

# 一般の有限有向グラフに対するゼータ函数 の伊原表示

石川 彩香

(横浜国立大学大学院 理工学府 博士前期課程 2年)

## 概要

本稿では談話会にて省略した一般荷重ゼータ函数の伊原表示の導出過程について詳細に述べる。

伊原表示とはグラフゼータ函数における行列式表示の一種であり、中でも佐藤ゼータ [5] の伊原表示は今野-佐藤によって Glover 遷移行列の正台の特性多項式であることが示された [3]。本講演では、水野-佐藤ゼータを拡張した一般荷重ゼータを定義し、その伊原表示を導出する。本研究は森田英章氏 (室蘭工業大学) と佐藤巖氏 (小山工業高等専門学校) との共同研究である。

## 1 グラフゼータ

### 1.1 定義

集合  $V$  に対して  $E$  を 2 頂点の組  $\{u, v\}$  ( $u, v \in V$ ) を元にもつ集合とする。2 つの集合の組  $G = (V, E)$  を (無向) グラフといい、 $V, E$  の元をそれぞれ頂点、辺とよぶ。行列  $A \in \text{Mat}(\#V, \mathbb{Z})$ , 対角行列  $D \in \text{Mat}(\#V, \mathbb{Z})$  を以下で定義する:

$$\begin{aligned}(A)_{u,v} &= \#\{2 \text{ 頂点 } u, v \text{ 間の辺の個数}\}, \\(D)_{u,u} &= \#\{\text{頂点 } u \text{ に接続する辺の個数}\}.\end{aligned}$$

さらに、 $\mathfrak{A}$  を 2 頂点の順序対  $(u, v)$  ( $u, v \in V$ ) を元にもつ集合とする。このとき  $\Delta = (V, \mathfrak{A})$  を有向グラフといい、 $\mathfrak{A}$  の元を有向辺 (アーク) とよぶ。アーク  $a = (u, v) \in \mathfrak{A}$  に対し、 $u, v$  をそれぞれ  $a$  の尾 (tail), 頭 (head) といい、 $t(a), h(a)$  で表す。単純グラフ  $G = (V, E)$  に対し、 $\mathfrak{A}_G = \{(u, v), (v, u) \mid \{u, v\} \in E\}$  とするとき、 $\Delta_G = (V, \mathfrak{A}_G)$  を対称有向グラフという。これより無向グラフは特別な場合の有向グラフであるとみなせる。アークの列  $x = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  が道であるとは、 $h(a_i) = t(a_{i+1})$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ) が成り立つものをいう。  $m$  を  $x$  の長さといい、 $l(x)$  で表す。さらに、道  $x$  を  $r$  個連結させたものを  $x^r$  で表す。  $h(a_m) = t(a_1)$  のとき、 $x$  を閉路という。  $x$  がそれより短い閉路の冪で表せない場合、 $x$  は素であるという。また、 $x$  が被約であるとは  $t(a_i) \neq h(a_{i+1})$

( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ) かつ  $t(a_m) \neq h(a_1)$  となるものを指す. 長さ  $m$  の巡回置換  $\sigma = (1, 2, \dots, m)$  に対し,  $x\sigma$  で  $(a_2, a_3, \dots, a_m, a_1)$  を定める. 2つの長さが等しい閉路  $x, x'$  に対し,  $x' = x\sigma^k$  となる  $k$  が存在するとき,  $x, x'$  は同値であるといい, その同値類をサイクルとよぶ.

