空間2次元放物型楕円型 Keller-Segel 方程式に対する初期値問題の解の有界性

永井　敏隆（広島大学名誉教授）

1　はじめに

未知関数 $u = u(t,x),\ \psi = \psi(t,x)\ (t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2)$ に関する次の初期値問題を考える：

$$
(\mathrm{CP})_\psi \quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla \psi), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta \psi = u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}
$$

ただし，ψ は対数ポテンシャル $N(x)$ と $u(t,x)$ との合成積で与えられる．

$$
\psi(t,x) := (N * u)(t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} N(x-y)\, u(t,y)\, dy, \quad N(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|. \tag{1}
$$

初期データは

$$
u_0(x) \geq 0\ (x \in \mathbb{R}^2), \quad u_0 \not\equiv 0, \quad u_0 \in L^1
$$

を満たすとし，$u \geq 0$ なる $(\mathrm{CP})_\psi$ の解 (u, ψ) を考える．以下，

$$
L^p = L^p(\mathbb{R}^2), \qquad \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p} \quad (1 \leq p \leq \infty)
$$

で表す．

初期値問題 $(\mathrm{CP})_\psi$ は， 細胞性粘菌の走化性による集合現象に関する数理モデルとして Keller, Segel [6] により提唱された放物型方程式系をより単純化したものである（Hillen, Painter [4] をも参照）．また，重力運動下における粒子群の運動を表すものでもある（Biler, Nadzieja [1],Wolansky [11]）．走化性モデルの場合 u は粘菌の密度で ψ は誘因化学物質の濃度を表し，粒子群運動の場合 u は粒子密度を ψ は重力ポテンシャルを表す．

ψ に関して，

$$
\psi(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2) \iff \int_{\mathbb{R}^2} u(t,x) \log(1 + |x|)\, dx < \infty \tag{2}
$$

---

e-mail: nagai@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
室蘭工業大学数理科学談話会　平成 29 年 8 月 30 日

が成立つ．解 u に減衰条件 (2) を課さないで考える場合，$(\mathrm{CP})_\psi$ の代わりに次の初期値問題

$$(\mathrm{CP})\ \begin{cases}\partial_t u = \Delta u - \nabla\cdot(u(\nabla N * u)), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^2,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

を考える．ただし，

$$(\nabla N * u)(t,x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{x-y}{|x-y|^2}u(t,y)\,dy.$$

なお，初期値問題 (CP) の非負解 u が減衰条件 (2) を満たせば，ψ を式 (1) で定めれば (u,ψ) は初期値問題 $(\mathrm{CP})_\psi$ の解となる．

初期値問題 (CP) ($(\mathrm{CP})_\psi$) の非負解に対して，次が成立つ．

(i) (質量保存) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = m,\ t>0.$

(ii) (重心保存) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} xu(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} xu_0(x)\,dx,\ t>0.$

(iii) (2 次モーメント等式) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2u_0(x)\,dx + 4m\Big(1-\frac{m}{8\pi}\Big)t,\ t>0.$

非負初期データ u_0 に対する総質量 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx$ の値が 8π を境として，非負解 u の性質が大きく変わることが知られている：

- 劣臨界 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx < 8\pi$ の場合，非負解 u は時間大域的に存在し，$t\to\infty$ のとき $\|u(t)\|_\infty \to 0$ で自己相似解に漸近する．

- 優臨界 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx > 8\pi$ の場合，非負解 u は有限時間で爆発する可能性がある．すなわち，u の最大存在時間 T_m が有限で，

$$\limsup_{t\to T_m}\|u(t)\|_\infty = +\infty.$$

  実際，$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2u_0(x)\,dx<\infty$ ならば，2 次モーメント等式より $T_m<\infty$ となる．

この講演で，臨界 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$ の場合に，まず非有界な非負時間大域解に関する既存の結果を紹介し，その後非負解の有界性に関する結果について解説する．なお，臨界の場合，非負初期データ $u_0\in L^1$ に対する条件 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\log(1+|x|)\,dx<\infty$ の下で，初期値問題 (CP) ($(\mathrm{CP})_\psi$) の非負解の時間大域的存在が Nagai, Ogawa [8] により得られている．

2 臨界質量を持つ非有界な非負時間大域解

まず，Blanchet, Carrillo, Masmoudi [3] による次の結果を紹介する：

- (Blanchet, Carrillo, Masmoudi) 次の仮定

$$u_0\ge 0,\quad u_0\log u_0,\ u_0|x|^2\in L^1,\quad \int_{\mathbb{R}^2} u_0\,dx = 8\pi$$

  の下で，

(i) 初期値問題 (CP) ($(\mathrm{CP})_\psi$) の非負解 u は時間大域的に存在し，

(ii) $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 8\pi\delta_{x_0}(x)$ in the sense of measures.

