鏡映群と基本群

斉藤 義久（立教大学理学部）

Abstract. この小論の目的は，古典的なルート系の拡張概念である『楕円ルート系』に対して，"楕円 Artin 群" と呼ばれる，Atrin 群 (= braid 群) の楕円アナロジーを定義し，その性質を詳しく調べることになる．特に，楕円 Artin 群は

- "楕円図形" に基づく，有限個の生成元と基本関係式による代数的表示と，
- "楕円正則軌道空間" の基本群である，という幾何学的解釈

を併せ持つ．また，楕円ルート系は合同部分群の対称性を持つことがその大きな特徴であるが，この合同部分群対称性の帰結として，楕円 Artin 群に合同部分群の中心拡大が作用することが示される．

1. プロトタイプ（Introduction に替えて）

1.1. **有限鏡映群とルート系.** $F_f \cong \mathbb{R}^l$ を l 次元実ベクトル空間，I_f を F_f 上の内積（$= F_f$ 上の positive definite な symmetric bilinear form）とする．$\alpha \in F_f$ を 0 でないベクトルとするとき，以下で定まる F_f 上の線形変換 r_α を**鏡映（reflection）**と呼ぶ：

$$r_\alpha : u \mapsto u - I_f(u, \alpha^\vee)\alpha \quad \text{for } u \in F_f.$$

ただし，$\alpha^\vee := \dfrac{2}{I_f(\alpha,\alpha)}\alpha$．定義からすぐにわかるように，$r_\alpha$ は次の性質を持つ：

$$r_\alpha \in O(F_f, I_f), \tag{1.1.1}$$

$$r_\alpha^2 = 1. \tag{1.1.2}$$

ここに，$O(F_f, I_f)$ は内積 I_f に関する F_f 上の直交変換全体のなす群（直交群）である．また，いくつかの鏡映で生成される $O(F_f, I_f)$ の部分群 W を**鏡映群（reflection group）**という．ここで次の問を考えよう．

Q. 鏡映群 W が有限群になるのはいつか？

Example 1.1.1. $l+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{l+1}$ の l 次元部分空間

$$F_f := \left\{ u = \sum_{i=1}^{l+1} a_i \varepsilon_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{l+1} a_i = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{l+1}$$

を考える．ここに，$\varepsilon_i\,(1 \le i \le l+1)$ は $\mathbb{R}^{l+1}$ の標準基底を表す．また，$\mathbb{R}^{l+1}$ の標準内積を F_f に制限したものを I_f と書く．さらに,（0 でないベクトルからなる）F_f の有限部分集合

$$R(A_l) := \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \,|\, 1 \le i < j \le l+1\}$$

とし，$r_\alpha\,(\alpha \in R(A_l))$ で生成される鏡映群を $W(A_l)$ とおく：

$$W(A_l) := \langle r_\alpha \,|\, \alpha \in R(A_l) \rangle.$$

このとき，次の事実はよく知られている．

- $1 \leq i \leq n$ に対し，
$$\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$$
とおくと，$W(A_l)$ は
$$S := \{r_{\alpha_1}, \cdots, r_{\alpha_l}\}$$
で生成される．
- $W(A_l)$ は $(l+1)$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{l+1}$ と同型であり，その具体的な同型写像は以下で与えられる：
$$r_{\alpha_i} \mapsto (i, i+1) \quad (1 \leq i \leq i+1).$$
ここに $(i, i+1) \in \mathfrak{S}_{l+1}$ は i と $i+1$ の隣接互換を表す．
- $W(A_l) \cong \mathfrak{S}_{l+1}$ は r_{α_i} $(1 \leq i \leq l)$ を生成元とし，(1.1.1) および次を基本関係式とする群である：
$$r_{\alpha_i} r_{\alpha_j} = r_{\alpha_j} r_{\alpha_i} \quad \text{if } |i-j| \geq 2, \tag{1.1.3}$$
$$r_{\alpha_i} r_{\alpha_{i+1}} r_{\alpha_i} = r_{\alpha_{i+1}} r_{\alpha_i} r_{\alpha_{i+1}} \quad \text{if } 1 \leq i \leq l-1. \tag{1.1.4}$$

○ 上記 Q に対する解答

言葉を準備しよう．

Definition 1.1.2. (1) (F_f, I_f) を有限次元実ベクトル空間 F_f と，その上の positive definite symmetric bilinear form の組とする．0 でないベクトルからなる F_f の部分集合 R_f が (F_f, I_f) に属する**ルート系（root system）**であるとは，以下の性質を満たすことをいう．

(i) R_f で生成される $\mathbb{Z}$-加群を $Q(R_f)$（これを**ルート格子（root lattice）**という）とするとき，$Q(R_f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = F_f$.
(ii) $r_\alpha(R) = R$ for every $\alpha \in R$.
(iii) $I_f(\alpha^\vee, \beta) \in \mathbb{Z}$ for every $\alpha, \beta \in R$.

(2) R_f をルート系とするとき，
$$W(R_f) := \langle r_\alpha \,|\, \alpha \in R_f \rangle$$
を R_f の**ワイル群（Weyl group）**という．

Remark . (1) 通常『ルート系』と言うときは，上記 (i),(ii),(iii) を仮定する．ただし（後で述べるように），有限鏡映群の分類に用いる場合には，(iii) を仮定しない集合を考えた方が都合が良い．文献によっては

- (i), (ii) を満たすものを，単にルート系，
- (i), (ii), (iii) を満たすものを，結晶的ルート系（crystalographic root system）

と呼ぶ場合もある．

(2) 分類の都合上，さらに次の 2 条件を仮定する．

(iv) R_f は**既約（irreducible）**である．すなわち，$R_f = R_f^1 \sqcup R_f^2$ を disjoint な分割であって，$I_f(R_f^1, R_f^2) = 0$ であるものとすると，$R_f^1 = \emptyset$ or $R_f^2 = \emptyset$ である．
(v) R_f は**被約（reduced）**である．すなわち，$\alpha \in R_f$ に対し，$R_f \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$.

正確を期するために,『ルート系の同型』の概念を定式化しておこう．

Definition 1.1.3. R_f を (F_f, I_f) に属するルート系，R'_f を (F'_f, I'_f) に属するルート系とする．F_f から F'_f への isometry φ であって，$\varphi(R_f) = R'_f$ なるものが存在するとき，R_f と R'_f は同型であるという．

以上の準備の元に，次の定理が知られている．

Theorem 1.1.4 ([Bo]). (1) R_f が (i),(ii),(iv),(v) を満たすとすると，R_f は次のいずれかのタイプに同型である[1]：

$$A_l\,(l \geq 1),\ B_l\,(l \geq 2),\ C_l\,(l \geq 3),\ D_l\,(l \geq 4),\ E_l\,(l = 6, 7, 8),\ F_4,\ G_2,$$
$$H_l\,(l = 3, 4),\ I_2(m)\,(m = 5 \text{ or } m \geq 7).$$

(2) W を有限鏡映群とすると，(i),(ii),(iv),(v) を満たす集合 $R_f^1, \cdots, R_f^k$ が存在して，W は $W(R_f^j)$ $(1 \leq j \leq k)$ たちの直積と同型である[2]：

$$W \cong W(R_f^1) \times \cdots \times W(R_f^k).$$

この定理により，有限鏡映群は本質的に既約かつ被約なルート系によって分類されることがわかる．

Remark . (1) ルート系の分類は，通常 “Dynkin 図形” と呼ばれる有限有向グラフによってなされる．他方，$W(R_f)$ の群としての同型類には “Coxeter 図形”（= Dynkin 図形から矢印の向きを無視して得られる図形）が対応する．
(2) 条件のうち，(v) を仮定しない場合には，上記以外に BC_l 型と呼ばれるルート系が現れる．ただし Weyl 群のレベルでは，

$$W(BC_l) \cong W(B_l) \cong W(C_l).$$

(3) crystalographic との仮定（(iii) を付け加える）と，A, B, C, D, E, F, G の７系列のみになる．これらは，$\mathbb{C}$ 上の単純リー代数の分類に現れるルート系である．

○ $W(R_f)$ の構造について

有限群鏡映群 $W(R_f)$ は，**Coxeter 群**と呼ばれる一連の群の例になっている．後々重要になるので，このことを簡単に説明しておく．

Definition 1.1.5. l 次の “対称行列” $M = (m_{i,j})$ であって[3]．次を満たすものが与えられているとする（これを **Coxeter matrix** という）：

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 2\text{ 以上の整数，もしくは }\infty & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

このとき，W が（$S = \{r_1, \cdots, r_l\}$ を生成系とする）**Coxeter 群**であるとは，W が以下の定義関係式で定義されることをいう：

$$r_i^2 = 1, \tag{1.1.5}$$
$$\underbrace{r_i r_j r_i \cdots}_{m_{i,j}\text{個の積}} = \underbrace{r_j r_i r_j \cdots}_{m_{i,j}\text{個の積}} \quad \text{for } i \neq j. \tag{1.1.6}$$

ただし，$m_{i,j} = \infty$ の時は『r_i と r_j の間に交換関係がない』と読む．

[1] A_l 型ルート系は Example 1.1.1 で与えた．それ以外のルート系の具体的な記述は紙数の都合で省略する．

[2] ルート系の中には，ルート系としては同型でなくとも，その Weyl 群は同型になるものがある（B_l 型と C_l 型）．この点を除けば，$R_f^1, \cdots, R_f^k$ は順序を除いて一意的．