$u, v \in V$  に対し,  $\mathfrak{A}$  の部分集合  $\mathfrak{A}_{uv}, \mathfrak{A}(u, v)$  を以下で定める:

$$\mathfrak{A}_{uv} = \{a \in \mathfrak{A} | t(a) = u, h(a) = v\}, \quad \mathfrak{A}(u, v) = \mathfrak{A}_{uv} \cup \mathfrak{A}_{vu}.$$

## 1.2 グラフゼータ

$R$  を可換  $\mathbb{Q}$  代数とする. 写像  $\tau, \nu : \mathfrak{A} \rightarrow R$  に対し, 写像  $\theta : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow R$  を以下で定める:

$$\theta(a, a') = \tau(a')\delta_{h(a)t(a')} - \nu(a')\delta_{a^{-1}a'}.$$

ここで,  $\delta$  はクロネッカーのデルタである. ただし, 任意のアーキ  $a \in \mathfrak{A}_{uv}$  に対し, 任意の逆向きのアーキ, すなわち  $\forall b \in \mathfrak{A}_{vu}$  を  $a$  の逆アーキ  $a^{-1}$  であるとする.

$\Delta$  上の被約閉路  $x = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  ( $a_i \in \mathfrak{A}$ ) に対し, その荷重を  $\chi(x) = \theta(a_1, a_2)\theta(a_2, a_3)\dots\theta(a_m, a_1)$  で定める.  $N_m(\chi)$  を  $\Delta$  上長さ  $m$  の被約閉路の荷重の和とし,  $\Delta$  に対する一般荷重ゼータ  $Z_\Delta(t; \theta)$  を以下で定める:

$$Z_\Delta(t; \theta) := \exp \left( \sum_{m \geq 1} \frac{N_m(\chi)}{m} t^m \right).$$

これを一般荷重ゼータ関数の指数表示とよぶ. 例えば, 対称有向グラフ  $\Delta_G$  に対する一般荷重ゼータ  $Z_{\Delta_G}(t; \theta)$  について,  $\nu = 1$  としたものが水野-佐藤ゼータ,  $\tau = \nu$  としたものが佐藤ゼータ,  $\tau = \nu = 1$  としたものが伊原ゼータである. すなわち, 一般荷重ゼータはこれらを特別な場合にもつグラフゼータである.

グラフゼータを代表とする有限力学系の様々なゼータには指数表示の他に“オイラー表示”や“橋本表示”が存在することが確認されている. 森田氏はそれらの枠組みとなるゼータを与え, それがどのような条件を満たせばオイラー表示, 橋本表示をもつかを示した [4]. さらに, 一般荷重ゼータに関しては常にそれらの表示が成り立つことも示している:

**命題 1** (森田 [4]). 有限有向グラフ  $\Delta = (V, \mathfrak{A})$  上の被約素サイクルの集合を  $\mathcal{P}(\Delta)$  で表す. さらに,  $M = (\theta(a, a'))_{a, a' \in \mathfrak{A}}$  とおく. このとき, 一般荷重ゼータについて以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} Z_\Delta(t; \theta) &= \prod_{x \in \mathcal{P}(\Delta)} \frac{1}{1 - \chi(x)t^{l(x)}} \quad (:\text{オイラー表示}) \\ &= \frac{1}{\det(I - tM)} \quad (:\text{橋本表示}). \end{aligned}$$

表題にもある伊原表示とはグラフゼータでのみ存在が確認されている行列式表示であり, グラフの隣接行列や次数行列を用いて表されるものである. 例えば, 伊原ゼータの伊原表示は以下ようになる.

**命題 2** (伊原 [1]).  $G = (V, E)$  を有限単純グラフとし,  $\#V = n, \#E = m$  とする. 行列  $A, D$  をそれぞれ  $G$  の隣接行列, 次数行列とする.  $\theta = \delta_{\mathfrak{h}(a)t(a')} - \delta_{a^{-1}a'}$ . としたとき,  $G$  に対する対称有向グラフ  $\Delta_G$  上の一般荷重ゼータに対して以下の等式が成り立つ:

$$Z_{\Delta_G}(t; \theta) = \frac{1}{(1-t)^{m-n} \det(I - tA + t^2(D - I))}$$

## 2 一般荷重ゼータの伊原表示

前述の通り, 伊原表示は隣接行列や次数行列を用いた行列式表示である. すなわち, 頂点位数次の行列による行列式で表される. 一方, 橋本表示はアーク位数次の行列による行列式表示である.