ただし，$\delta_{x_0}(x)$ は点 x_0 での Dirac のデルタ関数，x_0 は u_0 の重心，すなわち，

$$x_0 = \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^2} x u_0(x)\,dx.$$

臨界 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$ の場合，2 次モーメント等式より 2 次モーメント保存

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u_0(x)\,dx, \quad t>0$$

が成り立ち，Blanchet, Carrillo, Masmoudi の結果の証明で 2 次モーメント保存は本質的役割を果たしている．なお，仮定の中の $u_0\log u_0 \in L^1$ は取り除くことができる．

Blanchet, Carrillo, Masmoudi の結果は，初期データ u_0 の空間遠方での減衰がかなり速ければ，$\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_\infty = \infty$ となることを示している．一方，$\int_{\mathbb{R}^2}|x|^2 u_0(x)\,dx = \infty$ の場合でも非負解は非有界になりえることを Naito, Senba [10] は示した．

- (Naito, Senba) 次の条件

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_0\,dx = 8\pi, \quad \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u_0(x)\,dx = \infty$$

を満たす球対称な非負初期データ u_0 で

$$\limsup_{t\to\infty}\|u(t)\|_{L^\infty} = \infty, \quad 0 < \liminf_{t\to\infty}\|u(t)\|_{L^\infty} < \infty$$

と成るものが存在する．なお，$u(t,x)$ は x に関して球対称である．

3 非負解の有界性に関する既存結果：臨界質量の場合

臨界質量の場合，初期値問題 (CP) は次の定常解を持つ：$b>0, x_0\in\mathbb{R}^2$ に対し，

$$\theta_{b,x_0}(x) = \frac{8b}{(|x-x_0|^2+b)^2} \quad (x\in\mathbb{R}^2).$$

定常解 θ_{b,x_0} は次を満たす：

(i) $\theta_{b,x_0} \in L^1\cap L^\infty$, $\int_{\mathbb{R}^2}\theta_{b,x_0}\,dx = 8\pi$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}^2}|x|^p\theta_{b,x_0}(x)\,dx < \infty\ (0<\forall p<2)$, $\int_{\mathbb{R}^2}|x|^2\theta_{b,x_0}(x)\,dx = \infty$.

以下，x_0 が原点のとき $\theta_{b,0}$ を θ_b で表す．すなわち，

$$\theta_b(x) = \frac{8b}{(|x|^2+b)^2}.$$

Blanchet, Carlen, Carrillo [2] による次の結果を述べる．

- (Blanchet, Carlen, Carrillo) 次の条件

  (i) $u_0 \geq 0,\quad u_0 \in L^1,\quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} u_0\, dx = 8\pi,$

  (ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} u_0 \log u_0\, dx + \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} u_0(x)u_0(y) \log|x-y|\, dxdy < \infty,$

  (iii) $\exists\, b > 0,\quad \mathcal{H}_b[u_0] := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} (\sqrt{u_0} - \sqrt{\theta_b})^2 \frac{1}{\sqrt{\theta_b}}\, dx < \infty$

  の下で，任意の $\tau > 0$ に対し，

  $$\sup_{t\geq\tau} \|u(t)\|_p < \infty \quad (1 \leq \forall\, p < \infty)$$

  が成り立ち，さらに

  $$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - \theta_{b,x_0}\|_p = 0 \quad (1 \leq \forall\, p < \infty).$$

  ただし，x_0 は u_0 の重心.