[3] “　” を付けたのは，“行列” の成分に数でないもの（∞）が入る可能性があるからである．

Γ_f を R_f の Dynkin 図形とし，$\Pi_f := \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ をその頂点集合とする．さらに Γ_f に対し，Coxeter matrix $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le l}$ を次のように定める：

$$m_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ p+1 & \text{if } i \neq j \text{ かつ，} \alpha_i \text{ と } \alpha_j \text{ を結ぶ矢印が } p \text{ 本.} \end{cases}$$

このとき，有限鏡映群 $W(R_f)$ は $S := \{r_{\alpha_1}, \cdots, r_{\alpha_l}\}$ を生成系とする Coxeter 群である．さらに，有限 Coxeter 群は，本質的にこのようなものしかないことが知られている．

1.2. **ルート系と基本群.**

$$F^*_{f,\mathbb{C}} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_f, \mathbb{C})$$

とし，

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : F^*_{f,\mathbb{C}} \times F_{f,\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$$

を canonical pairing とする．ただし，$F_{f,\mathbb{C}} := F_f \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

$\alpha \in R_f$ に対して

$$H_{\alpha,\mathbb{C}} := \{h \in F^*_{f,\mathbb{C}} \,|\, \langle h, \alpha \rangle = 0\}$$

とおけば，$H_{\alpha,\mathbb{C}}$ は複素ベクトル空間 $F^*_{f,\mathbb{C}}$ の codimendion 1 の複素部分空間になる．ということは，実ベクトル空間としては,

$$\dim_{\mathbb{R}} F^*_{f,\mathbb{C}} - \dim_{\mathbb{R}} H_{\alpha,\mathbb{C}} = 2$$

である．

以上は，ごく当たり前の注意であるのだが，実は非常に重要な意味を持つ．実際，実次元が 2 減っているので，差集合

$$F^*_{f,\mathbb{C}} \setminus H_{\alpha,\mathbb{C}}$$

は連結であるが単連結にはならず，基本群は非自明に残る．より正確には

$$\pi_1\big(F^*_{f,\mathbb{C}} \setminus H_{\alpha,\mathbb{C}}\big) \cong \mathbb{Z}$$

となり，$H_{\alpha,\mathbb{C}}$ の周りを 1 周回るサイクルがその生成元となる．

Remark . 同じセッティングは $\mathbb{R}$ 上で考えることも出来る．しかしその場合，real codimension 1 の部分空間は，元の空間を互いに交わらない 2 つの連結かつ単連結な半空間に分割してしまい，基本群も自明（正確には，連結成分ごとの単位群の直積）になる．つまり非自明なことが何もおきず，つまらない．

以上のことは，複数枚の超平面を同時に考えた場合でも同じである．すなわち，考えるベクトル空間を複素化することで，初めて基本群が非自明になり，面白い空間が現れることになる．今回，我々が考察の対象にするのは，ルート系によってパラメトライズされる超平面たちを元のベクトル空間から抜いて得られる差集合

$$F^*_{f,\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{\alpha \in R_f} H_{\alpha,\mathbb{C}} \tag{1.2.1}$$

のトポロジカルな性質である．

複素化された双対空間 $F^*_{f,\mathbb{C}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_f, \mathbb{C})$ には，有限鏡映群 $W(R_f)$ が自然に作用する[4]．特に，その作用を (1.2.1) で定まる差集合に制限した場合には，固定点を持たない．したがって，その作用で割った商空間は多様体の構造を持つ．

[4]左作用 $W(R_f) \curvearrowright F_f$ から自然に誘導される $W(R_f)$ の $F^*_{f,\mathbb{C}}$ への作用は，右作用である．このまま話を続けても特に問題が生じるわけではないのだが，後々の都合もあり，今回は contragradient action を考えることで,『$W(R_f)$ は $F^*_{f,\mathbb{C}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_f, \mathbb{C})$ に左から作用している』と思うことにする．

Definition 1.2.1. (1.2.1) の差集合を $W(R_f)$ の作用で割って得られる商空間

$$\left(W(R_f)\backslash F^*_{f,\mathbb{C}}\right)_{reg} ;= W(R_f)\Big\backslash\Big(F^*_{f,\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{\alpha\in R_f} H_{\alpha,\mathbb{C}}\Big)$$

を**正則軌道空間 (regular orbit space)** という．

Example 1.2.2. このような空間の中で最も有名かつ基本的なのは，点の配置空間であろう．一般に位相空間 X に対し，互いに異なる X の l 個の点の（順序付けられた）組全体

$$\mathrm{Conf}_l(X) := X^l \setminus \{(x_1, \cdots, x_l) \in X^l \,|\, x_i = x_j \text{ for some } i \neq j\}$$

を **X 上の l 点の配置空間（configuration space of l points on X）**と呼ぶ．$\mathrm{Conf}_l(X)$ には成分の入れ替えで l 次対称群 $\mathfrak{S}_l$ が自然に作用する．この作用で $\mathrm{Conf}_l(X)$ を割ったもの

$$\mathrm{UConf}_l(X) := \mathfrak{S}_l\backslash\mathrm{Conf}_l(X)$$

を **unordered onfiguration space of l points on X** という[5]．

特に $X = \mathbb{C}$ の場合，$\mathrm{Conf}_l(\mathbb{C})$, $\mathrm{UConf}_l(\mathbb{C})$ はルート系の言葉を用いて次のように記述される．Example 1.1.1 の記号を思い出そう．A_{l-1} 型ルート系

$$R(A_{l-1}) = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \,|\, 1 \leq i < j \leq l\}$$

を $V := \mathbb{R}^l$ の部分集合と思い直す：

$$R(A_{l-1}) \subset V = \mathbb{R}^l.$$

V の複素化された双対空間

$$V^*_{\mathbb{C}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$$

を考え，さらにここからルートに対応する超平面たちを取り除く：

$$V^*_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{\alpha\in R(A_{l-1})} H_{\alpha,\mathbb{C}} = V^*_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{1\leq i<j\leq l} H_{\varepsilon_i-\varepsilon_j,\mathbb{C}}.$$

ここで，$h \in V^*_{\mathbb{C}}$ に対して

$$x_i := \langle h, \varepsilon_i\rangle \qquad (1 \leq i \leq l)$$

とおき，これを $V^*_{\mathbb{C}}$ 座標と思えば，自然な同型

$$V^*_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{1\leq i<j\leq l} H_{\varepsilon_i-\varepsilon_j,\mathbb{C}} \cong \left\{(x_1, \cdots, x_l) \in \mathbb{C}^l \,\middle|\, x_i \neq x_j \,(1 \leq i < j \leq l)\right\}$$

が得られる．右辺は $\mathbb{C}$ 上の l 点の配置空間 $\mathrm{Conf}_l(\mathbb{C})$ に他ならない．この時，配置空間の基本群

$$\mathcal{P}_l := \pi_1\big(\mathrm{Conf}_l(\mathbb{C})\big)$$

を**純組み紐群 (pure braid group)** という．また，配置空間を対称群の作用で割った $\mathrm{UConf}_l(X) = \mathfrak{S}_l\backslash\mathrm{Conf}_l(X)$ の基本群

$$\mathcal{B}_l := \pi_1\big(\mathrm{UConf}_l(\mathbb{C})\big)$$

を**組み紐群 (braid group)** という．これらの群については，次が基本的である．

[5]適当な日本語訳があるかどうかは知らない．

Theorem 1.2.3 ([A]). (1) $a_i \in \mathcal{B}_l$ $(1 \le i \le l-1)$ が存在して，braid 関係式を満たす：

$$\begin{cases} a_i a_j &= a_j a_i & (|i-j| \ge 2), \\ a_i a_{i+1} a_i &= a_{i+1} a_i a_{i+1} & (1 \le i \le l-2). \end{cases} \tag{1.2.2}$$

さらに，$\mathcal{B}_l$ は上記 a_i $(1 \le i \le l)$ で生成され，braid 関係式 (1.2.2) はその基本関係式である．

(2) 分裂する完全系列

$$1 \to \mathcal{P}_l \to \mathcal{B}_l \xrightarrow{\pi} \mathfrak{S}_l \to 1$$

が存在する．特に，全射 $\pi : \mathcal{B}_l \to \mathfrak{S}_l$ は

$$a_i \mapsto r_i$$

で与えられる．ここに，$r_i = r_{\alpha_i}$ $(1 \le i \le l-1)$ は A_{l-1} 型の単純ルート α_i $(1 \le i \le l-1)$ に対応する鏡映（単純鏡映）である．

Artin が braid 群の概念を導入したのはほぼ 100 年前（正確には 1925 年）のことである．代数的なレベルから見れば，結果は非常に単純で，

braid 群 $\mathcal{B}_l$ は，l 次対称群 $\mathfrak{S}_l$ （A_{l-1} 型 Coxeter 群）の定義関係式から，『生成元の 2 乗 =1』という関係式 ((1.1.5) 式) を忘れることによって得られる

というものである．しかしながら，実際にその証明を追ってみればわかるように，Theorem 1.2.3 は決して自明ではない．また，近年この brald 関係式は数学の色々な場面で現れるようになっていることは注目に値する．ここでは，その例として

- 共形場理論に現れる KZ 方程式との関連
- 可解格子模型に現れる Yang-Baxter 方程式

を挙げておく[6]．今回，これらのテーマついて深入りはしないが，

braid 関係式が数学の非常に深い部分をコントロールしている，

という事実は覚えておいて頂きたい．

Artin の結果が当時の数学界にどの程度の影響を与えたのかは，筆者にはよく分からない．はっきり言えることは，

Artin の結果を他のルート系に拡張するには，ほぼ半世紀を要した

という事実のみである[7]．実際，Theorem 1.2.3 は次の形で，一般の有限ルート系の場合に拡張された．

Definition 1.2.4 ([BS]). R_f を crystalographic な有限ルート系とする．この時，a_i $(1 \le i \le l)$ を生成元とし，(1.1.6) のタイプの関係式

$$\underbrace{a_i a_j a_i \cdots}_{m_{i,j}\text{個の積}} = \underbrace{a_j a_i a_j \cdots}_{m_{i,j}\text{個の積}} \quad \text{for } i \ne j. \tag{1.2.3}$$

