半無限ヤング盤の組合せ論について

石井 基裕

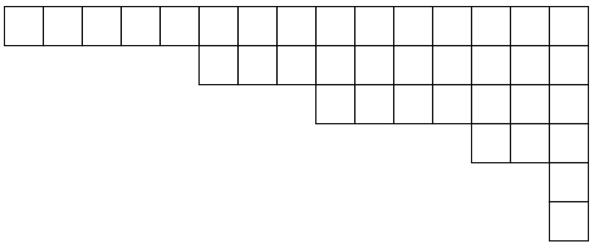
群馬大学 教育学部 数学教育講座

概 要

ヤング盤の一般化である「半無限ヤング盤」を導入する. そして, これらのなすアフィン A 型の柏原結晶がアフィン A 型量子群上の端ウェイト加群の結晶基底と同型であることを述べる. また, この同型対応の証明において重要な役割を果たすアフィン・ワイル群上の半無限ブリュア半順序の盤判定法について述べる.

1　半無限ヤング盤

自然数 n を一つ固定し, $I = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ とおく. 記号 ϖ_i $(i \in I)$ によって i 個の箱をもつ 1 列型のヤング図形を表す. また, $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, によって, 各 $i \in I$ について長さ i の列を m_i 個もつヤング図形を表す. 例えば, $\lambda = 5\varpi_1 + 3\varpi_2 + 4\varpi_3 + 2\varpi_4 + \varpi_6$ は次のヤング図形を表す.



この例のように, 本稿では右側の列をそろえた形にヤング図形を表示する.

与えられたヤング図形 λ の各箱に $\{1, 2, \ldots, n\}$ に属する数を一つずつ記入したものを型 λ の盤という. また, 各列において, 記入されてる数が上から下に向かって狭義に増加しているような盤を列標準盤という. 型 λ の列標準盤全体の集合を $\mathrm{CST}(\lambda)$ と表す. 例えば, $n = 3$ としたとき,

$$\mathrm{CST}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & \\ \cline{2-2}\end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 2 \\ \cline{2-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 3 \\ \cline{2-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 3 \\ \cline{2-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 2 \\ \cline{2-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 3 \\ \cline{2-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 3 \\ \cline{2-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 2 \\ \cline{2-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 3 \\ \cline{2-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 3 \\ \cline{2-2}\end{array} \right\}$$

となる.

$\mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ について, 上から s 番目の箱に記入されている数を $\mathsf{T}(s) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ と表す. $\mathsf{T}_\nu \in \mathrm{CST}(\varpi_{i_\nu})$ $(1 \leq \nu \leq N)$ とするとき, $\prod_{\nu=1}^{N} \mathsf{T}_\nu = \mathsf{T}_1 \mathsf{T}_2 \cdots \mathsf{T}_N$ によって, 左から ν 番目の列が T_ν であるような列標準盤を表す.

$$\mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\varpi_i) = \mathrm{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z} = \{(\mathsf{T}, c) \mid \mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i),\ c \in \mathbb{Z}\}$$

とおく.

定義 1.1. (1) $(\mathsf{T}, c), (\mathsf{T}', c') \in \mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\varpi_i)$ に対して, 次の 2 条件が成り立つとき, $(\mathsf{T}, c) \overset{(i)}{\succeq} (\mathsf{T}', c')$ と定める.

(i) $c - c' \geq 0$.

(ii) $1 \leq u \leq i - c + c'$ であるならば $\mathsf{T}(u + c - c') \geq \mathsf{T}'(u)$ である.

