接触角条件つき面積保存型曲率流の漸近挙動解析 *

可香谷　隆（室蘭工業大学）†

概 要

本講演では，変分構造を用いた挙動解析が比較的難しい，x 軸上で異なる一定接触角を生成する，平面上の 2 階放物型偏微分方程式に分類される面積保存型曲率流と，4 階放物型偏微分方程式に分類される表面拡散に対する挙動解析について議論する．前者の方程式に対しては進行波解が一意に存在し，漸近安定性を持つが，後者に対しては，角度条件によって，進行波解が一意とは限らない．本講演では，特に，変分構造を用いた挙動解析が難しい理由，それぞれの方程式に対する進行波解形状，性質の違いが現れる原因となる構造の違いについて解説する．

1　導入

幾つかの曲線や曲面の発展方程式は，界面ダイナミクスを記述するモデルとして提唱されてきた．特に，界面ダイナミクスに関連するモデルの例として，面積保存型曲率流と表面拡散が挙げられる．本講演では，平面曲線の挙動に焦点を当て，t を時刻を表すパラメータとする滑らかで単純な平面曲線の族 $\{\gamma(t)\}_{t\geq 0}$ に対し，V を法線速度，s を弧長パラメータ，κ を曲率とする．このとき，上記の曲線の発展方程式は，以下のように記述される．

$$\text{(ap)} \quad V = \kappa + \frac{\int_{\gamma(t)} \kappa \, ds}{L(\gamma(t))}, \qquad \text{(sd)} \quad V = -\partial_s^2 \kappa.$$

ただし，$L(\gamma(t))$ は $\gamma(t)$ の長さとする．それぞれの方程式を満たす動く曲線は，曲線に囲まれた面積を保存しつつ，曲線の長さが減少する性質を持つ．これらの性質は，変分計算から従うものであり，挙動解析においても重要な役割を持つ．実際，囲まれた面積を一定とした制限のもとでの，長さを最小とする図形は円であり，上記のいずれの方程式に対しても，方程式に従って時間大域的な解は円に収束することが示されている [2, 3]．また，挙動の違いとしては，(ap) は曲線の凸性を保つのに対し，(sd) は凸性が崩れる場合があることが知られている [4]．

本講演では，以下の面積保存型曲率流と表面拡散に対する自由境界値問題を考察する．Π を $\mathbb{R}^2$ の x 軸とし，t を時刻を表すパラメータとする滑らかで単純な平面曲線の族 $\{\Gamma(t)\}_{t\geq 0}$ に対し，V を法線速度，s を弧長パラメータ，κ を曲率とする．$\Gamma(t)$ の挙動は以下の方程式 (AP) または (SD) を満たすものとする．

接触角条件付き面積保存型曲率流 (AP):

$$\begin{aligned} &V = -\kappa_{ss} \quad \text{on} \quad \Gamma(t), \\ &P_\pm(t) \in \Pi, && \text{(BC1)} \\ &\sphericalangle(\Gamma(t), \Pi) = \psi_\pm \quad \text{at} \quad P_\pm(t), && \text{(BC2)} \end{aligned}$$

接触角条件付き表面拡散 (SD):

$$\begin{aligned} &V = -\kappa_{ss} \quad \text{on} \quad \Gamma(t), \\ &P_\pm(t) \in \Pi, \\ &\sphericalangle(\Gamma(t), \Pi) = \psi_\pm \quad \text{at} \quad P_\pm(t), \\ &\kappa_s = 0 \quad \text{at} \quad P_\pm(t). \end{aligned}$$

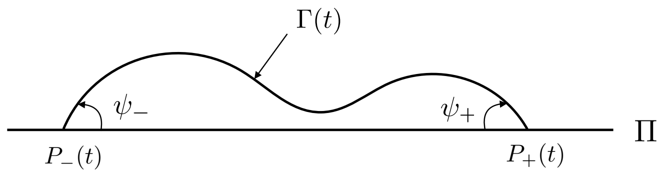

図 1: 接触角条件の図

ただし，$P_+(t)$ と $P_-(t)$ は，それぞれ $\Gamma(t)$ の右端点，左端点とする．また，$\sphericalangle(\Gamma(t), \Pi)$ は $\Gamma(t)$ と Π が囲む領域における接触角とし，$\psi_\pm \in (0, \pi/2)$ はそれぞれ時刻に依らない定数で，異なる値も許すとする．本研究での目標は，上記の表面拡散に対し，解の漸近挙動を明らかにすることである (図 1 参照).