のみを定義関係式とする（すなわち，(1.1.5) のタイプの関係式を忘れて得られる）群を，有限ルート系 R_f に付随する **Artin 群 (Artin group)**，もしくは**一般化された braid 群 (generalized braid group)** と呼び，$A(R_f)$ と書く．

---

[6]少しだけコメントしておこう．KZ 方程式は配置空間上の微分方程式であり，そのモノドロミーを考えることで，braid 群の表現が定まる．また，Yang-Baxter 方程式は，ある種の可解格子模型に現れる R 行列が満たす関数方程式で，考えている模型の可解性を保証する重要な式である．そして，その具体形は『R 行列が braid 関係式を満たす』という形で与えられる．

[7]ちなみに，Coxeter 群の理論が完成したのは，19 世紀のことである．

Theorem 1.2.5 ([B]). R_f を crystalographic な有限ルート系とする．この時，正則軌道空間の基本群は Artin 群 $A(R_f)$ と同型である：

$$\pi_1\left(\left(W(R_f)\backslash F^*_{f,\mathbb{C}}\right)_{reg}\right) \cong A(R_f).$$

以上により，我々は Artin 群 $A(R_f)$ に対して "２つの理解の仕方" を得たことなる．

(A) 生成元と基本関係式で定義された抽象的な（代数的な）群としての理解.

(G) 正則軌道空間の基本群としての幾何学的な理解.

単純に『対象を定義する』だけならば，(A) の理解だけで十分であるし，その方が（ある意味で）ずっと易しい．ただし，単に定義を与えるだけでは，それが数学的な実体を伴った "意味のある対象" である保証はどこにも無く，やはり (G) の理解は欠かせない．実際，最も基本的な A 型 Artin 群（braid 群）の場合には,『braid 群は配置空間の基本群である』という事実から，共形場理論や曲線上の bundle のモジュライ空間の構造と braid 群の関係が見えてくるのであった[8].

この小論を通じて我々が目指したいのは,

『楕円ルート系』と呼ばれるルート系の拡張概念に対して，
Artin 群（楕円 Artin 群）を定義し，その基本的な性質を調べる

ということであるが，それは単に『生成元と基本関係式によって抽象的（代数的に）群を定める』ということではない[9]．やはり『基本群である』という理解が伴って，初めて "正しい数学的対象である" という話になるのだと思う．

以下では，まず『楕円ルート系とは何か？』という説明から初めて，対応する楕円 Artin 群を

(A) 生成元と基本関係式で定義された抽象的な（代数的な）群として定義し，

(G) さらに，それがある空間（楕円正則軌道空間）の基本群と同型になる

ことを示す．この両者が揃って，初めて

『楕円 Artin 群は，Artin 群の楕円アナロジーである』と宣言できる

というのが，我々の立場である．

2. 楕円ルート系とは？

2.1. **定義**. 楕円ルート系は，特異点理論の研究に端を発し，1980 年代半ばに齋藤恭司氏によって導入されたルート系の拡張概念である ([S1])．まず，定義を正確に述べよう．

Definition 2.1.1. (1) 有限次元実ベクトル空間 F とその上の対称線形形式 $I : F \times F \to \mathbb{R}$ が与えられた時，F の non-isotropic[10]なベクトルからなる集合 R が以下の条件を満たす時，(F, I) に属する**一般化されたルート系（generalized root system）**という．

(i) R が生成する $\mathbb{Z}$-加群を $Q(R)$ と書く時，$Q(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong F$.

(ii) 任意の $\alpha \in R$ に対して，$r_\alpha(R) = R$．ただし，$\alpha^\vee := 2\alpha/I(\alpha, \alpha)$ として，

$$r_\alpha(u) := u - I(u, \alpha^\vee)\alpha \quad (u \in F).$$

---

[8]ここでは『Artin 群は基本群である』という位相幾何学的理解にその根拠を置いているが，別に位相幾何学に拘っているわけではない．言いたいことは，解析にせよ，代数幾何にせよ，整数論にせよ,（要するに何でも良いのだが）『実体を伴った数学的対象にその根拠を置いていない理論は，豊かな構造を持ち得ない』ということである．

[9]『群としての性質を調べる』という意味では，この理解も有用である．

[10]$\alpha \in F$ が non-isotropic であるとは，$I(\alpha, \alpha) \neq 0$ であることを言う．

(iii) 任意の $\alpha, \beta \in R$ に対して，$I(\beta, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$.

(2) 特に I が半正定値で，かつ I の radical $\mathrm{rad}(I)$ の次元が 2 であるとき，(R, I) に属する一般化されたルート系を**楕円ルート系（elliptic root system）**という．

(3) R を (F, I) に属する楕円ルート系とするとき，r_α $(\alpha \in R)$ が生成する $\mathrm{GL}(F)$ の部分群を $W(R)$ と書き，**楕円 Weyl 群（elliptic Weyl group）**と呼ぶ.

Definition 1.1.2 と比べれば，上の定義が，I の（2 次形式としての）符号を除けば，R_f の場合のそれと全く同じであることに気が付かれることと思う．実際，I が正定値であれば，得られる R は有限ルート系であり，I が半正定値かつ $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{rad}(I)) = 1$ であれば，得られる R はアフィンルート系となる[11]．すなわち，楕円ルート系は既存の理論の自然な拡張になっている．

Remark . R_f の場合と同様に，楕円ルート系 R に対しても，断りなしに既約性と被約性を仮定することにする．定義は全く同じなので，具体形は省略する．

Example 2.1.2 ($X_l^{(1,1)}$ **型ルート系**)**.** R_f を (F_f, I_f) に属する X_l 型有限ルート系（$X = A \sim G$）とする．この時，F_f は l 次元実ベクトル空間であることに注意しよう．さて，$l+2$ 次元実ベクトル空間 F を

$$F := F_f \oplus (\mathbb{R}\delta_b \oplus \mathbb{R}\delta_a)$$

とし，F 上の対称双線型形式 $I : F \times F \to \mathbb{R}$ を

$$I|_{F_f \times F_f} = I_f, \quad \mathrm{rad}(I) = \mathbb{R}\delta_b \oplus \mathbb{R}\delta_a$$

で定める．このとき，I は半正定値で $\dim(\mathrm{rad}(I)) = 2$ となる．F の部分集合 R を

$$R := \{\alpha_f + m\delta_b + n\delta_a \,|\, \alpha_f \in R_f, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

とおくと，R は (F, I) に属する一般化されたルート系（楕円ルート系）になる．こうして定まる楕円ルート系 R を $X_l^{(1,1)}$ **型ルート系**と呼ぶ.

$X_l^{(1,1)}$ 型ルート系は，楕円ルート系の中で最も基本的なクラスであり，アフィンルート系における untwised type の楕円アナロジーである．このことは Weyl 群の構造を見るとより明確になる．

Proposition 2.1.3. R が上の楕円ルート系の時，

$$W(R) \cong W(R_f) \ltimes Q(R_f^\vee)^{\oplus 2}.$$

ただし，$R_f^\vee := \{\alpha_f^\vee \in F \,|\, \alpha \in R_f\}$（$R_f$ の dual root system），$Q(R_f^\vee)$ はその root lattice.

Sketch.) $\alpha_f \in R_f$ に対し，

$$t^{(b)}_{\alpha_f^\vee} := r_{\alpha_f} r_{\alpha_f + \delta_b}, \qquad t^{(a)}_{\alpha_f^\vee} := r_{\alpha_f} r_{\alpha_f + \delta_a} \tag{2.1.1}$$

とおくと，簡単な計算から次がわかる：

- $\sharp = b, a$ に対して，

$$t^{(\sharp)}_{\alpha_f^\vee} : u \longmapsto u - I(u, \alpha_f^\vee)\delta_\sharp \quad (u \in F). \tag{2.1.2}$$

- $t^{(\sharp)}_{\alpha_f^\vee} t^{(\natural)}_{\beta_f^\vee} = t^{(\natural)}_{\beta_f^\vee} t^{(\sharp)}_{\alpha_f^\vee} \quad (\sharp, \natural = b, a)$.