(2) $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I$, とし, $N = \sum_{i \in I} m_i$ とおく. また,

$$\mathbb{T} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{\nu=1}^{m_i} \mathsf{T}_\nu^{(i)}, \left(c_\nu^{(i)} \right) \right) \in \mathrm{CST}(\lambda) \times \mathbb{Z}^N$$

とする. ただし, $(\mathsf{T}_\nu^{(i)}, c_\nu^{(i)}) \in \mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\varpi_i)$, $i \in I$, $1 \leq \nu \leq m_i$, である. $\mathbb{T}$ が条件

$$\text{各 } i \in I \text{ に対して } (\mathsf{T}_1^{(i)}, c_1^{(i)}) \overset{(i)}{\succeq} (\mathsf{T}_2^{(i)}, c_2^{(i)}) \overset{(i)}{\succeq} \cdots \overset{(i)}{\succeq} (\mathsf{T}_{m_i}^{(i)}, c_{m_i}^{(i)}) \text{ が成り立つ}$$

を満たすとき, $\mathbb{T}$ は型 λ の**半無限ヤング盤**であるという. 型 λ の半無限ヤング盤全体の集合を $\mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ と表す.

2 $\mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ の柏原結晶構造

自由アーベル群 $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}x_i$ の部分群 $\mathbb{Z}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ による剰余群を P とし, 各 x_i $(1 \leq i \leq n)$ を含む剰余類を $\epsilon_i \in P$ と表す. また, $\mathbb{Z}\delta$ を δ で生成される階数 1 の自由アーベル群とし, $P_{\mathrm{af}} = P \oplus \mathbb{Z}\delta$ とおく. $I_{\mathrm{af}} = \{0\} \sqcup I$ とおく. [6, §3.7] に従って, $\mathrm{CST}(\varpi_i)$ $(i \in I)$ に P で重み付けられた $A_{n-1}^{(1)}$ 型柏原結晶の構造を次のように定める (柏原結晶については [4] を参照せよ). 以下, $\mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ とする. また, 必要に応じて $\mathsf{T} = \{\mathsf{T}(1), \mathsf{T}(2), \ldots, \mathsf{T}(i)\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ という同一視を行う.

- $\mathrm{wt}(\mathsf{T}) = \sum_{s=1}^i \epsilon_{\mathsf{T}(s)} \in P$ と定める.
- $j \in I$ とする. $\mathsf{T}(s) = j + 1$ かつ $j \notin \mathsf{T}$ のとき, $\tilde{e}_j \mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ を $(\tilde{e}_j \mathsf{T})(s) = j$ かつ $(\tilde{e}_j \mathsf{T})(u) = \mathsf{T}(u)$ $(1 \leq u \leq i, u \neq s)$ と定める. それ以外の場合には, $\tilde{e}_j \mathsf{T} = \mathbf{0}$ と定める.
- $1 \in \mathsf{T}$ かつ $n \notin \mathsf{T}$ のとき, $\tilde{e}_0 \mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ を $(\tilde{e}_0 \mathsf{T})(i) = n$ かつ $(\tilde{e}_0 \mathsf{T})(u) = \mathsf{T}(u + 1)$ $(1 \leq u \leq i - 1)$ と定める. それ以外の場合には, $\tilde{e}_0 \mathsf{T} = \mathbf{0}$ と定める.
- $j \in I$ とする. $\mathsf{T}(s) = j$ かつ $j + 1 \notin \mathsf{T}$, のとき, $\tilde{f}_j \mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ を $(\tilde{f}_j \mathsf{T})(s) = j + 1$ かつ $(\tilde{f}_j \mathsf{T})(u) = \mathsf{T}(u)$ $(1 \leq u \leq i, u \neq s)$ と定める. それ以外の場合には, $\tilde{f}_j \mathsf{T} = \mathbf{0}$ と定める.
- $1 \notin \mathsf{T}$ かつ $n \in \mathsf{T}$, のとき, $\tilde{f}_0 \mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ を $(\tilde{f}_0 \mathsf{T})(1) = 1$ かつ $(\tilde{f}_0 \mathsf{T})(u) = \mathsf{T}(u-1)$ $(2 \leq u \leq i)$ と定める. それ以外の場合には, $\tilde{f}_0 \mathsf{T} = \mathbf{0}$ と定める.

