t_0<t_1<\cdots<t_N=1} \sum_{i=1}^{N} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \ \in [0, \infty]$$

と定める. 定義からいつでも $L(\gamma) \geq d(\gamma(0), \gamma(1))$ である. $L(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$ を満たすとき, γ を**測地線** (geodesic) という.

任意の二点が測地線で結べる様な距離空間を**測地空間** (geodesic space) という.

4.1. ユークリッド空間の場合の粘性解.

粘性解の概念を復習する. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし, 関数

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{Sym}(n) \to \mathbb{R}$$

を与える (以下に述べる様な例では F はすべて連続である). また, 関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し, 形式的に微分方程式

$$F(x, u(x), \nabla u(x), \mathrm{Hess}(u)(x)) = 0 \text{ in } \Omega \tag{4.1}$$

を考える事ができる (この意味で F を微分作用素と思う). u が十分滑らかなとき, 左辺を $F[u](x)$ と表す.

Definition 4.1. 方程式 (4.1) が (もしくは F が), **退化楕円型** (degenerate elliptic) であるとは, 任意の $(x, a, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ と $A, B \in \mathrm{Sym}(n)$ with $A \leq B$ に対し,

$$F(x, a, \xi, A) \geq F(x, a, \xi, B)$$

が成り立つときをいう.

Example. 調和方程式 $-\Delta u = 0$ に対応する F は $F = -\operatorname{trace} A$ である．また, 無限大調和方程式 $-\Delta_\infty u = 0$ に対応する F は, $F = -\langle A\xi, \xi\rangle$ である．これらは退化楕円型である．$-\Delta_p$ も退化楕円型作用素である．同様に, Δ_p の固有方程式

$$-\Delta_p u - \lambda |u|^{p-2} u = 0$$

や, Δ_∞ の固有方程式

$$\min\{-\Delta_\infty u, |\nabla u| - \lambda u\} = 0$$

も退化楕円型である．

Definition 4.2. F を退化楕円型な作用素とする．下半連続 (resp. 上半連続) な $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が方程式 (4.1) の**粘性優解** (viscosity supersolution)(resp. **粘性劣解** (viscosity subsolution)) とは, 任意の $x \in \Omega$ と $\varphi \in C^2(\Omega)$ に対し,

$$\begin{aligned} &u(x) = \varphi(x) \text{ and } u \geq \varphi \text{ in } \Omega \quad (\text{resp.}\, u \leq \varphi \text{ in } \Omega), \\ &\implies F[\varphi](x) \geq 0 \quad (\text{resp.}\, F[\varphi](x) \leq 0) \end{aligned}$$

を満たすときをいう．

粘性劣解かつ粘性優解である様な関数を**粘性解** (viscosity solution) という．

4.2. **無限大優調和関数.** さて, (X, d) (の開集合) 上で, Δ_∞ にまつわる微分方程式を定義していく．そもそも粘性解の意味で, $u : (\mathbb{R}^n \underset{\text{open}}{\supset}) \ \Omega \to \mathbb{R}$ が無限大優調和である:

$$-\Delta_\infty u \geq 0 \text{ in } \Omega \tag{4.2}$$

という事の特徴づけを復習しておく．

Theorem 4.3 ([12], [3])**.** bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と連続関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し, 以下は同値である．

(1) u は粘性解の意味で Ω 上で無限大優調和である．
(2) u enjoys the comparison with cones (from below and above).
(3) u is AMLE.

コメント. AMLE という性質は今回まったく登場しないが, 重要な性質なので述べておく (ただし, [14] の style で述べる)．$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ を Lipschitz 関数とする (特にいまは $f \equiv 0$ を考えたい)．$u \in C(\overline{\Omega})$ が f の absolutely minimizing Lipschitz extension であるとは, $u = f$ on $\partial\Omega$ かつ $\forall O \subset \Omega$: subdomain, we have

$$\operatorname{Lip}(u|_O) = \operatorname{Lip}(u|_{\partial O})$$

を満たすときをいう．

Remark. [14] では, Theorem 4.3 の (適当な条件がついた)(測度) 距離空間版をやっている．つまり, (距離空間では (1) に相当する概念が無いので) cone との比較条件と AMLE の同値性について調べている．

Definition 4.4 ([14])**.** $X = (X, d)$ を距離空間とし, $\Omega \subset X$ を開集合とする．$u : \Omega \to \mathbb{R}$ が (Ω 上で) **錘との下からの比較を持つ** (u obeys the comparison with cones from below) とは,

$$\begin{cases} \forall x_0 \in \Omega, \forall O \subset\subset \Omega \text{ open with } x_0 \notin O, \\ \forall a \in \mathbb{R}, \forall \kappa \leq 0, \text{ if } u \geq \phi \text{ in } \partial O, \text{ then } u \geq \phi \text{ in } O \end{cases} \tag{4.3}$$