伊原ゼータや水野-佐藤ゼータの伊原表示は橋本表示をうまく変形することで与えており, 一般荷重ゼータも同様の変形を行うことが可能である. 行列  $M = (\theta(a, a'))_{a, a' \in \mathfrak{A}}$  に対し,

$$\begin{cases} J := (v(a')\delta_{a^{-1}a'})_{a, a' \in \mathfrak{A}} \\ K := (\delta_{\mathfrak{h}(a)v})_{a \in \mathfrak{A}, v \in V} \\ L := (\tau(a')\delta_{vt(a')})_{v \in V, a' \in \mathfrak{A}} \end{cases}$$

とおくと  $M$  は  $KL - J$  で与えられる. 行列  $A, B$  に対し  $\det(I - AB) = \det(I - BA)$  が成り立つことに注意すると,  $Z_{\Delta}(t; \theta)$  は以下のように変形できる:

$$\begin{aligned} Z_{\Delta}(t; \theta)^{-1} &= \det(I - t(KL - J)) \\ &= \det((I + tJ) - tKL) \\ &= \det(I - tKL(I + tJ)^{-1}) \det(I + tJ) \\ &= \det(I - tL(I + tJ)^{-1}K) \det(I + tJ). \end{aligned}$$

伊原表示は行列  $I - tL(I + tJ)^{-1}K$  を計算して隣接行列や次数行列の導出を試みる.

各 2 頂点  $u, v \in V$  に対し,

$$\begin{cases} J(u, v) := (v(a')\delta_{a^{-1}a'})_{a, a' \in \mathfrak{A}(u, v)} \\ K(u, v) := (\delta_{\mathfrak{h}(a)v})_{a \in \mathfrak{A}(u, v), v \in V} \\ L(u, v) := (\tau(a')\delta_{vt(a')})_{v \in V, a' \in \mathfrak{A}(u, v)} \end{cases}$$

とおく. さらに, 頂点集合  $V$  に全順序を入れる. それに基づいて集合  $\mathfrak{A}$  に対しても順序を与える. 頂点  $u, v, w, x \in V$  について  $u \leq v, w \leq x, u \leq w$  のとき, アーク  $a \in \mathfrak{A}(u, v), a' \in \mathfrak{A}(w, x)$  の順序は  $a \leq a'$  と定める. さらに,  $a \in \mathfrak{A}_{uv}, a' \in \mathfrak{A}_{vu}$  に対する順序は  $a \leq a'$  とする. これらの順序に従って行列  $J, K, L$  を上で定めた小行列で分解できるように変形すると, 以下の等式が得られる.

$$L(I + tJ)^{-1}K = \sum_{u, v \in V, u \leq v} L(u, v)(I + tJ(u, v))^{-1}K(u, v)$$

各  $J(u, v)$  はその 2 頂点間の有向辺の様相により, 以下の三種の行列に分類される:

- (i) 逆アークが存在しない場合, すなわち, 相異なる 2 つの頂点  $u, v \in V$  に対し  $\#\mathfrak{A}(u, v) \neq 0$  であり,  $\#\mathfrak{A}_{uv} = 0$  または  $\#\mathfrak{A}_{vu} = 0$  となるとき,  $J(u, v) = O$ ,
- (ii) 逆アークが存在する場合, すなわち, 相異なる 2 つの頂点  $u, v \in V$  に対し  $\#\mathfrak{A}_{u,v} = k \neq 0$  かつ  $\#\mathfrak{A}_{w,v} = l \neq 0$  となるとき,

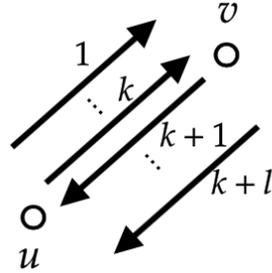
$$J(u, v) = \begin{pmatrix} & & & v_{k+1} & \cdots & v_{k+l} \\ & \mathbf{0} & & \vdots & & \vdots \\ & & & v_{k+1} & \cdots & v_{k+l} \\ v_1 & \cdots & v_k & & & \\ \vdots & & \vdots & & \mathbf{0} & \\ v_1 & \cdots & v_k & & & \end{pmatrix},$$