- 次のように定める.

$$\varepsilon_j(\mathsf{T}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \tilde{e}_j\mathsf{T} \neq \mathbf{0}, \\ 0 & \text{if } \tilde{e}_j\mathsf{T} = \mathbf{0}, \end{cases} \qquad \varphi_j(\mathsf{T}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \tilde{f}_j\mathsf{T} \neq \mathbf{0}, \\ 0 & \text{if } \tilde{f}_j\mathsf{T} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

定義 2.1. $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I$, とし, $N = \sum_{i \in I} m_i$ とおく. $\mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ に P_{af} で重み付けられた $A_{n-1}^{(1)}$ 型柏原結晶の構造を次の手順により定める. 以下, $\mathbb{T} = (\mathsf{T}_1\mathsf{T}_2 \cdots \mathsf{T}_N, (c_1, c_2, \ldots, c_N)) \in \mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$, $j \in I_{\mathrm{af}}$ とする.

(1) $\mathrm{wt}(\mathbb{T}) = \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{wt}(\mathsf{T}_\nu) - \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \delta \in P_{\mathrm{af}}$ と定める.

(2) $\mathsf{T} \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ とする. $j \in I$ に対して, $\epsilon^{(j)}(\mathsf{T}) \in \{\oplus, \ominus, \bullet\}$ を次で定義する.

$$\epsilon^{(j)}(\mathsf{T}) = \begin{cases} \oplus & j \in \mathsf{T} \text{ かつ } j+1 \notin \mathsf{T} \text{ のとき}, \\ \ominus & j \notin \mathsf{T} \text{ かつ } j+1 \in \mathsf{T} \text{ のとき}, \\ \bullet & \text{その他の場合}. \end{cases}$$

同様に, $\epsilon^{(0)}(\mathsf{T}) \in \{\oplus, \ominus, \bullet\}$ を次で定義する.

$$\epsilon^{(0)}(\mathsf{T}) = \begin{cases} \oplus & n \in \mathsf{T} \text{ かつ } 1 \notin \mathsf{T} \text{ のとき}, \\ \ominus & n \notin \mathsf{T} \text{ かつ } 1 \in \mathsf{T} \text{ のとき}, \\ \bullet & \text{その他の場合}. \end{cases}$$

(3) 列 $\left(\epsilon^{(j)}(\mathsf{T}_1), \ldots, \epsilon^{(j)}(\mathsf{T}_N)\right)$ において, $\nu < \nu'$, $\epsilon^{(j)}(\mathsf{T}_\nu) = \oplus$, $\epsilon^{(j)}(\mathsf{T}_{\nu'}) = \ominus$, かつ $\epsilon^{(j)}(\mathsf{T}_\mu) = \bullet$ $(\nu < \mu < \nu')$ を満たす組 $\left(\epsilon^{(j)}(\mathsf{T}_\nu), \epsilon^{(j)}(\mathsf{T}_{\nu'})\right) = (\oplus, \ominus)$ を $(\bullet, \bullet)$ に置き換える操作を可能な限り繰り返す. 最終的に得られる列を $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T}) \in \{\oplus, \ominus, \bullet\}^N$ とする.

(4) $\varepsilon_j(\mathbb{T})$ は $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T})$ に現れる $\ominus$ の個数として定め, $\varphi_j(\mathbb{T})$ は $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T})$ に現れる $\oplus$ の個数として定める.

(5) $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T})$ の中に $\ominus$ が存在しないとき, $\tilde{e}_j\mathbb{T} = \mathbf{0}$ と定める. $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T})$ の中に $\ominus$ が存在し, 最も右の $\ominus$ が ν 番目の位置であるとき,

$$\tilde{e}_j\mathbb{T} = (\mathsf{T}_1 \cdots \mathsf{T}_{\nu-1}\,(\tilde{e}_j\mathsf{T}_\nu)\,\mathsf{T}_{\nu+1} \cdots \mathsf{T}_N, (c_1, \ldots, c_{\nu-1}, c_\nu - \delta_{j,0}, c_{\nu+1}, \ldots, c_N))$$

と定める.