[11] 正確には『アフィンルート系の実ルートの全体』と言うべき．この定義だと，虚ルートは R に含まれない．

$\xi = \sum_{i=1}^{l} \xi_i \alpha_i^\vee \in Q(R_f^\vee)$ ($\xi_i \in \mathbb{Z}$, α_i は R_f の simple roots) に対して,

$$t_\xi^{(\sharp)} := \left(t_{\alpha_1^\vee}^{(\sharp)}\right)^{\xi_1} \cdots \left(t_{\alpha_l^\vee}^{(\sharp)}\right)^{\xi_l} \qquad (\sharp = b, a)$$

とおく時，埋め込み $Q(R_f^\vee)^{\oplus 2} \hookrightarrow W(R)$ は,

$$(\xi, \mu) \;\longmapsto\; t_\xi^{(b)} t_\mu^{(a)} = t_\mu^{(a)} t_\xi^{(b)}$$

で与えられる．また

- $r_{\alpha_f} t_\xi^{(\sharp)} r_{\alpha_f} = t_{r_{\alpha_f}(\xi)}^{(\sharp)} \quad (\sharp = b, a)$

より，この埋め込みの像は $W(R)$ の正規部分群で,

$$W(R)/Q(R_f^\vee)^{\oplus 2} \cong W(R_f)$$

が成り立つ．すなわち，完全系列

$$1 \to Q(R_f^\vee)^{\oplus 2} \to W(R) \to W(R_f) \to 1 \tag{2.1.3}$$

が存在する．さらに，この完全系列が分裂することもすぐ分かる． □

2.2. **楕円ルート系の性質**. 楕円ルート系の性質を端的に言えば

null root の方向が 2 つあるようなルート系

ということになるだろう．ここで言う『null root の方向の数』とは，I の radical の次元に他ならない．この点に着目すれば,

有限ルート系	=	**null root の方向が 0 個**
アフィンルート系	=	**null root の方向が 1 個**
楕円ルート系	=	**null root の方向が 2 個**

という系列がある，と考えることも出来る．その意味で，楕円ルート系は有限ルート系・アフィンルート系の自然な拡張概念となっている．

ところが，少し真面目に考えようとすると,

null root の方向が $0, 1$ 個の場合と，
2 個（以上）の場合では，話が全く異なる

ということに気づく．以下，このことをもう少し詳しく見ていこう．

(a) 楕円ルート系は Kac-Moody 理論に由来しない

Kac-Moody 理論では，一般化 Cartan 行列 $A = (a_{i,j})$ を与えることから全てが出発する．ご存知の方も多いと思うので詳細は省略するが，ルート全体が張る実ベクトル空間を F と書くとき，F 上に A から定まる対称双線型性形式 I が構成される．I が半正定値と仮定すると，対応するルート系は有限型（$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{rad}(I) = 0$ の場合）か，アフィン型（$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{rad}(I) = 1$ の場合）に限られてしまう．

他方，楕円ルート系が属する (F, I) においては，$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{rad}(I) = 2$ であり，こういう状況は Kac-Moody 理論では絶対に実現出来ない．すなわち，楕円ルート系は Kac-Moody 理論の範疇の外側に生息しているのである．

(b) 自己同型群の構造が異なる

有限型ルート系 R_f では，ルート系の自己同型群 $\mathrm{Aut}(R_f)$ は対応する Weyl 群 $W(R_f)$ にほぼ等しい．より正確には，Dynkin 図形の diagram automorphism から生成される有限群を除いて，両者は等しい．事情はアフィンルート系 R_a でも同様である．

$$W(R_f) \fallingdotseq \mathrm{Aut}(R_f), \qquad W(R_a) \fallingdotseq \mathrm{Aut}(R_a) \qquad (\text{up to 有限群}).$$

言い換えれば,

有限型・アフィン型のルート系においては，
ルート系の対称性は Weyl 群によって（ほぼ）記述される

ということになっている．

他方，楕円ルート系においては，事情が全く異なる．例えば上に紹介した $X_l^{(1,1)}$ 型ルート系の場合，ルート系 R は

$$R = \{\alpha_f + m\delta_b + n\delta_a \,|\, \alpha_f \in R_f, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

と定義されているであった．$g := \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して，

$$\phi_g : \alpha_f + m\delta_b + n\delta_a \mapsto \alpha_f + (pm + qn)\delta_b + (rm + sn)\delta_a$$

とおけば，これは F の１次変換に自然に拡張され，$\mathrm{Aut}(R)$ の元を定める．しかしながら，このような変換は楕円 Weyl 群 $W(R)$ の元によって作り出すことは出来ない．

一般の楕円ルート系では対称性がもう少し崩れているために，modular 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ はフルに作用出来ないが，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の指数有限の部分群（合同部分群）が作用することになる．いずれにせよ，

楕円ルート系 R の対称性は Weyl 群だけでは記述することが出来ず，
R は合同部分群という無限離散群の作用も同時に持っている

ということになっている．この事実の帰結として，楕円ルート系の理論には，楕円曲線や保型形式の理論が自然に現れる．これは有限型・アフィン型のルート系にはない，楕円ルート系に特有の著しい性質である．

2.3. **Marked elliptic root system と楕円図形**. 既に述べたように,

楕円ルート系 $=$ **null root の方向が２つ（$=$ radical が２次元）あるようなルート系**

だったわけだが，このままでは理論をコントロールするのが難しい．そこで我々は，“marking” と呼ばれる概念を導入する．これにより，楕円ルート系の理論を既存の概念（アフィンルート系の理論）に帰着させる方法を与えることが出来る．

Definition 2.3.1. $\mathrm{rad}(I)$ の１次元部分空間 G であって，$G \cap Q(R) \neq \{0\}$ となるものを **marking** と呼ぶ．さらに，組 (R, G) を **marked elliptic root system (MERS と略記)** と呼ぶ.

marking G が指定されると，canonical な射影 $\pi_G : F \to F/G$ が定まる．この時，$R_a := \pi_G(R)$ はアフィンルート系になる．アフィンルート系はその構造が詳しく調べられており，既存の理論が適用出来る．つまり,

marking G の指定 $=$ **既存の理論（アフィンルート系の理論）への “落し方” の指定**

というわけである．さらに，MERS (R, G) に対して，**楕円図形（elliptic diagram）** と呼ばれる有限グラフ $\Gamma(R, G)$ を定めることが出来る．以下に，その構成法を紹介しよう.

Step 1. 定義から $G \cap Q(R)$ は rank 1 の自由アーベル群になる．その生成元をを１つ選び，δ_a と書く：

$$G \cap Q(R) = \mathbb{Z}\delta_a. \tag{2.3.1}$$

さらに，各 $\alpha \in R$ に対して,

$$k_\alpha := \inf\{k \in \mathbb{Z}_{>0} \,|\, \alpha + k\delta_a \in R\}, \qquad \alpha^* := \alpha + k_\alpha\delta_a$$

とおく.

Step 2. R の部分集合 $\Pi_a = \{\alpha_0, \cdots, \alpha_l\}$ を，次の条件を満たすように取る：

- 自然な射影 $\pi_G : F \to F/G$ による Π_a の像 $\pi_G(\Pi_a)$ が，商アフィンルート系 $R_a = \pi_G(R)$ の単純ルートを与える[12].

この時，R_a の primitive null root δ_{R_a} は，単純ルートの非負整係数１次結合で

$$\delta_{R_a} = \sum_{i=0}^{l} n_i \pi_G(\alpha_i) \ (n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{2.3.2}$$

と書くことが出来る（ここに現れる n_i $(0 \leq i \leq l)$ は R_a の Kac label と呼ばれることがある）.

Step 3. $m_i := \dfrac{I(\alpha_i, \alpha_i) n_i}{2k_{\alpha_i}}$ $(0 \leq i \leq l)$，$m_{max} := \max\{m_i \,|\, 0 \leq i \leq l\}$ とし，

$$\Pi_{max} := \{\alpha_i \in \Pi_a \,|\, m_i = m_{max}\}, \qquad \Pi^*_{max} := \{\alpha^*_i \,|\, \alpha_i \in \Pi_{max}\},$$

と定める．さらに

$$\Pi(R, G) := \Pi_a \cup \Pi^*_{max}$$

とおく．この $\Pi(R, G)$ が，これから構成するグラフの頂点集合となる.

Step 4. $\Pi(R, G)$ の各頂点を以下のルールで結ぶ．$\alpha, \beta \in \Pi(R, G)$ に対し，

$$\begin{array}{ll}
{}^{\alpha}\circ \qquad\qquad \circ^{\beta} & \text{if } I(\alpha, \beta) = I(\beta, \alpha) = 0, \\
{}^{\alpha}\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ^{\beta} & \text{if } I(\alpha, \beta^\vee) = I(\beta, \alpha^\vee) = -1, \\
{}^{\alpha}\circ \xrightarrow{\ \mu\ } \circ^{\beta} & \text{if } I(\alpha, \beta^\vee) = -\mu \text{ and } I(\beta, \alpha^\vee) = -1 \text{ for } \mu = 2, 3, 4, \\
{}^{\alpha}\circ \overset{\infty}{\text{———}} \circ^{\beta} & \text{if } I(\alpha, \beta^\vee) = I(\beta, \alpha^\vee) = -2, \\
{}^{\alpha}\circ\text{=\,=\,=\,=\,=}\circ^{\beta} & \text{if } I(\alpha, \beta^\vee) = I(\beta, \alpha^\vee) = 2.
\end{array}$$

Definition 2.3.2. 上のようにして定まるグラフを $\Gamma(R, G)$ と書き，MERS (R, G) に付随する**楕円図形 (elliptic diagram)** と呼ぶ.

この時．次の定理が知られている.

Theorem 2.3.3 (MERS の分類定理 [S1])．『商アフィンルート系 R_a が reduced である』との仮定の下に，MERS の同型類はその楕円図形で完全に分類される.

出来上がるグラフの具体形は Appendix に書いたので，そちらを参照して頂きたい.

Remark . (1) 通常の場合と異なり，楕円図形 $\Gamma(R, G)$ の頂点集合は "単純ルート" に対応しているわけではない．実際，Appendix の実例を見て頂ければ分かる通り，$\Gamma(R, G)$ の頂点の数は，(R, G) が属するベクトル空間 F の次元より一般には大きい[13].
(2) 今後，以下のような記法を用いる：

$$\begin{array}{ll}
\circ\text{———}\circ \ = \ \circ \xrightarrow{\ \mu\ } \circ \ = \ \circ \xleftarrow{\ \mu\ } \circ & \text{for } \mu = 1, \\
\circ \xrightarrow{\ \mu\ } \circ \ = \ \circ \xleftarrow{\ \mu^{-1}\ } \circ & \text{for } \mu = 2^{\pm 1}, 3^{\pm 1}, 4^{\pm 1}.
\end{array}$$

---

[12]アフィンルート系は Kac-Moody 理論の範疇に属しているので,『単純ルート』が意味を持つことに注意.