上の条件 (ii) の積分は u_0 の自由エネルギーで，条件 (iii) の汎関数 $\mathcal{H}_b$ は Blanchet, Carlen, Carrillo [2] で導入されたもので

$$\mathcal{H}_b[u(t)] \leq \mathcal{H}_b[u_0]\ (t > 0), \quad \mathcal{H}_a[u_0] = \infty\ (\forall\, a \neq b)$$

を満たす．非負解の有界性を得るのに，Wasserstein 空間でのエントロピーの勾配流は熱流であることを示した Jordan, Kinderlehrer, Otto [5] による スキームを用いている．

次に，López-Gómez, Nagai, Yamada [7] による結果を述べる．

定理 1. $u_0 \in L^1 \cap L^\infty,\ \int_{\mathbb{R}^2} u_0\, dx = 8\pi$ を満たす非負初期データ u_0 が

$$\liminf_{R\to\infty} \left(R^2 \int_{|x|\geq R} u_0^\sharp\, dx \right) > 0 \tag{A1}$$

を満たすならば，ある $b > 0$ が存在して

$$\|u(t)\|_p \leq \|\theta_b\|_p \quad (\forall\, t \geq 0,\ 1 \leq \forall\, p \leq \infty)$$

が成り立つ．ただし，$u_0^\sharp$ は u_0 の symmetric rearrangement (Schwarz symmetrization).

この定理を証明するのに，rearrangement に関する技法と比較原理を用いている．

条件 (A1) に関して，定常解 θ_{b,x_0} について $\theta_{b,x_0}^\sharp = \theta_b$ なので，

$$\lim_{R\to\infty} \left(R^2 \int_{|x|\geq R} \theta_{b,x_0}^\sharp\, dx \right) = 8b\pi$$

である．2 次モーメントについては，

$$\text{条件 (A1)} \implies \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u_0(x)\, dx = \infty$$

が成り立つ．また，Blanchet, Carlen, Carrillo の条件 (iii) との関係は

$$\mathcal{H}_b[u_0] < \infty \implies \text{条件 (A1)}.$$

4　主結果

この節で，Nagai, Yamada [9] で得られた結果について述べる．まず，定理 1 での条件 (A1) をより使いやすくした比較判定法について述べる．

定理 2 (比較判定法). 非負初期データ $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$ に対し，ある非負関数 $f \in L^1$ が存在して

$$u_0(x) \geq f(x)\ (|x| \gg 1), \quad \liminf_{R\to\infty} \left(R^2 \int_{|x|\geq R} f^\sharp \, dx \right) > 0$$

ならば，u_0 は条件 (A1) を満たす．したがって，さらに $\int_{\mathbb{R}^2} u_0 \, dx = 8\pi$ を満たすならば，$\sup_{t>0} \|u(t)\|_\infty < \infty$ が成り立つ．

この定理より次の系が得られる．

系 3. $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0 \, dx = 8\pi$ を満たす非負初期データ u_0 に対し，ある正定数 C が存在して

$$u_0(x) \geq C|x|^{-4} \quad (|x| \gg 1) \tag{3}$$

ならば，$\sup_{t>0} \|u(t)\|_\infty < \infty$ が成り立つ．

系 3 の条件 (3) は，空間遠方で u_0 はある定常解より上にあることを意味する．実際，条件 (3) より $b > 0$ を $C = 8b$ と定めれば，

$$u_0(x) \geq \frac{8b}{(|x|^2 + b)^2} = \theta_b(x) \quad (|x| \gg 1)$$

である．したがって，比較判定法（定理 2）より u_0 は条件 (A1) を満たす．

注 1. 系 3 の条件 (3) を，ある $4 < p < \infty$ に対し

$$u_0(x) \leq C|x|^{-p} \quad (|x| \gg 1)$$

に置き換えると，$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u_0(x) \, dx < \infty$ なので，2 節で述べた Blanchet, Carrillo, Masmoudi [3] の結果より，$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_\infty = \infty$ となる．

次に，条件 (A1) を条件 (A2)

$$\liminf_{R\to\infty} \left(R^2 \int_{|x|\geq R} u_0 \, dx \right) > 0 \tag{A2}$$

に置き換えて非負解の有界性が得られないかを調べる．条件 (A1) ならば条件 (A2) が成り立つが，一般に逆は成り立たない．しかしながら，初期値 u_0 が球対称ならば，条件 (A2) の下で非負な球対称解の有界性が得られる．

定理 4. $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0 \, dx = 8\pi$ を満たす球対称な非負初期データ u_0 が条件 (A2) を満たすならば，$\sup_{t>0} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty$ が成り立つ．

例 1. $\mathbb{R}^2$ 上の非負関数 f を

$$f(x) = \chi_A(x)|x|^{-4}, \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^2;\ 2k-1 \le |x| \le 2k\}$$

で定める．ただし，χ_A は A の特性関数．このとき，

$$\liminf_{R\to\infty} \Big(R^2 \int_{|x|\ge R} f\,dx \Big) \ge \frac{1}{3} \lim_{R\to\infty} \Big(R^2 \int_{|x|\ge R} |x|^{-4}\,dx \Big) > 0.$$