(6) $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T})$ の中に $\oplus$ が存在しないとき, $\tilde{f}_j\mathbb{T} = \mathbf{0}$ と定める. $\epsilon^{(j)}(\mathbb{T})$ の中に $\oplus$ が存在し, 最も左の $\oplus$ が ν 番目の位置であるとき,

$$\tilde{f}_j\mathbb{T} = \Big(\mathsf{T}_1 \cdots \mathsf{T}_{\nu-1}\,(\tilde{f}_j\mathsf{T}_\nu)\,\mathsf{T}_{\nu+1} \cdots \mathsf{T}_N, (c_1, \ldots, c_{\nu-1}, c_\nu + \delta_{j,0}, c_{\nu+1}, \ldots, c_N)\Big).$$

と定める.

3 主結果

主結果を述べるために, 端ウェイト加群とその結晶基底について簡単に説明する.

$\mathfrak{g}$ を対称化可能なカッツ・ムーディ・リー環とし, $\mathcal{W} = \langle r_i \mid i \in \mathcal{I} \rangle$ を $\mathfrak{g}$ のワイル群とする. $U_q(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に付随する量子群とし, そのシュバレイ生成元を $e_i, f_i, q^{\pm h_i}$ $(i \in \mathcal{I})$ とする.

Λ を $\mathfrak{g}$ の整ウェイト, すなわち $\Lambda(h_i) \in \mathbb{Z}$ $(i \in \mathcal{I})$ を満たす $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{C} h_i$ 上の線型関数とする. 可積分 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 M のベクトル $u \in M$ が端ウェイト Λ の端ウェイト・ベクトルであるとは, ある $u_w \in M$ $(w \in \mathcal{W})$ が存在して, 次の条件を満たすことである.

- 単位元 $e \in \mathcal{W}$ に対して, $u_e = u$ である.
- 各 $w \in \mathcal{W}$ に対して, u_w のウェイトは $w\Lambda$ である.
- 各 $w \in \mathcal{W}$, $i \in \mathcal{I}$ に対して, $w\Lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるならば, $e_i u_w = 0$ かつ $f_i^{(w\Lambda(h_i))} u_w = u_{r_i w}$ である.
- 各 $w \in \mathcal{W}$, $i \in \mathcal{I}$ に対して, $w\Lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ であるならば, $f_i u_w = 0$ かつ $e_i^{(-w\Lambda(h_i))} u_w = u_{r_i w}$ である.

ただし, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $f_i^{(k)}$ と $e_i^{(k)}$ とは, それぞれ f_i^k と e_i^k とを「$k!$ の q 類似」で割ったものを表す.

$\mathfrak{g}$ の整ウェイト Λ に付随する $U_q(\mathfrak{g})$ 上の端ウェイト加群 $V(\Lambda)$ とは, ベクトル u_Λ で生成される可積分 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群であり, 次の性質を満たすものとして定義される.

> 任意の可積分 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 M とその任意の端ウェイト Λ の端ウェイト・ベクトル $u \in M$ とに対して, u_Λ を u に送るような $U_q(\mathfrak{g})$ 加群の準同型写像 $V(\Lambda) \to M$ が一意的に存在する.

[3, Proposition 8.2.2] により, 全ての整ウェイト Λ に対して, $V(\Lambda)$ は存在し, さらに $V(\Lambda)$ は結晶基底 $\mathcal{B}(\Lambda)$ をもつ. Λ が優整ウェイトであるならば, $V(\Lambda)$ は既約な可積分最高ウェイト加群であり, $V(-\Lambda)$ は既約な可積分最低ウェイト加群である. 端ウェイト加群の詳細については [1, 3, 5] を参照せよ.