ここで，幾つか関連する先行研究について述べる．自由境界条件 (BC1) と (BC2) を課した曲線流は，これまで主に，2 階放物型偏微分方程式に対応する，曲線短縮流 ($V = \kappa$)[1]，外力項付き曲率流 ($V = \kappa + 1$)[5]，面積保存型曲率流 ($V = \kappa - \int_{\Gamma(t)} \kappa \, ds / \int_{\Gamma(t)} \, ds$)[9] 等が研究対象とされてきた．ここでは特に，表面拡散と変分構造が類似する面積保存型曲率流についてのみ述べる．以降，左右の端点を Π 上に持つ平面曲線 Γ に対し，$A(\Gamma)$ を Γ と Π で囲まれた領域の (符号付) 面積とする．上記のような接触角条件付きの表面拡散と面積保存型曲率流は，それぞれ，Γ に対する汎関数

$$E(\Gamma) := L(\Gamma) + l_+(\Gamma) \cos \psi_+ - l_-(\Gamma) \cos \psi_-$$

の形式的な H^{-1} 勾配流，面積 $A(\Gamma)$ 保存条件下における L^2 勾配流として導出できる．ただし，$L(\Gamma)$ は Γ の長さ，$l_\pm(\Gamma)$ は，それぞれ右端点と左端点の x 座標とする．従って，いずれの解 $\{\Gamma_t\}$ に対しても，$A(\Gamma(t))$ が保存量で，$E(\Gamma(t))$ は広義単調減少関数となる．変分構造により，$E(\Gamma)$ の面積保存条件下における極小解の安定性が期待できるが，簡単な変分計算により，$\psi_+ \neq \psi_-$ の時，$E(\Gamma)$ は面積保存条件下における臨界点を持たないことがわかる．従って，いずれの方程式においても，上記の変分構造による考察だけでは，解の漸近挙動が非自明であり，本研究の難しさを表す構造である．

2 主結果

主結果を述べるため，まず，進行波解を定義する．本講演で扱う方程式 (AP) や (SD) に対する時間大域的な滑らかな解のうち，ある平面曲線 $\mathcal{W}(0)$ と定数 c が存在し，

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(0) + ct\vec{e}_1 \quad \text{for} \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

と記述できる解を進行波解とする．

まず，(AP) に対しては，以下の定理を示すことができる．

Theorem 2.1 ([6, 7, 9])**.** 接触角条件付き面積保存型曲率流 *(AP)* に対し，以下が成り立つ．

(i) 任意の進行波解 $\mathcal{W}(t)$ に対し，速度 c は以下を満たす．

$$\psi_- \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \psi_+ \quad \Longleftrightarrow \quad c \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0.$$

(ii) 任意の $\psi_\pm \in (0, \pi)$ に対し，平行移動や拡大・縮小を除いて進行波階は一意であり，形状は凸となる．

(iii) (AP) を満たす，任意の凸な時間大域解は，平行移動，拡大・縮小を行った進行波解にハウスドルフ距離の意味で指数収束する．

*本研究は下条昌彦 (東京都立大学) や高坂良史氏 (神戸大学) との共同研究を含む
†E-mail: kagaya@mmm.muroran-it.ac.jp

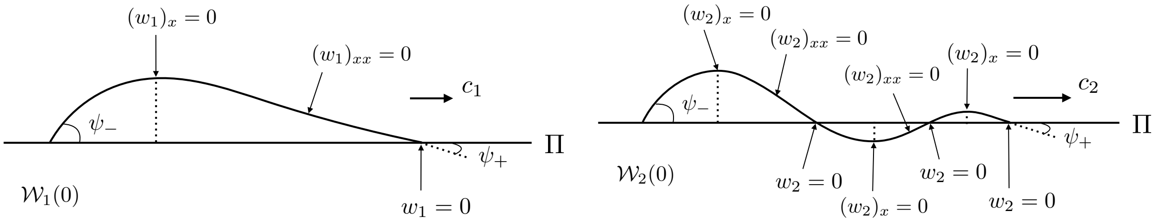

図 2: $k = 1, 2$ に対する $\mathcal{W}(0)$ の形状

上記の結果により，(AP) に対しては一意の進行波解が存在し，安定性を持つことがわかる．しかし，進行波解の形状は凸であり，[4] による (sd) に対する凸性が崩れる具体例の構成は，(SD) に対する進行波解の構造が異なる可能性を示している．そこで，以下では (SD) に対する進行波解の解析を行う．