- (iii) ループの場合, すなわち, 頂点  $u \in V$  に対し,  $\#\mathfrak{A}(u, u) = k \neq 0$  のとき,

$$J(u, u) = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k \\ \vdots & & \vdots \\ v_1 & \cdots & v_k \end{pmatrix}.$$

以下, この 3 つの場合に分けて  $L(u, v)(I + tJ(u, v))^{-1}K(u, v)$  を計算する. (i) の場合, 明らかに  $L(u, v)(I + tJ(u, v))^{-1}K(u, v) = L(u, v)K(u, v)$  である. (ii), (iii) の場合は以下の通りである.

## 2.1 多重アーク



上のグラフについて考える. 行列  $J(u, v), K(u, v), L(u, v)$ , は以下のようになる:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & v_{k+1} & \cdots & v_{k+l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1 & \cdots & v_k & v_{k+1} & \cdots & v_{k+l} \\ \vdots & & \vdots & & & \\ v_1 & \cdots & v_k & & & 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

$$K(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$L(u, v) = \begin{pmatrix} \tau_{k+1} & \cdots & \tau_{k+l} \\ \tau_1 & \cdots & \tau_k \end{pmatrix}.$$

ここで, 以下の定理を用いて計算を進める:

**定理 1 (Schur).** ブロック行列  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  ( $A, D$ : 正方行列,  $A$ : 正則) に対し,  $M$  の  $A$  に関する Schur 補行列  $D - CA^{-1}B$  を  $M/A$  で表す. このとき,  $M$  の逆行列と行列式は以下で与えられる:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\det M = \det A \det M/A.$$

**定理 2** (Woodbury). 定理 1 で用いた行列  $A, B, C, D$  について  $D$  が正則のとき, 以下の等式が成り立つ:

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = (M/D)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1}.$$

さらにこのとき, 定理 1 の  $M$  の行列式は以下で与えられる:

$$\det M = \det D \det M/D.$$

この定理を用いて,  $(I + tJ(u, v))^{-1}$  は以下のように書ける:

$$(I + tJ(u, v))^{-1} = \begin{pmatrix} (I - t^2BC)^{-1} & -tB(I - t^2CB)^{-1} \\ -t(I - t^2CB)^{-1}C & (I - t^2CB)^{-1} \end{pmatrix}.$$

$(I - t^2BC)^{-1}, (I - t^2CB)^{-1}$  を計算する. まず,  $BC, CB$  は

$$BC = (v_{k+1} + \dots + v_{k+l}) \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_k \\ \vdots & & \vdots \\ v_1 & \dots & v_k \end{pmatrix},$$

$$CB = (v_1 + \dots + v_k) \begin{pmatrix} v_{k+1} & \dots & v_{k+l} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k+1} & \dots & v_{k+l} \end{pmatrix}.$$

となる. ここで, 以下の定理が成り立つことに注意する.

**定理 3.** 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

に対し,  $\hat{A} := (\text{tr}(A)I - A)$  とおく. このとき,

$$(I + A)^{-1} = \frac{1}{\det(I + A)}(I + \hat{A})$$

が成り立つ.

これにより,  $(I - t^2CB)^{-1}, (I - t^2BC)^{-1}$  は以下のように書ける:

$$(I - t^2CB)^{-1} = \frac{1}{\det(I - t^2CB)}(I + t^2\widehat{CB}) = \frac{1}{\det(I + tJ(u, v))}(I + t^2\widehat{CB}),$$

$$(I - t^2BC)^{-1} = \frac{1}{\det(I - t^2BC)}(I + t^2\widehat{BC}) = \frac{1}{\det(I + tJ(u, v))}(I + t^2\widehat{BC})$$

$\widehat{CB} = O, \widehat{BC} = O$  であることに注意すると,

$$-tB(I - t^2CB)^{-1} = \frac{-tB}{\det(I + tJ(u, v))}, -t(I - t^2CB)^{-1}C = \frac{-tC}{\det(I + tJ(u, v))}.$$

