空間一次元圧縮性気体の自由境界問題

岡田真理

山口大学

1　序文

次のオイラー座標で記述された等エントロピー気体の方程式を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} = 0, \qquad t > 0,\ 0 < \xi < y(t), \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \dfrac{\partial}{\partial \xi}(\rho u^2 + p) = \dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\mu \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \rho g. \end{cases}$$

　ここで，質量密度 ρ と 速度 u は未知関数で，圧力 $P = a\rho^\gamma$ ，粘性係数 $\mu = b\rho^\beta$ であり，a, b は正定数，$1 < \gamma \leq 2,\ 0 < \beta \leq (\gamma - 1)/2$ とする．物理学では,「気体の粘性は温度の平方根に比例する」となっている．気体が理想気体である，即ち圧力が質量密度と温度の積に比例するならば，この問題の場合，温度に相当するのは $\rho^{\gamma-1}$ であり，$\beta = (\gamma - 1)/2$ となる．我々が最終的に求めたい結果はこの関係式が成り立つ場合の結果である。非負値である g は重力定数で，$\xi = 0$ は固定境界：

$$u(t, 0) = 0,$$

であり，$\xi = y(t)$ は自由境界，即ち，気体と真空の境界：

$$\frac{dy}{dt} = u(t, y(t)) \quad , \qquad \rho(t, y(t)) = 0,$$

である．この論文では，以上の自由境界問題の定常解を含む弱解の時間大域的存在を示すのが目的である．そこで，次のラクランジュ質量座標：

$$x = \int_0^\xi \rho(t, \zeta) d\zeta,$$

を用いて，方程式を書き換える．ここで，総質量を 1：

$$\int_0^{y(t)} \rho(t, \xi) d\xi = 1,$$

に固定すると，上記の自由境界問題は次の固定境界問題になる．

(1.1) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

(1.2) $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right) - g.$$

ここで， $p = a\rho^\gamma, \mu = b\rho^\beta$ ，また境界条件は

(1.3) $$u(t,0) = 0, \quad \rho(t,1) = 0,$$

であり，初期条件は

(1.4) $$(\rho, u)(0,x) = (\rho_0, u_0)(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

と置く．境界条件 (1.3) を満たす，方程式 (1.1), (1.2) の定常解は

(1.5) $$\rho = \left[\frac{g}{a}(1-x)\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad u = 0,$$

である．この論文では，定常解 (1.5) を含む初期値のクラスに対する初期値境界値問題の解の存在を示す．更に，初期値と β に対して次の仮定を置く．

(A.1) $0 < \rho_0(x) \le C(1-x)^\alpha, \quad 0 < \alpha \le \frac{1}{\gamma}, \quad (\ 0 \le x < 1), \qquad \rho_0(1) = 0,$
$\rho_0(x) \in Lip([0,1]), \qquad \rho_0(x)^{-1} \in L^1([0,1]), \qquad (1-x)(\rho_0^\beta(x))_x{}^2 \in L^1([0,1])$,
$(1-x)^{k_1}\rho_0^{-\frac{3}{2}(1-\beta)} \in L^1([0,1]), \qquad 1 < k_1 < \frac{13-29\beta}{8(1+\beta)}$;

(A.2) $u_0(x) \in C^1([0,1]), \qquad \dfrac{du_0}{dx} \in Lip([0,1])$;

(A.3) $0 < \beta < \frac{5}{37}.$

注意１．

ソボレフの不等式より，正定数 k_2 と ν に対して，以下の不等式

$$(1-x)^{k_2}\rho_0^{-\nu} \le \int_0^1 \left[(1-x)^{k_2}\rho_0^{-\nu} + |\left((1-x)^{k_2}\rho_0^{-\nu}\right)_x|\right] dx,$$

が成り立つ．ここで，$k_2 = \frac{k_1+1}{2} > 1$, $\nu = \frac{3-7\beta}{4} > 0$ と置いた．更に，シュワルツの不等式により次の不等式を得る．

$$\begin{aligned}(1-x)^{k_2}\rho_0^{-\nu} \ &\le\ C\int_0^1 \left[(1-x)^{k_1}\rho_0^{-\frac{3}{2}(1-\beta)} + (1-x)(\rho_0^\beta)_x{}^2\right] dx \\ &\quad + C\int_0^1 \left[(1-x)\rho_0^{2\beta} + (1-x)^{-1}\rho_0^{2\beta}\right] dx.\end{aligned}$$

従って，仮定 (A.1) より初期値 ρ_0 の下から評価

$$\rho_0(x) \geq C'(1-x)^{\frac{k_2}{\nu}},$$

が得られ，(A.3) を仮定すると $\frac{k_2}{\nu} = \frac{2(k_1+1)}{3-7\beta} > \frac{4}{3}$ となる．つまり，仮定 (A.1) は ρ_0 の下からの評価を仮定していることになる．我々は，$\rho(t,\cdot)$ も同じ下からの評価を持つことを示すことになるが，それが困難な点である．

注意２．
$\beta = \frac{\gamma-1}{2}$ とすると, $\gamma = \frac{5}{3}$ のとき，$\beta = \frac{1}{3}$ である．従って，私達の結果は $\beta = \frac{1}{3}$　$\gamma = \frac{5}{3}$ の場合を含んでいない．仮定 (A.3) は証明上の技術的な制約であって，もっと良い評価の方法を見つければ，はずすことができる仮定である．

ここで，弱解の定義をしておく．

定義（弱解）:
以下の 4 条件を満たす (ρ, u) を初期値境界値問題 (1.1)-(1.4) の弱解という．
任意の正定数 T に対して，

$$\rho, u \in L^\infty([0,T]\times[0,1]) \cap C^1([0,T]; L^2([0,1])), \tag{1.6}$$

$$\rho^{1+\beta} u_x \in L^\infty([0,T]\times[0,1]) \cap C^{\frac{1}{2}}([0,T]; L^2([0,1])), \tag{1.7}$$