(SD) に対しては，任意の進行波解 $\mathcal{W}(t)$ と定数 $a \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ に対し，(2.1) 内のプロファイル曲線 $\mathcal{W}(0)$ と速度 c を，それぞれ $\lambda \mathcal{W}(0) + a\vec{e}_1$ と c/λ^3 に置き直しても進行波解が構成できる．従って，$L(\mathcal{W}(0)) = 1$ で $P_-(0)$ が原点となる進行波解を考察すれば十分であり，以下の定理内の進行波解はそれらの条件を満たすものとする．また，以下で述べる進行波解は，$\mathcal{W}(0)$ がグラフ表示されるものに限る．

Theorem 2.2 ([8])**.** 接触角条件付き表面拡散 *(SD)* に対し，以下が成り立つ．

(i) 任意の進行波解 $\mathcal{W}(t)$ に対し，速度 c は以下を満たす．

$$\psi_- \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \psi_+ \quad \Longleftrightarrow \quad c \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0.$$

(ii) 任意の接触角条件に対して，少なくとも *1* つは進行波解 $\mathcal{W}(t)$ が存在する．

(iii) $\psi_+ = \psi_-$ の時，任意の進行波解 $\mathcal{W}(t)$ に対し，$\mathcal{W}(0)$ は円弧で，$c = 0$ となる．

(iv) $\psi_+ < \psi_-$ とする．この時，ψ_- に依存した正の実数列

$$\psi_- > m_1 > m_2 > \cdots > m_n > \cdots$$

が存在し，以下が成り立つ：$\psi_+ \in [m_{j+1}, m_j)$ の時，少なくとも $2j-1$ 個の，以下を満たす進行波解 $\mathcal{W}_k(t) (k = 1, 2, \cdots 2j-1)$ が存在する．ただし，$\mathcal{W}_k(0)$ は，関数 $w_k(x) (0 \leq x \leq l_k)$ によってグラフ表示されているものとする．

(a) $\mathcal{W}_k(t)$ の速度 c_k は，以下を満たす．

$$0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{2j-1}.$$

(b) $w_k(x)$ は原点近傍で正で，$(w_k)_{xx}(0) < 0$ となる (接触角条件より，$(w_k)_x(0) > 0$).

(c) $0 < x < l_k$ に於いて，x 軸方向に対して順に，$(w_k)_x, (w_k)_{xx}, w_k$ の符号が変わる．さらに，k が奇数 *(*偶数*)* の時，それらの零点の個数はそれぞれ k 個 *(*$k+1$ 個*)*，k 個 *(*k 個*)*，$k-1$ 個 *(*k 個*)* である *(*図 *2* 参照*)*.

尚，$\psi_+ > \psi_-$ の場合でも定理 2.2(iv) と同様に $c_k < 0$ となる進行波解が構成できるが，ここでは省略する．また，定理 2.2(iii) により，$\psi_+ = \psi_-$ の時は，接触角条件を満たす円弧が一意であることから，進行波解の一意性，及び凸性が成り立つことがわかる．一方で，定理 2.2(iv) により，一方の接触角が十分に小さい時，進行波解の一意性，及び凸性が成り立たないことがわかる．

参考文献

[1] X. Chen and J.-S. Guo, *Motion by curvature of planar curves with end points moving freely on a line*, Math. Ann. **350** (2011), no. 2, pp. 277–311.

[2] C. M. Elliott and H. Garcke, *Existence results for diffusive surface motion laws*, Adv. Math. Sci. Appl., 7 (1997), no. 1, 465–488.

[3] M. Gage, *On an area-preserving evolution equation for plane curves*, Contemp. Math. **51** (1986), pp. 51–92.

[4] Y. Giga and K. Ito, *Loss of convexity of simple closed curves moved by surface diffusion*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **35** (1999), 305–320.

[5] J.-S. Guo, H. Matano, M. Shimojo and C.-H. Wu, *On a free boundary problem for the curvature flow with driving force*, Arch. Ration. Mech. Anal. **219** (2016), no. 3, pp. 1207–1272.

[6] T. Kagaya, *Global stability of traveling waves for an area preserving curvature flow with contact angle condition*, J. Differential Equations, **269** (2020), pp. 3489–3514.

[7] T. Kagaya and Y. Kohsaka, *A note on traveling waves for area-preserving geometric flows*, Advanced Studies in Pure Mathematics (2020), pp. 227–238.

[8] T. Kagaya ant Y. Kohsaka, *Existence of non-convex traveling waves for surface diffusion of curves with constant contact angles*, Arch. Ration. Mech. Anal. **235** (2020), pp. 471–516.

[9] M. Shimojo and T. Kagaya, *Exponential stability of a traveling wave for an area preserving curvature motion with two endpoints moving freely on a line*, Asymptot. Anal. **96** (2016), no. 2, pp. 109–134.