これらの結果から,  $(I + tJ)^{-1}$  は以下で表せる :

$$(I + tJ(u, v))^{-1} = \frac{1}{\det(I + tJ(u, v))} \left\{ I + t^2 \begin{pmatrix} \widehat{BC} & O \\ O & \widehat{CB} \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix} \right\}$$

さらに,

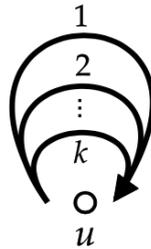
$$\begin{pmatrix} \widehat{BC} & O \\ O & \widehat{CB} \end{pmatrix} K(u, v) = O$$

であることがすぐに分かる. よって,

$$L(u, v)(I + tJ(u, v))^{-1}K(u, v) = \frac{1}{\det(I + tJ(u, v))} \{L(u, v)K(u, v) - tL(u, v)J(u, v)K(u, v)\}$$

が成り立つ.

## 2.2 多重ループ



次に上のグラフについて考える. 行列  $J(u, u), K(u, u), L(u, u)$  は以下のようになる:

$$J(u, u) = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_k \\ \vdots & & \vdots \\ v_1 & \dots & v_k \end{pmatrix},$$

$$K(u, u) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$L(u, u) = (\tau_1 \quad \dots \quad \tau_k).$$

定理 3 から

$$(I + tJ(u, u))^{-1} = \frac{1}{\det(I + tJ(u, u))} \{I + t\widehat{J(u, u)}\}$$

となることがわかる.  $\widehat{J(u,u)}K(u,u) = O$  であることから,  $L(u,u)(I + tJ(u,u))^{-1}K(u,u)$  は

$$L(u,u)(I + tJ(u,u))^{-1}K(u,u) = \frac{1}{\det(I + tJ(u,u))}L(u,u)K(u,u)$$

となる.

## 2.3 主定理

ここで,

$$A_{\Delta}^{\theta} = \sum_{\substack{u,v \in V, u \leq v \\ \mathfrak{A}(u,v) \neq \emptyset}} \frac{1}{\det(I + tJ(u,v))} L(u,v)K(u,v),$$

$$D_{\Delta}^{\theta} = \sum_{\substack{u,v \in V, u \leq v \\ \#\mathfrak{A}_{uv} \#\mathfrak{A}_{vu} \neq 0}} \frac{1}{\det(I + tJ(u,v))} L(u,v)J(u,v)K(u,v)$$

と置いたとき,  $A_{\Delta}^{\theta}, D_{\Delta}^{\theta}$  はそれぞれ“荷重隣接行列”, “荷重次数行列”とよぶべき行列となる [2]. 実際, グラフや荷重を命題 2 と同様にすると,

$$A_{\Delta}^{\theta} = (1 - t^2)^{-1}A, D_{\Delta}^{\theta} = (1 - t^2)^{-1}D$$

となる. 以上より,

$$L(I + tJ)^{-1}K = A_{\Delta}^{\theta} - tD_{\Delta}^{\theta}$$

が成り立つことから, 一般荷重ゼータの伊原表示

$$Z_{\Delta}(t; \theta) = \frac{1}{\det(I + tJ) \det(I - tA_{\Delta}^{\theta} + t^2D_{\Delta}^{\theta})}$$

が得られる.

## 参考文献

- [1] Y. Ihara. On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 18(3):219–235, 1966.
- [2] A. Ishikawa, H. Morita, and I. Sato. The ihara expression for a generalized weighted zeta function of bartholdi type for a finite digraph. *in preparation*.
- [3] N. Konno and I. Sato. On the relation between quantum walks and zeta functions. *Quantum Information Processing*, 11(2):341–349, 2012.

- [4] H. Morita. Ruelle zeta functions for finite digraphs. *preprint*.
- [5] I. Sato. A new bartholdi zeta function of a graph. *Int. J. Algebra*, 1:269-281, 2007.