$\mathfrak{g}$ が $A_{n-1}^{(1)}$ 型であるとする ($\mathcal{I} = I_{\mathrm{af}}$ と考える). このとき,

$$\varpi_i(h_j) = \begin{cases} \delta_{ij} & j \in I \text{ のとき}, \\ -1 & j = 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

により ϖ_i を i 番目のレベル・ゼロ基本ウェイトと同一視する. すると, 任意の $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I$, に対して, 端ウェイト加群 $V(\lambda)$ 及びその結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ が定まる. $V(\lambda)$ は最高ウェイト加群でも最低ウェイト加群でもない. また, $V(\lambda)$ は直既約加群ではあるが, (半) 単純加群であるとは限らない.

定理 3.1. 上の状況で, $\mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ と $\mathcal{B}(\lambda)$ とは P_{af} で重み付けられた $A_{n-1}^{(1)}$ 型柏原結晶として同型である.

この定理は, 次の 2 つの結果を組み合わせることによって証明される.

- 半無限ラクシュミバイ・セシャドゥリ・パス ([2, Definition 3.1.2]) に対する標準単項式理論.
- アフィン・ワイル群の半無限ブリュア半順序に対する盤判定法.

半無限ラクシュミバイ・セシャドゥリ・パス及びその標準単項式理論の説明は本稿では省略し, 以下では半無限ブリュア半順序の盤判定法について述べる.

$W = \langle r_i = (i\ i+1) \mid i \in I \rangle$ を n 次対称群 (すなわち A_{n-1} 型ワイル群) とする. W は $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}x_i$ に添字 $1 \le i \le n$ の置換として作用する. この作用は, W の P への作用を誘導する. 部分加群 $Q = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) \subset P$ はこの作用で閉じている. そこで, $W_{\mathrm{af}} = W \ltimes Q$ と定める. 群 W_{af} を W に付随するアフィン・ワイル群 (すわなち $A_{n-1}^{(1)}$ 型ワイル群) という (上の記号で, $W_{\mathrm{af}} = \mathcal{W} = \langle r_i \mid i \in \mathcal{I} = I_{\mathrm{af}} \rangle$ と考える). W も W_{af} もコクセター群であるので, ブリュア半順序と呼ばれる半順序構造を持つが, 上記の端ウェイト加群の性質を記述する際には, 次に述べる**半無限ブリュア半順序** ([2, Definition 2.4.2]) が重要な役割を果たす.

半無限ブリュア半順序の定義を述べるために, いくつかの準備を行う.

$w \in W$ に対して,

$$\ell(w) = \min\{l \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \mid w = r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_l},\ i_1, i_2, \ldots, i_l \in I\}$$

と定義する. また, $\xi \in Q$ を $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(i \in I)$ の線型結合として表したときの係数の総和を $\mathrm{ht}(\xi) \in \mathbb{Z}$ とする. このとき, $x = (w, \xi) \in W_{\mathrm{af}}$ に対して,

$$\ell^{\frac{\infty}{2}}(x) = \ell(w) + 2 \times \mathrm{ht}(\xi)$$

と定義する.

ある r_i $(i \in I_{\mathrm{af}})$ と共役である W_{af} の元を鏡映と呼ぶ. $x \in W_{\mathrm{af}}$ と鏡映 $s \in W_{\mathrm{af}}$ とに対して, $\ell^{\frac{\infty}{2}}(sx) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(x) + 1$ が成り立つとき, $sx \leftarrow x$ と定義する. W_{af} におけるこの 2 項関係 $\leftarrow$ の推移的閉包として, W_{af} 上の半無限ブリュア半順序 $\succeq$ を定める. すなわち, $x \leftarrow \cdots \leftarrow y$ という列が存在するとき, $x \succeq y$ と定める.

