Young tableau を用いた根付き木の数え上げ

石川彩香
横浜国立大学大学院 理工学府 博士前期課程

概 要

n 頂点ラベル付き木の個数は，ケイリーの公式より n^{n-2} で与えられる．また，n 頂点ラベル付き根付き木の個数は，根の取り方が頂点の個数分あることから n^{n-1} と導ける．しかし，ラベルが付いていない場合，根の有無にかかわらず木の個数を与える明示公式は得られていない．今回は，ある条件を満たす根付き木の個数を与える明示公式を Young tableau の数え上げを用いて求める．

1 定義

$G=(V,E)$ を根付き木とする. 頂点 $v\in V$ の**深さ**とは, 根から v へ至るまでに経由する辺の最小個数である. G における深さの最大値を h とおき, これを G の**高さ**と呼ぶ. 頂点 $v\in V$ に接続している辺の個数を v の**次数**といい, 次数が 1 の根以外の点を**葉**という. G の葉の集合を L_G で表す. $V_i=\{v\in V|v$ の深さは $i\}$, $E(i,i+1)=\{(v,w)\in E|v\in V_i, w\in V_{i+1}\}$ とおく. 根付き木の数え上げを行うにあたり, 根付き木の同型を定義する.

定義 1. $G=(V,E)$, $G'=(V',E')$ をそれぞれ R, R' を根とする根付き木とする. このとき, $\phi(R)=R'$ かつ $\{v,w\}\in E\Rightarrow\{\phi(v),\phi(w)\}\in E'$ を満たす全単射写像 $\phi:V\to V'$ が存在するとき, G, G' は**同型**であるという.

本稿で数え上げる対象は以下の根付き木である:

定義 2. 高さ h の根付き木 $G=(V,E)$ について $L_G=V_h$ であり, かつ, グラフ $(V_{h-1}\cup V_h, E(h,h-1))$ 内の任意の 2 つの連結成分は互いに非同型であるとき, G を **finely-bounded tree** という.

Young tableau を扱うため, 分割の定義を導入する [1].

定義 3. 正整数の非減少列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$ を**分割**といい, その総和が n となるとき, λ は n の分割といい, $\lambda\vdash n$ と書く. k を λ の長さという. また, $\lambda\vdash n$ は重複度 $m_i=\sharp\{j|\lambda_j=i\}$ を用いて, $(1^{m_1},2^{m_2},\cdots,n^{m_n})$ とも表す. 任意の因子の重複度が 0 または 1 のとき, その分割は **strict** であるという.

また, 分割の集合 $P_m(n), SP_m(n)$ を

$$P_m(n)=\{\lambda\vdash n|\lambda\text{の長さは}\, m\},\quad SP_m(n)=\{\lambda\in P_m(n)|\lambda:\mathrm{strict}\}$$

と定め, さらに $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)=(i^{m_i})_{i=1}^n\vdash n$ に対し,

$$\begin{aligned} m_\lambda! &= \prod_{i=1}^n m_i!,\\ \binom{n}{\lambda} &= \binom{n}{\lambda_1}\binom{n-\lambda_1}{\lambda_2}\binom{n-\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_3}\cdots. \end{aligned}$$

とおく.

2 finely-bounded tree と Young tableaux の対応

$G=(V,E)$ を根付き木とする. G の部分木 F_{h-i}, f_{h-i} を以下で定義する:

$$\begin{aligned} F_0 &:= (V_h, \phi), \\ F_{h-i} &:= (V_i \cup \cdots \cup V_h, E(i,i+1) \cup \cdots \cup E(h-1,h)) \quad (i=0,\cdots,h-1), \\ f_{h-i} &:= (V_i \cup V_{i+1}, E(i,i+1)) \quad (i=0,\cdots,h-1) \end{aligned}$$

以下, finely-bounded tree を Young tableaux に対応させて数え上げを行う. まず $(f_{h-i})_{i=0}^{h-1}$ を Young diagrams の列に対応させる. 各部分グラフ f_{h-i} において, V_i の点の次数を非増加に並べた数列を考える. これは $\#V_{i+1}$ の分割で, 特に $P_{\#V_i}(\#V_{i+1})$ の元になっている. ただし, finely-bounded の定義より, f_h に対応する分割は $SP_{\#V_{h-1}}(\#V_h)$ の元であることに注意されたい. その分割に対する Young diagram を $D^{(h-i)}$ と書く.

次に $(F_{h-i-1})_{i=0}^{h-1}$ から Young tableaux の列への対応を唯一つ定めるため, 次の定義を導入する.

定義 4. T を *Young tableau,* $T_{i,j}$ を T の i 行 j 列目の要素とする. 任意の i,j に対し $T_{i,j} < T_{i,j+1}$ が成り立ち, $i, i+1$ 行の長さが等しいとき $T_{i,1} < T_{i+1,1}$ を満たす T を **tree tableau** と呼ぶ.

f_{h-i}, F_{h-i-1} $(i=0,\cdots,h-1)$ 間の隣接関係を tree tableau で表す. すなわち, F_{h-i-1} の連結成分にラベルを付け, F_{h-i} 内 V_i の各頂点に隣接している連結成分のラベルをその頂点が対応する $D^{(h-i)}$ の列に書き込んで tree tableau $T^{(h-i)}$ を作る. ラベルは, 各 F_{h-i} において 2 つの連結成分が互いに同型ならば同じ数を, 非同型ならば異なる数をそれぞれ付加する. F_0 の連結成分は明らかに互いに同型であるから, $T^{(1)}$ の全ての要素は同じ数となる. F_1 の連結成分は finely-bounded tree の定義より全て非同型なので, F_{h-i} $(i=1,2,\cdots,h)$ の連結成分も全て非同型である. よって, 各 $T^{(h-i)}$ $(i=1,\cdots,h-1)$ における要素は全て異なる. ただし, tree tableau が表す隣接関係はただ一つに定まることに注意されたい. よって G と同様の $(\#V_i)_{i=0}^h$ を持つ finely-bounded tree の総数は tree tableau の列 $(T^{(h-i)})_{i=0}^{h-1}$ の総数と等しいことがわかる. したがって, 以下の定理が成り立つ:

定理 1. $(r_i)_{i=0}^h := (\#V_i)_{i=0}^h$ *が与えられた finely-bounded tree の個数は以下で表される:*

$$|SP_{r_{h-1}(r_h)}| \prod_{i=1}^{h-1} \sum_{\lambda \in P_{r_{i-1}}(r_i)} \frac{1}{m_{\lambda !}} \binom{r_i}{\lambda}.$$

参考文献

[1] W. Fulton. *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry*, volume 35. Cambridge University Press, 1997.