[13]そもそも，楕円ルート系は既存の意味でのルート系ではないので,（Kac-Moody 理論で言うところの）単純ルートは存在しない.

後で必要になる概念を準備しておく．(2.3.2) に現れた係数 n_i $(0 \leq i \leq l)$ を思い出して，$\delta_b \in \mathrm{rad}(I) \cap Q(R)$ を

$$\delta_b := \sum_{i=0}^{l} n_i \alpha_i \tag{2.3.3}$$

と定める．この時，δ_b, δ_a は $\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I) := \mathrm{rad}(I) \cap Q(R)$ の $\mathbb{Z}$-基底となる．

Remark . (1) (R, G) が $X_l^{(1,1)}$ 型の MERS の場合，(2.3.1) で定義した δ_a，および (2.3.3) で定義した δ_b は，Example 2.1.2 に現れたそれに他ならない．

(2) 定義から明らかなように，一般に δ_b と δ_a は対称ではない．この非対称性の帰結として，R には $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ はフルに作用せず，指数有限の部分群（合同部分群）が作用することになる．

3. 楕円 Artin 群（その１：代数的な定義）

3.1. **楕円 Weyl 群の full extension.** 楕円 Artin 群の代数的な定義を与えるにあたり，楕円 Weyl 群の生成元と関係式による表示を復習する．

F を $l+2$ 次元の実ベクトル空間，$I : F \times F \to \mathbb{R}$ を F 上の対称双線型形式であって，$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{rad}(I) = 2$ であるものとする．この時，$l+4$ 次元の実ベクトル空間 F_Λ と，その上の非退化双線型形式 $I_\Lambda : F_\Lambda \times F_\Lambda \to \mathbb{R}$ の組 (F_Λ, I_Λ) が２条件

- F は F_Λ の部分ベクトル空間である．
- $I_\Lambda|_{F \times F} = I$.

を満たす時，(F, I) の **full extension** であるという．

R を (F, I) に属する楕円ルート系とする．$\alpha \in R$ に対して，鏡映 $s_\alpha \in O(F_\Lambda, I_\Lambda)$ を

$$s_\alpha(u) := u - I_\Lambda(u, \alpha^\vee)\alpha \qquad (u \in F_\Lambda)$$

と定める．次は構成から明らかであろう．

$$s_\alpha|_F = r_\alpha.$$

Definition 3.1.1. s_α $(\alpha \in R)$ で生成される $O(F_\Lambda, I_\Lambda)$ の部分群を $W_\Lambda(R)$ と書き，楕円 Weyl 群 $W(R)$ の **full extension** と呼ぶ．

$W_\Lambda(R)$ については，以下に述べる "楕円図形 $\Gamma(R, G)$ に基づいた生成元と基本関係式による表示" が知られている．正確な主張を述べる前に少し準備する．

２頂点 $\alpha, \beta \in \Pi_a$ は $\alpha \circ\!\xrightarrow{\mu}\!\circ\, \beta$ for $\mu = 2^{\pm 1}, 3^{\pm 1}$ の形に結ばれていると仮定する．この時，楕円図形の分類定理から，$k(\alpha, \beta) := k_\alpha / k_\beta$ は 1 か μ のどちらかに等しいことが分かる．

Definition 3.1.2. 上の setting において，α が辺 $\alpha \circ\!\xrightarrow{\mu}\!\circ\, \beta$ の **boundary side** (**or b-side for short**) であるとは，$k(\alpha, \beta) = \inf\{1, \mu\}$ が満たされるときをいう．

以上の準備の下に，"楕円図形 $\Gamma(R, G)$ に基づいた $W_\Lambda(R)$ の生成元と基本関係式による表示" について述べる．

Theorem 3.1.3 ([ST],[SS]). (R, G) を (F, I) に属する MERS，$\Gamma(R, G)$ をその楕円図形，$\Pi(R, G) \subset R$ をその頂点集合とする．この時，full extension $W_\Lambda(R)$ は s_α $(\alpha \in \Pi(R, G))$ によって生成され，その基本関係式は次のように記述される．

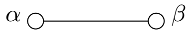
(1) $l \geq 2$ の時：以下のリストにある subdiagram が $\Gamma(R, G)$ の中に現れる毎に，右の関係式を仮定する．

(W0) 

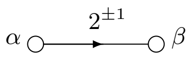
$s_\alpha^2 = 1,$

$(\mathrm{W1})_0$ 

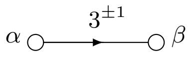
$s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha,$

$(\mathrm{W1})_1$ 

$s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta,$

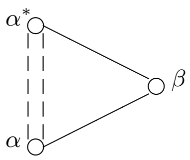
$(\mathrm{W1})_2$ 

$s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha,$

$(\mathrm{W1})_3$ 

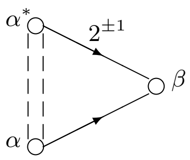
$s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha,$

以下の diagrams においては，α, β, γ は Γ_a の頂点集合 Π_a に属すると仮定する.

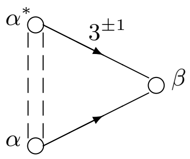
$(\mathrm{W2})_1$ 

$s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} = s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta.$

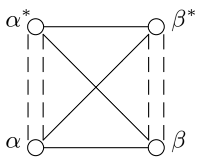
次の 2 つの diagrams においては，α は辺 $\alpha \circ\!\xrightarrow{\mu}\!\circ \beta$ において b-side と仮定する（ただし $\mu = 2^{\pm 1}, 3^{\pm 1}$）．

$(\mathrm{W2})_2$ 

$s_\alpha s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta = s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha,$

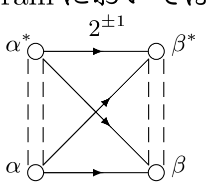
$(\mathrm{W2})_3$ 

$s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} = s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta$ and
$s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha = s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta.$

$(\mathrm{W3})_1$ 

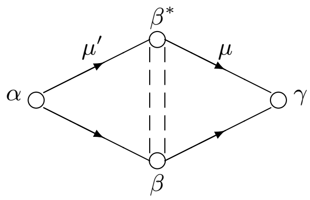
$s_{\beta^*} s_\alpha s_{\alpha^*} = s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta$ and $s_{\alpha^*} s_\beta s_{\beta^*} = s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha.$

次の diagram においては, α は辺 $\alpha \circ\!\xrightarrow{2^{\pm 1}}\!\circ \beta.$ において b-side と仮定する.

$(\mathrm{W3})_2$ 

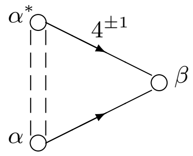
$s_{\beta^*} s_\alpha s_{\alpha^*} = s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta.$

次の diagram においては，α, γ は 2 重点線で繋がる頂点を持たず，かつ $\Gamma(R,G)$ の中で繋がっていないと仮定する．

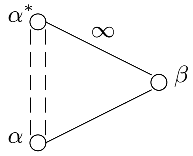
(W4) 

$$s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha s_\gamma s_\beta s_{\beta^*} s_\gamma = s_\gamma s_\beta s_{\beta^*} s_\gamma s_\alpha s_\beta s_{\beta^*} \text{ and}$$
$$s_\beta s_{\beta^*} s_\gamma s_\alpha s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha = s_\alpha s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha s_\gamma s_\beta s_{\beta^*}.$$

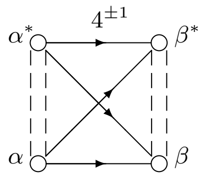
(2) $l \geq 1$ の時：(1) に現れた (W0)，および以下のリストにある subdiagram に対して右の関係式を仮定する．

$(\mathrm{W2})_4$ 

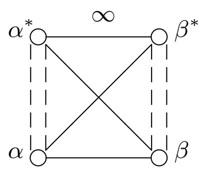
$$\begin{aligned} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} &= s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta \\ &= s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha, \end{aligned}$$

$(\mathrm{W2})_\infty$ 

$$\begin{aligned} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} &= s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta \\ &= s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha, \end{aligned}$$

$(\mathrm{W3})_4$ 

$$s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha s_{\alpha^*} = s_{\beta^*} s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta = s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_{\beta^*} = s_{\alpha^*} s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha,$$

$(\mathrm{W3})_\infty$ 

$$s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha s_{\alpha^*} = s_{\beta^*} s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta = s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_{\beta^*} = s_{\alpha^*} s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha.$$

関係式 $(\mathrm{W1})_\mu$ $(\mu = 0,1,2,3)$ は，古典的によく知られた Coxeter relations に他ならない．他方，$(\mathrm{W2})_\mu$, $(\mathrm{W3})_\mu$ $(\mu = 1,2,3,4,\infty)$ と (W4) は既存の理論には現れない関係式で **elliptic Coxeter relations** と呼ばれる．

Remark . (1) $l = 1$ の場合，通常の Coxeter relations は仮定しない．
(2) $(\mathrm{W3})_4$ (*resp.* $(\mathrm{W3})_\infty$) の diagram を考える場合，この中には $(\mathrm{W2})_4$ (*resp.* $(\mathrm{W2})_\infty$) と同型な subdiagram が複数含まれているが，これらに対応する関係式は仮定しない（$(\mathrm{W3})_4$ (*resp.* $(\mathrm{W3})_\infty$) の関係式のみ仮定する）．