を満足するときをいう．ここで, $\phi = a + \kappa d(x_0, \cdot)$ であり, これを cone function という．また, $O \subset\subset \Omega$ は, O が有界かつ $\overline{O}$ が Ω に含まれるという意味である．

u が Ω 上で**無限大優調和** (∞-superharmonic) であるとは, u が Ω 上で下半連続かつ錘との下からの評価を持つときをいう. 無限大優調和という条件を記号で

$$-\Delta_\infty u \geq 0 \text{ in } \Omega$$

と書く.

u が Ω 上で**無限大劣調和** (∞-subharmonic) であるとは, $-u$ が Ω 上で無限大優調和であるときをいう. 更に, u が Ω 上で**無限大調和** (∞-harmonic) とは, u が Ω 上で無限大優調和かつ無限大劣調和であるときをいう.

条件 (4.3) に現れる cone function の係数 κ が非正である事に注意しておく. ※ ユークリッド空間の場合は任意の実数 κ に変更しても構わない.

我々は次の事を示した.

Lemma 4.5 ([15] existence)**.** X を proper geodesic space とし, $\Omega \subset X$ を bounded domain とし, $g \in C(\partial\Omega)$ を与える. このとき, 任意の $\lambda > 0$ に対し,

$$u(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} \big[g(y) + \lambda d(x,y)\big] \qquad (x \in \Omega)$$

で定義される関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ は ∞-superharmonic in Ω かつ $|\nabla^- u| = \lambda$ in Ω を満たす.

Proposition 4.6 ([15] Harnack inequality and regularity of ∞-superharmonic functions)**.** Let $u : \Omega \to \mathbb{R}$ be an ∞-superharmonic function on an open subset Ω of X. Then, the following holds.

(1) u is locally Lipschitz;
(2) for each $x \in \Omega$, $|\nabla^+ u|(x) \leq |\nabla^- u|(x)$ holds (つまり, $|\nabla u| = |\nabla^- u|$ である);
(3) 更に $|\nabla u|$ は上半連続である;
(4) if u is nonnegative on Ω, then u satisfies Harnack inequality. (式は略)

4.3. **距離空間上の無限大ラプラシアンの主固有値問題.** 今から, $X = (X, d)$ は固有測地空間, Ω はその開集合とする (あとで Ω は有界連結で, $\partial\Omega \neq \emptyset$ という仮定を付ける). さて, 我々は

$$\min\{-\Delta_\infty u, |\nabla u| - \lambda u\} = 0 \text{ in } \Omega \tag{4.4}$$

という方程式を距離空間上で定式化したいのだった. 安直に思えば, "$\bullet = 0$" を定義するには, "$\bullet \geq 0$" と "$\bullet \leq 0$" を定義すればよい.

Definition 4.7 ([15])**.** 連続な $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が (4.4) の**優解** (supersolution) である事を,

$$-\Delta_\infty u \geq 0 \text{ in } \Omega$$

かつ

$$|\nabla^- u|(x) \geq \lambda u(x) \text{ for every } x \in \Omega$$

を満たす事で定義する.

コメント. 次に, "$\bullet \leq 0$" を定義する. 実数 a, b に対し, $\min\{a,b\} \leq 0$ は,

$$a > 0 \implies b \leq 0$$

と同値な条件である事に注意しておく.

Definition 4.8 ([15])**.** 連続関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が (4.4) の**劣解** (subsolution) である事を,

$$\begin{aligned} &\forall x_0 \in \Omega, \forall r > 0, \forall \phi\text{: } \infty\text{-superharmonic in } B_r(x_0) \\ &\text{and } u - \phi \text{ has a local strict maximum at } x_0, \\ &\text{we have } \lim_{\varepsilon \to 0+} \inf_{B_\varepsilon(x_0)} |\nabla^- \phi| \leq \lambda u(x_0) \end{aligned}$$

を満たす事で定める.

Definition 4.9 ([15])**.** (4.4) の解とは, 優解かつ劣解であるものをいう.

次の整合性が成り立つ:

Theorem 4.10 ([15])**.** (4.4) の優解/劣解の概念は, ユークリッド空間の domain において通常の粘性優解/粘性劣解の概念と同値である.

4.4. **主定理.** 以上の準備の下, 主定理の主張を正確に述べる事ができる.

(X, d) を固有測地空間とし, Ω を X 内の bounded domain とし, $\partial\Omega \neq \emptyset$ とする. $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し, 方程式 (4.4) の優解 u で, Ω 上で正であるもの全体の集合を $\mathcal{S}_\lambda(\Omega)$ と書く事にする.

$$\Lambda = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathcal{S}_\lambda(\Omega) \neq \emptyset\}$$

と定める. Lemmas 1.1, 4.5 から,

$$u_{\mathrm{dist}} = \Lambda_\infty^D(\Omega)\, d(\partial\Omega, \cdot) \in \mathcal{S}_{\Lambda_\infty^D(\Omega)}(\Omega)$$

が分かるので, $\Lambda \geq \Lambda_\infty^D(\Omega)$ である. ここで, $\Lambda_\infty^D(\Omega) = (\operatorname{inrad}\Omega)^{-1}$ だった.