球対称な非負初期データ u_0 を

$$u_0(x) = \frac{8\pi}{\|f\|_1} f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

で定めると，$\int_{\mathbb{R}^2} u_0\,dx = 8\pi$ である．u_0 は系 3 の条件 (3) を満たさないが条件 (A2) を満たす．したがって，$\sup_{t>0} \|u(t)\|_\infty < \infty$ となる．

また，u_0 は 3 節の Blanchet, Carlen, Carrillo の条件 (iii) を満たさない：

$$\mathcal{H}_b[u_0] = \int_{\mathbb{R}^2} (\sqrt{u_0} - \sqrt{\theta_b})^2 \theta_b^{-1/2}\,dx = \infty,\ \forall\, b > 0.$$

最後に，条件 (A1) と (A2) に関連することとして，次の命題

- $\mathbb{R}^2$ 上の非負関数 $f \in L^1$ に対し，

$$\liminf_{R\to\infty} \Big(R^2 \int_{|x|\ge R} f\,dx \Big) > 0 \implies \liminf_{R\to\infty} \Big(R^2 \int_{|x|\ge R} f^\sharp\,dx \Big) > 0 \tag{4}$$

を考える．上の命題は一般に成り立たない ([9, Example 5.2])．逆が成り立つことは，次の不等式

$$\int_{|x|\ge R} f^\sharp\,dx \le \int_{|x|\ge R} f\,dx$$

より明らかである．上の (4) が成り立つための f に対する条件を次の定理で述べる．以下，可測集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ のルベーグ測度を $|A|$ で表す．

定理 5. $\mathbb{R}^2$ 上の非負関数 $f \in L^1$ は

(i) $f(x) \to 0$ ($|x| \to \infty$),

(ii) $\mu(t) := |\{x;\ f(x) > t\}| \to \infty$ ($t \to +0$),

(iii) $r(t) := \sup\{|x|;\ f(x) \ge t\}$ ($t > 0$) に対し，$\displaystyle\liminf_{t\to+0} \frac{\mu(t)}{r(t)^2} > 0$

を満たすとする．このとき，

$$\liminf_{R\to\infty} \Big(R^2 \int_{|x|\ge R} f\,dx \Big) > 0 \implies \liminf_{R\to\infty} \Big(R^2 \int_{|x|\ge R} f^\sharp\,dx \Big) > 0.$$

参考文献

[1] P. Biler and T. Nadzieja, Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles, I, Colloq. Math. **66** (1994), 319–334.

[2] A. Blanchet, E. Carlen and J. A. Carrillo, Functional inequalities, thick tails and asymptotics for the critical mass Patlak-Keller-Segel model, J. Funct. Anal. **262** (2012), 2142–2230.

[3] A. Blanchet, J. A. Carrillo and N. Masmoudi, Infinite time aggregation for the critical Patlak-Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$, Comm. Pure Appl. Math. **61** (2008), 1449–1481.

[4] T. Hillen and K. J. Painter, A user's guide to PDE models for chemotaxis, J. Math. Biol. **58** (2008), 183–217.

[5] R. Jordan, D. Kinderlrhrer and F. Otto, The variational formulation of the Fokker-Planck equation, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), 399–415.

[6] E. F. Keller and L. A. Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, J. Theor. Biol. **26** (1970), 399–415.

[7] J. López-Gómez, T. Nagai and T. Yamada, The basin of attraction of the steady-states for a chemotaxis model in $\mathbb{R}^2$ with critical mass, Arch. Ration. Mech. Anal. **207** (2013), 159–184.

[8] T. Nagai and T. Ogawa, Global existence of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in $\mathbb{R}^2$, Funkcial. Ekvac. **59** (2016), 67–112.

[9] T. Nagai and T. Yamada, Boundedness of solutions to a parabolic-elliptic Keller-Segel equation in $\mathbb{R}^2$ with critical mass, to appear in Adv. Nonlinear Stud. Published online 06/21/2017.

[10] T. Senba, Bounded and unbounded oscillating solutions to a parabolic-elliptic system in two dimensional space, Commun. Pure Appl. Anal. **12** (2013), 1861–1880.

[11] G. Wolansky, On steady distributions of self-attracting clusters under friction and fluctuations, Arch. Rational Mech. Anal. **119** (1992), 355–391.