3.2. **代数的楕円 Artin 群の定義.** 楕円 Artin 群の代数的な定義を与えよう．アイデアは有限型（プロトタイプ）の場合と同じで

Weyl 群（鏡映群）の定義関係式から，生成元の２乗 =1 を外せ

というものである．

Definition 3.2.1. a_α $(\alpha \in \Pi(R,G))$ を生成元とし，Coxeter relations と elliptic Coxeter relations のみ（生成元の 2 乗 =1 は仮定しない）を基本関係式とする群を $A^a(R,G)$ と書き，**代数的楕円 Artin 群 (algebraic elliptic Artin group)** と呼ぶ．

繰り返しになるが,

Weyl 群（鏡映群）の定義関係式から，生成元の２乗 =1 を
外すことで，Artin 群（基本群）が得られる

というのは，有限ルート系の場合なら正しいが，楕円ルート系の場合にも同じことが成り立つ保証はどこにもない．次節以降で示すように，この “対応” は楕円ルート系の場合にも正しいが，もちろん自明ではない．現時点では『抽象的に群 $A^a(R,G)$ を定義してみました』という以上のことは何もしていない．この点は特に強調しておきたい．

4. 楕円 Artin 群（その２：基本群としての理解）

本節では，ある複素領域（楕円正則軌道空間）の基本群として幾何学楕円 Artin 群 $A^g(R,G)$ を導入し，それが前節で定義した代数的楕円 Artin 群と同型になることを示す．すなわち，

鏡映群の定義関係式から，生成元の２乗 =1 を
外すことで，基本群が得られる

という strategy が，楕円ルート系の場合にも成立することを示す．

4.1. **楕円周期領域と楕円正則軌道空間**. まずは準備から始めよう．(R,G) を (F,I) に属する MERS とする．δ_b,δ_a を上述のように取る時，これらは $\mathrm{rad}(I)$ の基底になっていた：

$$\mathrm{rad}(I)=\mathbb{R}\delta_b\oplus\mathbb{R}\delta_a.$$

$\mathrm{rad}(I)$ は指定されたデータから一意的に定まる F の部分空間であるが，I は非退化ではないので，“$\mathrm{rad}(I)$ の直交補空間” を canonical に定めることは出来ない．そこで，

$$L_f:=\oplus_{i=1}^{l}\mathbb{R}\alpha_i$$

とおこう．この時，F は

$$F=L_f\oplus(\mathbb{R}\delta_b\oplus\mathbb{R}\delta_a) \tag{4.1.1}$$

と分解する．

(F_Λ,I_Λ) を (F,I) の full extension とする．$\lambda_b,\lambda_a\in F_\Lambda$ を

$$I_\Lambda(L_f,\lambda_\natural)=0,\quad I_\Lambda(\delta_\sharp,\lambda_\natural)=\delta_{\sharp,\natural},\quad I_\Lambda(\lambda_\sharp,\lambda_\natural)=0\qquad(\natural,\sharp=b,a)$$

によって定義する時，(4.1.1) は分解

$$\begin{aligned}F_\Lambda&=(\mathbb{R}\lambda_b\oplus\mathbb{R}\lambda_a)\oplus F\\&=(\mathbb{R}\lambda_b\oplus\mathbb{R}\lambda_a)\oplus L_f\oplus(\mathbb{R}\delta_b\oplus\mathbb{R}\delta_a)\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

に拡張される．以後，常にこの分解を固定して議論することにする．

実ベクトル空間の埋め込み

$$F_\Lambda\xleftarrow{\iota}\mathrm{rad}(I)$$

を思い出そう．各実ベクトル空間に対して，複素化された双対空間を

$$F_{\Lambda,\mathbb{C}}^*:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_\Lambda,\mathbb{C}),\quad \mathrm{rad}(I)_{\mathbb{C}}^*:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{rad}(I),\mathbb{C})$$

と書く．この時，上の実ベクトル空間の埋め込みは，全射

$$F_{\Lambda,\mathbb{C}}^*\xrightarrow{\iota^*}\mathrm{rad}(I)_{\mathbb{C}}^* \tag{4.1.3}$$

を誘導する．F_Λ 上の対称双線型形式 I_Λ は非退化なので，複素ベクトル空間の同型 $\nu:F_{\Lambda,\mathbb{C}}:=F_\Lambda\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}F_{\Lambda,\mathbb{C}}^*$ が

$$\langle\nu(u_\Lambda),v_\Lambda\rangle:=I_{\Lambda,\mathbb{C}}(u_\Lambda,v_\Lambda)\quad \text{for } u_\Lambda,v_\Lambda\in F_{\Lambda,\mathbb{C}}$$

により定まる．ここに $\langle\cdot,\cdot\rangle : F^*_{\Lambda,\mathbb{C}} \times F_{\Lambda,\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ は canonical pairing, $I_{\Lambda,\mathbb{C}}$ は I_Λ の複素化である．$F^*_{\Lambda,\mathbb{C}}$ 上の対称双線型形式 $I^*_{\Lambda,\mathbb{C}}$ を

$$I^*_{\Lambda,\mathbb{C}}(h_\Lambda, h'_\Lambda) := I_{\Lambda,\mathbb{C}}(\nu^{-1}(h_\Lambda), \nu^{-1}(h'_\Lambda)) \quad \text{for } h_\Lambda, h'_\Lambda \in F^*_{\Lambda,\mathbb{C}},$$

で定め，

$$c_\sharp := \nu(\delta_\sharp), \quad d_\sharp := \nu(\lambda_\sharp) \quad \text{for } \sharp = b, a \quad \text{and} \quad \mathfrak{h}_f := \nu(L_f \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

とおく．この時，(4.1.2) は複素ベクトル空間の分解

$$F^*_{\Lambda,\mathbb{C}} = (\mathbb{C}c_b \oplus \mathbb{C}c_a) \oplus \mathfrak{h}_f \oplus (\mathbb{C}d_b \oplus \mathbb{C}d_a) \tag{4.1.4}$$

を誘導する．

Note. (1) 構成から, $\mathrm{rad}(I)^*_{\mathbb{C}}$ は $F^*_{\Lambda,\mathbb{C}}$ の部分空間 $\mathbb{C}d_b \oplus \mathbb{C}d_a$ と自然に同一視される：

$$\mathrm{rad}(I)^*_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}d_b \oplus \mathbb{C}d_a.$$

(2) 分解 (4.2.4) の下に, $h_\Lambda \in F^*_{\Lambda,\mathbb{C}}$ を

$$h_\Lambda = t_b c_b + t_a c_a + z + \omega_b d_b + \omega_a d_a \quad (z \in \mathfrak{h}_f, t_b, t_a, \omega_b, \omega_a \in \mathbb{C}). \tag{4.1.5}$$

と書く．

以上の準備の下に，議論の舞台となる複素領域を定義しよう．

$$\mathbf{H} := \{\omega = \omega_b d_b + \omega_a d_a \in \mathrm{rad}(I)^*_{\mathbb{C}} \,|\, \omega_b, \omega_a \in \mathbb{C}^*,\, \mathfrak{I}(\omega_b/\omega_a) > 0\}$$

とおく．また，$F^*_{\Lambda,\mathbb{C}}$ の 2 次超曲面 Z を次で定める．

$$Z := \left\{h_\Lambda \in F^*_{\Lambda,\mathbb{C}} \,\middle|\, I^*_{\Lambda,\mathbb{C}}(h_\Lambda, h_\Lambda) = 0\right\}.$$

Definition 4.1.1. 複素領域

$$\widetilde{\mathbf{E}} := (\iota^*)^{-1}\big(\mathbf{H}\big) \cap Z$$

を**楕円周期領域 (elliptic period domain)** と呼ぶ．

簡単のため，$\iota^*|_{\widetilde{\mathbf{E}}} : \widetilde{\mathbf{E}} \to \mathbf{H}$ を ϖ と書く．こうして fiber bundle

$$\varpi : \widetilde{\mathbf{E}} \to \mathbf{H} \tag{4.1.6}$$

が得られる．

$W_\Lambda(R)$ は F_Λ に（左から）作用する．この作用は部分空間 $\mathrm{rad}(I)$ を不変に保つ．より強く $\mathrm{rad}(I)$ への作用は自明である．この $W_\Lambda(R)$-action から，双対空間 $F^*_{\Lambda,\mathbb{C}}$ への $W_\Lambda(R)$ の contragradient な作用が誘導される．$W_\Lambda(R)$ の $\mathrm{rad}(I)$ への作用が自明であることの帰結として，$W_\Lambda(R)$ の $\mathrm{rad}(I)^*_{\mathbb{C}}$ への作用も自明となる．

さらに，構成から楕円周期領域 $\widetilde{\mathbf{E}} \subset F^*_{\Lambda,\mathbb{C}}$ は $W_\Lambda(R)$ の作用で保たれることが容易にわかる．かくして，(4.1.6) の fiber bundle に $W_\Lambda(R)$ が equivariant に作用することが従う．言い換えると，

各 $\omega \in \mathbf{H}$ に対し，fiber $\varpi^{-1}(\omega)$ は $W_\Lambda(R)$ の作用で保たれる

ことがわかった．

楕円周期領域からルートに付随する超平面たちを取り除いて得られる差集合

$$\widetilde{\mathbf{E}} \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_{\alpha,\mathbb{C}}$$

を考える，これは，有限ルート系の場合の (1.2.1) 式の楕円アナロジーである．

Definition 4.1.2. 商空間

$$\left(W_\Lambda(R)\backslash\widetilde{\mathbf{E}}\right)_{reg} := W_\Lambda(R)\Big\backslash\Big(\widetilde{\mathbf{E}}\setminus\bigcup_{\alpha\in R}H_{\alpha,\mathbb{C}}\Big)$$

を**楕円正則軌道空間 (elliptic regular orbit space)** と呼ぶ.

これを (4.1.6) の fiber bundle と併せると，新たな fiber bundle

$$p:\left(W_\Lambda(R)\backslash\widetilde{\mathbf{E}}\right)_{reg}\to\mathbf{H} \tag{4.1.7}$$

が得られる.