以下が主結果である.

Theorem 4.11 ([15])**.** $\Lambda = \Lambda_\infty^D(\Omega)$ である.

更に, Ω の incenter 全体の集合

$$\mathcal{M}(\Omega) = \{x \in \Omega \mid u_{\mathrm{dist}}(x) = 1\}$$

を考える. このとき,

$$u_\infty(x) := \inf\left\{ u(x) \;\middle|\; \begin{array}{l} u \in \mathcal{S}_\Lambda(\Omega) \text{ with} \\ u = 1 = \max\limits_{\Omega} u \text{ on } \mathcal{M}(\Omega) \end{array} \right\}$$

によって関数 $u_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$ を定める.

Theorem 4.12 ([15])**.** u_∞ は $\lambda = \Lambda$ に関して (4.4) の解である. また, $u_\infty = 0$ on Ω となる様に u_∞ は $\overline{\Omega}$ 上に (一意的に) 連続拡張される.

コメント (最後のコメント)**.** (ユークリッド空間の有界領域に対して) Mazurowski [16] は, p ラプラシアンの固有値の列を適切に抜き出して, それに関する Weyl の漸近公式を得ている. また, Gromov [6] による漸近公式も興味深い. これらを繋ぐ事は将来やるべき事だろう. 今回の研究はその方向への一歩と考えている.

References

[1] L. Ambrosio and S. Honda, New stability results for sequences of metric measure spaces with uniform Ricci bounds from below. Published by De Gruyter Open Poland 2017. Measure Theory in Non-Smooth Spaces. Nicola Gigli (E. d.)

[2] A. Björn, J. Björn, Nonlinear Potential Theory on Metric Spaces, EMS Tracts in Mathematics, vol. 17, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011.

[3] M. G. Crandall, L. C. Evans, and R. F. Gariepy, Optimal Lipschitz extensions and the infinity Laplacian, Calc. Var. Partial Differential Equations 13 (2001), 123–139.

[4] N. Fukagai, M. Ito, and K. Narukawa. Limit as $p \to \infty$ of p-Laplace eigenvalue problems and L^∞-inequality of the Poincaré type. Differential Integral Equations, 12(2):183–206, 1999.

[5] N. Gigli and E. Pasqualetto, Lectures on Nonsmooth Differential Geometry, 2020, SISSA Springer Series (SISSASS, volume 2).

[6] M. Gromov. Morse Spectra, Homology Measures, Spaces of Cycles and Parametric Packing Problems. Published by Princeton University Press 2019. What's Next? The Mathematical Legacy of William P. Thurston (AMS-205). Edited by: Dylan Thurston. Volume 205 in the series Annals of Mathematics Studies.

[7] J.-F. Grosjean, p-Laplace operator and diameter of manifolds, Ann. Global Anal. Geom. 28 (2005), 257–270.

[8] K. Grove and S. Markvorsen, New extremal problems for the Riemannian recognition program via Alexandrov geometry. JAMS, vol. 8, no. 1, 1995.

[9] P. Hajłasz and P. Koskela, Sobolev met Poincaré. Mem. Amer. Math. Soc. 145 (2000), no. 688, x+101 pp.

[10] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, and J. T. Tyson. Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces, New Mathematical Monographs, vol. 27. Cambridge University Press, Cambridge (2015).

[11] S. Honda, Cheeger constant, p-Laplacian, and Gromov-Hausdorff convergence. arXiv:1310.0304v3.

[12] R. Jensen, Uniqueness of Lipschitz extensions minimizing the sup-norm of the gradient, Arch. Rat. Mech. Anal., 123 (1993), 51–74.

[13] P. Juutinen, P. Lindqvist, and J. J. Manfredi. The ∞-eigenvalue problem. Arch. Ration. Mech. Anal., 148(2):89–105, 1999.

[14] P. Juutinen and N. Shanmugalingam. Equivalence of AMLE, strong AMLE, and comparison with cones in metric measure spaces. Math. Nachr., 279(9–10):1083–1098, 2006.

[15] Q. Liu and A. Mitsuishi, Principal eigenvalue problem for infinity Laplacian in metric spaces, Adv. Nonlinear Stud., 22 (2022), 548–573.

[16] L. Mazurowski. A Weyl law for the p-Laplacian. arXiv:1910.11855v1.

[17] A. Mitsuishi, Certain min-max values related to the p-energy and packing radii of Riemannian manifolds and metric measure spaces. arXiv:1912.01432.