次に, 各 $i \in I$ に対して,

$$W_{(i),\mathrm{af}} = \langle r_j \mid j \in I \setminus \{i\} \rangle \ltimes \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \mathbb{Z}\alpha_i$$

という W_{af} の部分群を考える. 剰余群 $W_{\mathrm{af}}/W_{(i),\mathrm{af}}$ は, 各剰余類の中で (通常の) ブリュア半順序に関して最小な代表元からなる完全代表系 $W_{\mathrm{af}}^{(i)}$ をもつ. それは次のような形に記述される.

$$W_{\mathrm{af}}^{(i)} = \{(wz_c, c\alpha + \phi(c)) \in W_{\mathrm{af}} \mid w \in W^{(i)},\ c \in \mathbb{Z}\}.$$

ただし,

$$W^{(i)} = \{w \in W \mid w(1) < w(2) < \cdots < w(i) \text{ かつ } w(i+1) < w(i+2) < \cdots < w(n)\}$$

かつ $(z_c, \phi(c)) \in W_{(i),\mathrm{af}}$ であり, z_c と $\phi(c)$ とは各 $c \in \mathbb{Z}$ に対して具体的に求めることができる. 自然な射影を $\Pi^{(i)} : W_{\mathrm{af}} \to W_{\mathrm{af}}^{(i)}$ とする. $w \in W^{(i)}$ に対して, $\mathsf{T}_w \in \mathrm{CST}(\varpi_i)$ を $\mathsf{T}_w(s) = w(s)$ $(1 \le s \le i)$ と定義する.

$x \in W_{\mathrm{af}}^{(i)}$ と鏡映 $s \in W_{\mathrm{af}}$ とに対して, $\ell^{\frac{\infty}{2}}(sx) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(x) + 1$ が成り立つとき, $sx \in W_{\mathrm{af}}^{(i)}$ となることが分かる. よって, 上記と同様にして, $W_{\mathrm{af}}^{(i)}$ における半無限ブリュア半順序 $\overset{(i)}{\succeq}$ を定めることができる.

定理 3.2. (1) 写像

$$Y^{(i)} : W_{\mathrm{af}}^{(i)} \to \mathbb{Y}^{\frac{\infty}{2}}(\varpi_i), \ (wz_c, c\alpha + \phi(c)) \mapsto (\mathsf{T}_w, c),$$

は well-defined であり, かつ全単射である.

(2) $x, y \in W_{\mathrm{af}}^{(i)}$ に対して, $x \overset{(i)}{\succeq} y$ であることと $Y^{(i)}(x) \overset{(i)}{\succeq} Y^{(i)}(y)$ であることとは同値である.

(3) $x, y \in W_{\mathrm{af}}$ に対して, 次の 3 条件は互いに同値である.

(i) $x \succeq y$.

(ii) 各 $i \in I$ に対して, $\Pi^{(i)}(x) \overset{(i)}{\succeq} \Pi^{(i)}(y)$ が成り立つ.

(iii) 各 $i \in I$ に対して, $(Y^{(i)} \circ \Pi^{(i)})(x) \overset{(i)}{\succeq} (Y^{(i)} \circ \Pi^{(i)})(y)$ が成り立つ.

謝辞 室蘭工業大学数理科学談話会における講演の手配をして下さいました森田英章先生をはじめ, 談話会に参加して頂いた室蘭工業大学の先生方に御礼申し上げます.

参考文献

[1] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* **123** (2004), 335-402.

[2] M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai–Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, *Adv. Math.* **290** (2016), 967-1009.

[3] M. Kashiwara, Crystal bases of modified quantized enveloping algebra, *Duke Math. J.* **73** (1994), 383-413.

[4] M. Kashiwara, On crystal bases. Representations of groups (Banff, AB, 1994), 155-197, CMS Conf. Proc., 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[5] M. Kashiwara, On level zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117-175.

[6] M. Shimozono, Affine type A crystal structure on tensor products of rectangles, Demazure characters, and nilpotent varieties, *J. Alg. Comb.* **15** (2002), 151-187.