4.2. **幾何学的楕円 Artin 群.** 前節までの準備の下に，幾何学的な楕円 Artin 群の定義を与えよう.

Definition 4.2.1. (4.1.7) の fiber bundle の fiber の基本群 $\pi_1\big(p^{-1}(\omega)\big)$ $(\omega\in\mathbf{H})$ を $A^g(R,G)$ と書き，**幾何学的楕円 Artin 群 (geometric elliptic Artin group)** という.

Remark . (4.1.7) の fiber bundle の homotopy long exact sequence から，完全系列

$$1\to\pi_1(\text{fiber})\to\pi_1\Big(\left(W_\Lambda(R)\backslash\widetilde{\mathbf{E}}\right)_{reg}\Big)\to\pi_1(\mathbf{H})\to 1$$

が得られる.

$$\pi_1(\text{fiber})=A^g(R,G),\quad \pi_1(\mathbb{H})\cong\mathbb{Z}$$

であるから，楕円正則軌道空間の基本群 $\left(W_\Lambda(R)\backslash\widetilde{\mathbf{E}}\right)_{reg}\big)$ に関して，完全系列

$$1\to A^g(R,G)\to\pi_1\Big(\left(W_\Lambda(R)\backslash\widetilde{\mathbf{E}}\right)_{reg}\Big)\to\mathbb{Z}\to 1$$

が存在する.

この小論の主結果の１つは次の定理である.

Theorem 4.2.2 ([L],[SS])**.** 代数的楕円 Artin 群 $A^a(R,G)$ と幾何学的楕円 Artin 群 $A^g(R,G)$ は同型である：

$$A^a(R,G)\cong A^g(R,G). \tag{4.2.1}$$

以後，我々は (4.2.1) によって定まる群の同型類を単に**楕円 Artin 群 (elliptic Artin group)** と呼び，$A(R,G)$ と書く．Theorem 4.2.2 によって,

鏡映群の定義関係式から，生成元の２乗 $=1$ を
外すことで，基本群が得られる

という strategy が，楕円ルート系の場合にも成立することを示されたことになる.

5. Modulr group action

5.1. **R の自己同型の作る群.** 2.2 節で，楕円ルート系 R には

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のある種の合同部分群が R に自然に作用する

という，有限型・アフィン型のルート系には無い，著しい特徴があることは既に述べた．本節ではこのことをもう少し真面目に定式化してみよう.

Definition 5.1.1. F_Λ の isometry $\varphi\in O(F_\Lambda,I_\Lambda)$ が条件

$$\varphi(R)=R \tag{5.1.1}$$

を満たす時, φ は R の自己同型であるという．R の自己同型の全体のなす群を $\mathrm{Aut}_\Lambda(R)$ と書く：

$$\mathrm{Aut}_\Lambda(R):=\{\varphi\in O(F_\Lambda,I_\Lambda)\,|\,\varphi(R)=R\}.$$

$\varphi \in \mathrm{Aut}_\Lambda(R)$ とすると，定義から φ は

$$\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I) := \mathrm{rad}(I) \cap Q(R) = \mathbb{Z}\delta_b \oplus \mathbb{Z}\delta_a$$

を不変に保つ．したがって，制限写像

$$\mathrm{res}_0(\varphi) := \varphi|_{\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I)}$$

は $\mathrm{Aut}_\Lambda(R)$ から $\mathrm{GL}(\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I)) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ への準同型を与える：

$$\mathrm{res}_0 : \mathrm{Aut}_\Lambda(R) \to \mathrm{GL}(\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I)).$$

$\mathrm{GL}(\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I))$ の部分群

$$\mathrm{SL}(\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I)) := \{\phi \in \mathrm{GL}(\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I)) \mid \det(\phi) = 1\}$$

とし，$\mathrm{Aut}_\Lambda(R)$ の部分群 $\mathrm{Aut}^+_\Lambda(R)$ を，

$$\mathrm{Aut}^+_\Lambda(R) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}_\Lambda(R) \,|\, \mathrm{res}_0(\varphi) \in \mathrm{SL}(\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I))\}$$

と定める．この時，制限写像 res_0 は，$\mathrm{Aut}^+_\Lambda(R)$ から $\mathrm{SL}(\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I))$ への準同型を与える：

$$\mathrm{res}_0 : \mathrm{Aut}^+_\Lambda(R) \to \mathrm{SL}(\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I)). \tag{5.1.2}$$

Remark . $W_\Lambda(R)$ は $\mathrm{Aut}_\Lambda(R)$ の部分群である．さらに，$s_\alpha \in W_\Lambda(R)$ に対し

$$\mathrm{res}_0(s_\alpha) = \mathrm{id}$$

となる．ゆえに

$$W_\Lambda(R) \subset \mathrm{Ker}\big(\mathrm{res}_0 : \mathrm{Aut}^+_\Lambda(R) \to \mathrm{SL}(\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I))\big)$$

である．また，$\varphi \in \mathrm{Aut}^+_\Lambda(R)$ とすると，

$$\varphi \circ s_\alpha \circ \varphi^{-1} = s_{\varphi(\alpha)}.$$

したがって，$W_\Lambda(R)$ は $\mathrm{Aut}^+_\Lambda(R)$ の正規部分群である．

Definition 5.1.2. (1) res_0 による $\mathrm{Aut}^+_\Lambda(R)$ の像を Γ^+ と書く：

$$\Gamma^+ := \mathrm{res}_0(\mathrm{Aut}^+_\Lambda(R)).$$

(2) F_Λ の分解 (4.1.2) を保つ isometry の作る $O(F_\Lambda, I_\Lambda)$ の部分群を $O_{sp}(F_\Lambda, I_\Lambda)$ とし，

$$\Gamma^+_{sp} := \mathrm{res}_0\big(\mathrm{Aut}^+_\Lambda(R) \cap O_{sp}(F_\Lambda, I_\Lambda)\big)$$

とおく．

定義から明らかなように，Γ^+_{sp} は Γ^+ の部分群である．また，両者は $\mathrm{SL}(\mathrm{rad}_{\mathbb{Z}}(I))) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の指数有限の部分群（合同部分群）でもある．各楕円ルート系毎の具体的計算により，次がわかる．

Proposition 5.1.3. Γ^+_{sp} は $\Gamma_0(N)$ $(N = 1, 2, 3)$ のいずれかに同型である[14]．ただし，

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0 \bmod N \right\}.$$

Remark . (1) 多くの楕円ルート系において Γ^+_{sp} は Γ^+ と一致するが，いくつかの例外的な場合に対しては，両者は一致せず，Γ^+_{sp} は Γ^+ の真部分群になる．

(2) 単射準同型 $\chi : \Gamma^+_{sp} \to \mathrm{Aut}^+_\Lambda(R)$ であって，$\mathrm{rad}_0 \circ \chi = \mathrm{id}$ となるものが存在する．以後，この準同型を用いて $\chi(\Gamma^+_{sp})$ と Γ^+_{sp} を同一視する．

[14] $N = 1$ の場合，$\Gamma_0(1)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ そのものに他ならない．

5.2. "Modular group action" on $A(R,G)$. $\mathrm{Aut}_\Lambda(R)$ は埋め込み

$$F_\Lambda \overset{\iota}{\hookleftarrow} \mathrm{rad}(I)$$

に equivarinat に作用する．Weyl 群の場合と同様な議論により，この作用は fiber bundle

$$\varpi : \widetilde{\mathbf{E}} \to \mathbf{H} \tag{4.1.6}$$

への $\mathrm{Aut}_\Lambda(R)$ の equivariant な作用を誘導する．楕円周期領域からルートに対応する鏡映面を取り除き，さらに $W_\Lambda(R)$ で割ることで，fiber bundle

$$p : \big(W_\Lambda(R)\backslash\widetilde{\mathbf{E}}\big)_{reg} \to \mathbf{H} \tag{4.1.7}$$

が得られていたことを思い出そう．本節では，これをさらに Γ^+_{sp} で割った quotient

$$\Gamma^+_{sp}\backslash p : \Gamma^+_{sp}\backslash\big(W_\Lambda(R)\backslash\widetilde{\mathbf{E}}\big)_{reg} \to \Gamma^+_{sp}\backslash\mathbf{H} \tag{5.2.1}$$

を考える．

Remark . 作用

$$\Gamma^+_{sp} \curvearrowright \big(W_\Lambda(R)\backslash\widetilde{\mathbf{E}}\big)_{reg} \quad (\textit{resp.}\ \Gamma^+_{sp} \curvearrowright \mathbf{H})$$

は固定点を持たないので，商空間 $\Gamma^+_{sp}\backslash\big(W_\Lambda(R)\backslash\widetilde{\mathbf{E}}\big)_{reg}$ (*resp.* $\Gamma^+_{sp}\backslash\mathbf{H}$) は多様体の構造を持っていることに注意.

fiber bundle の homotopy long exact sequence の一般論から，完全系列

$$1 \to \pi_1(\text{fiber}) \to \pi_1\big(\Gamma^+_{sp}\backslash\big(W_\Lambda(R)\backslash\widetilde{\mathbf{E}}\big)_{reg}\big) \to \pi_1(\Gamma^+_{sp}\backslash\mathbf{H}) \to 1 \tag{5.2.2}$$

が得られる．fiber bundle (4.1.7) と fiber bundle (5.2.1) で fiber の構造は変わらないので，(5.2.2) においても

$$\pi_1(\text{fiber}) \cong A(R,G)$$

が成り立つ．さらに，次が成り立つ．

Proposition 5.2.1. fiber bundle (5.2.1) は global section を持つ．

このProposition の系として，完全系列 (5.2.2) は分裂することがわかる．すなわち，

$$\begin{aligned}\pi_1\big(\Gamma^+_{sp}\backslash\big(W_\Lambda(R)\backslash\widetilde{\mathbf{E}}\big)_{reg}\big) &\cong \pi_1(\text{fiber}) \rtimes \pi_1(\Gamma^+_{sp}\backslash\mathbf{H})\\ &\cong A(R,G) \rtimes \pi_1(\Gamma^+_{sp}\backslash\mathbf{H}).\end{aligned}$$

言い方を替えると，完全系列 (5.2.2) が分裂することによって，

$\pi_1(\Gamma^+_{sp}\backslash\mathbf{H})$ が $A(R,G)$ に adjoint で作用する

ことが示されたことになる．

<u>$\circ$ $\pi_1(\Gamma^+_{sp}\backslash\mathbf{H})$ の構造</u>

上にも述べた通り，Γ^+_{sp} は $\mathbf{H}$ に fixed point free に act するので，完全系列

$$1 \to \pi_1(\mathbf{H}) \to \pi_1(\Gamma^+_{sp}\backslash\mathbf{H}) \to \Gamma^+_{sp} \to 1$$

が存在する．特に，この完全系列から，基本群 $\pi_1(\Gamma^+_{sp}\backslash\mathbf{H})$ が Γ^+_{sp} の $\pi_1(\mathbf{H}) \cong \mathbb{Z}$ による中心拡大と同型であることが分かる．

他方，保型形式の理論を用いることで，次が従う．

Proposition 5.2.2 ([S3]).

$$\pi_1(\Gamma_{sp}^+\backslash\mathbf{H}) \cong \begin{cases} A(A_2) & \text{if } \Gamma_{sp}^+ \cong \Gamma_0(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \\ A(B_2) & \text{if } \Gamma_{sp}^+ \cong \Gamma_0(2), \\ A(G_2) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \text{if } \Gamma_{sp}^+ \cong \Gamma_0(3). \end{cases}$$

ここに $A(X_2)$ $(X = A, B, G)$ は rank 2 の有限ルート系に付随する Artin 群である.

以上の結果を定理の形でまとめておこう.

Theorem 5.2.3 ([SS]). (R, G) を MERS とする. この時, 対応する楕円 Artin 群 $A(R, G)$ は, 合同部分群 Γ_{sp}^+ の R への作用 (modular group action) から誘導される rank 2 の Artin 群 $A(X_2)$ の adjoint 作用を持つ.

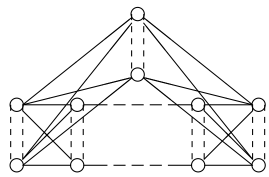
Remark . (1)『rank 2 の Artin 群 (= ある種の合同部分群の中心拡大) が楕円 Artin 群 $A(R, G)$ に作用する』という事実自身は, Maconald [M] や Cherednik [C] らによって, 実質的に（かつ部分的に）示されている. ただし, 彼らの方法は純代数的な手法によるもので, 今回のようにルート系の対称性に基づく幾何学的構成法ではない.
(2) 今回の方法は, 全てが fiber bundle (5.2.1) の section の取り方に依存している. section の取り方を替えた時, 得られる作用 $\pi_1(\Gamma_{sp}^+\backslash\mathbf{H}) \curvearrowright A(R, G)$ がどのような影響を受けるのか？は不明であり, 今後の課題と言えるであろう.

Appendix A

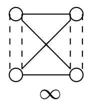
○ List of elliptic diagrams

(1) **"untwisted" case**

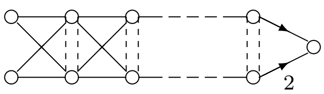
$A_l^{(1,1)}$ $(l \geq 2)$



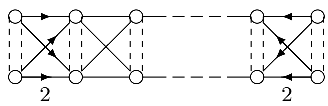
$A_1^{(1,1)}$ $(l = 1)$



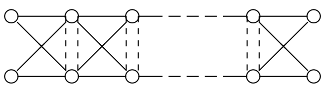
$B_1^{(1,1)}$



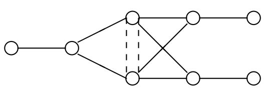
$C_n^{(1,1)}$



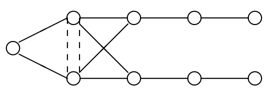
$D_n^{(1,1)}$



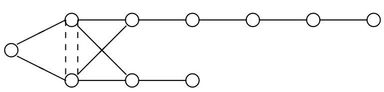
$E_6^{(1,1)}$



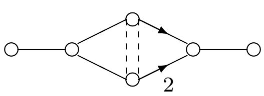
$E_7^{(1,1)}$



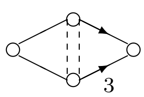
$E_8^{(1,1)}$



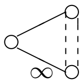
$F_4^{(1,1)}$

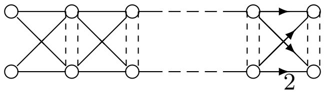


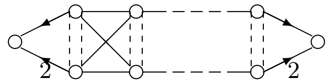
$G_2^{(1,1)}$

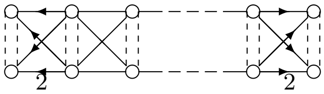


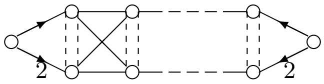
(2) **“twisted” case**

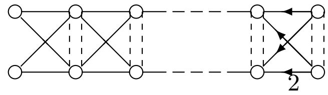
$A_1^{(1,1)*}$ 

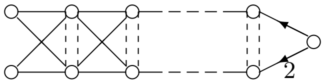
$B_l^{(1,2)}$ 

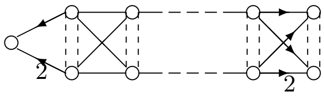
$B_l^{(2,1)}$ 

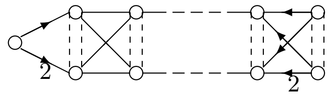
$B_l^{(2,2)}$ 

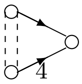
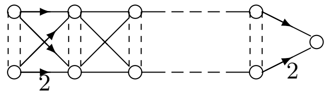
$C_l^{(1,2)}$ 

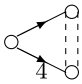
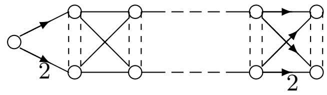
$C_l^{(2,1)}$ 

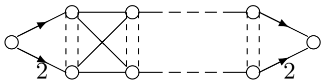
$C_l^{(2,2)}$ 

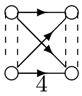
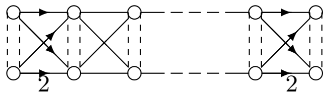
$B_l^{(2,2)*}$ 

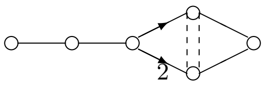
$C_l^{(1,1)*}$ 

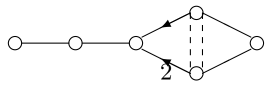
$BC_l^{(2,1)}$  $(l = 1)$  $(l \geq 2)$

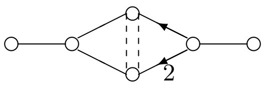
$BC_l^{(2,4)}$  $(l = 1)$  $(l \geq 2)$

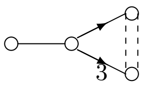
$BC_l^{(2,2)}(1)$ 

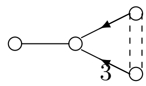
$BC_l^{(2,2)}(2)$  $(l = 1)$  $(l \geq 2)$

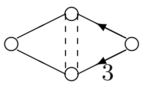
$F_4^{(1,2)}$ 

$F_4^{(2,1)}$ 

$F_4^{(2,2)}$ 

$G_2^{(1,3)}$ 

$G_2^{(3,1)}$ 

$G_2^{(3,3)}$ 

References

[A] E. Artin, *The theory of braids*, in collected papers, 491-498.

[Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4,5 et 6*, Éléments de Mathématique, Hermann Paris, 1968.

[B] E. Brieskorn, *Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe*, Invent. Math., **12**, 57-61(1971).

[BS] E. Brieskorn and K. Saito, *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*, Invent. Math., **17**, 245-271, (1972).

[C] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series **319**, Cambridge University Press (2005).

[D] P. Deligne, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Invent. Math. **17**, 273-302 (1972).

[K] V. G. Kac, "Infinite dimensional Lie algebras, 3rd ed.", Cambridge University Press.

[L] Van der Lek, "The homotopy type of complex hyperplane complements", Doctor Thesis, Nijmegen (1983).

[M] I G. Macdonald, *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials*, Cambridge Tracts in Math. **157** (2003).

[S1] K. Saito, "Extended affine root systems I", Publ. RIMS **21**, No.1 (1985), 75–179.

[S2] K. Saito, "Extended affine root systems II", Publ. RIMS **26**, No.1 (1990), 15–78.

[S3] K. Saito, "A view on elliptic integrals from primitive forms (period integrals of type A_2, B_2 and G_2)", to appear in Journal of Pure and Applied Mathematics.

[SS] K. Saito and Y. Saito, "Elliptic Artin groups", in preparation.

[ST] K. Saito and T. Takebayashi, "Extended affine root systems III", Publ. RIMS **33** (1997), 301–329.

[SShi] Y. Saito and M. Shiota, "On Hecke algebras associated with elliptic root systems and the double affine Hecke algebras", Publ. RIMS. **45** (2009), 845-905.

Department of Mathematics, Rikkyo University, Toshima-ku, Tokyo 171-8501, Japan.

E-mail address: `yoshihisa@rikkyo.ac.jp, yosihisa@ms.u-tokyo.ac.jp`