であり，方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.8}$$

を $a.e.\ x \in (0,1)$ と，任意の $t \geq 0$ に対して満たし，

$$\int_0^1 [\ \phi u_t - \phi_x(p - \mu\rho u_x) + \phi g\ ]\ dx = 0, \tag{1.9}$$

が，任意の関数 $\phi \in C_0^\infty((0,1])$ と $a.e.\ t \in [0,T]$ に対して成り立っていること．

以上の仮定の下，この論文で示したい定理を述べる．

定理．仮定 (A.1), (A.2), (A.3) が成り立っているとする．このとき，初期値境界値問題 (1.1)-(1.4) の解が (1.6)-(1.9) の意味で時間大域的に存在する．

2　差分式と評価式

定理の証明は，初期値境界値問題 (1.1)-(1.4) に対する近似解のアプリオリ評価とその極限操作によって構成される．従って，問題 (1.1)-(1.4) に対する弱解の存在は，線の方法を用いて証明される．まず，次の N 組の常微分方程式系：

$$\frac{d}{dt}\rho_{n-1} + {\rho_{n-1}}^2 \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, N, \quad \Delta = \frac{1}{N}, \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}u_n + a\frac{\rho_n^\gamma - \rho_{n-1}^\gamma}{\Delta} = \frac{b}{\Delta}\left[\rho_n^{1+\beta}\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta} - \rho_{n-1}^{1+\beta}\frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta}\right] - g, \tag{2.2}$$

と，境界条件：

$$u_0(t) = 0 \quad \text{and} \quad \rho_N(t) = 0, \tag{2.3}$$

更に，次の仮定：

$$\left(\rho_N^{1+\beta}\frac{u_{N+1}-u_N}{\Delta}\right)(t) = 0, \tag{2.4}$$

を置き，また，初期条件を

$$\rho_{n-1}(0) = \rho_0((n-1)\Delta) > 0, \quad u_n(0) = u_0(n\Delta), \quad n = 1, 2, ..., N, \tag{2.5}$$

としたものを考える．$\gamma > 1$ ならば，固定した N に対して方程式系 (2.1)，(2.2) は，リプシッツ条件を満たすので，この問題に対する局所解 $(\rho_{n-1}(t), u_n(t))$，$n = 1, 2, ..., N$ の存在は保証される．また，考える領域内での質量密度の正値性:

$$\rho_{n-1}(t) > 0, \quad n = 1, 2, ..., N,$$

も成り立つ．従って，時間大域解の存在を示すためには，N に依存しない評価式を得なければならない．アプリオリ評価導くために困難な点は，ρ の上からと下からの評価である．特に，下からの評価（補題）は，煩雑ないくつかの段階を踏まなければ得られない．これは，質量密度 ρ と粘性係数 μ が自由境界 $x = 1$ 上で零になっていることに起因する困難な点である．しかし，この上下の評価式を出してしまえば、あとは通常の方法で評価式を求めればよい．この章では，$(\rho_{n-1}(t), u_n(t))$ から構成される近似解の部分列が収束することを示す．そのために必要な $(\rho_{n-1}(t), u_n(t))$ に対する N に依存しない評価式を求める．部分列の収束が示せれば，その極限関数 $(\rho(t,x), u(t,x))$ が (1.1)-(1.4) の弱解であることを示すことができる．

最初に，(2.1)-(2.5) の解が刻み幅 Δ によらないアプリオリ評価式を満たすことを示す．

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta}{\rho_{k-1}(t)}, \tag{2.6}$$

と置くと，次の評価式が成り立つ．

命題１． 時刻 t と刻み幅 Δ に依存しない定数 C が存在して，つぎの不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2}{u_n}^2 + \frac{a}{\gamma-1}{\rho_{n-1}}^{\gamma-1} + gy_n\right)(t)\Delta + b\int_0^t \sum_{n=1}^{N}\left[\rho_{n-1}^{1+\beta}\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta}\right)^2\right](\tau)\Delta d\tau \\ = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2}{u_n}^2 + \frac{a}{\gamma-1}{\rho_{n-1}}^{\gamma-1} + gy_n\right)(0)\Delta \ \leq \ C.\end{aligned} \tag{2.7}$$

更に，ρ_{n-1} の上からの評価式を得る．

命題２．(A.1)-(A.3) を仮定すると，

$$\rho_{n-1} \leq C(T)[1-(n-1)\Delta]^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha \leq \frac{1}{\gamma}, \tag{2.8}$$

を得る．

また，次の ρ_{n-1} の下からの評価がなりたつと仮定する．

補題． $k_1 > 1$, $k_2 = \frac{k_1+1}{2} > 1$, $\nu = \frac{3-7\beta}{4} > 0$ 対して，次の ρ_{n-1} の下からの評価式：

$$\rho_{n-1}(t) \ \geq \ C(T)[1-(n-1)\Delta]^{\frac{k_2}{\nu}}, \qquad \frac{k_2}{\nu} > \frac{4}{3}, \tag{2.9}$$

が得られる．

以上の命題２と補題より密度関数に対する評価式：

$$C_1(T)[1-(n-1)\Delta]^{\frac{k_2}{\nu}} \leq \rho_{n-1}(t) \leq C_2(T)[1-(n-1)\Delta]^{\alpha}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

を得る．ここで，$0 < \alpha \leq \frac{1}{\gamma} < 1 < \frac{k_2}{\nu}$ であることから，定常解 $\rho(x) = \left[\frac{g}{a}(1-x)\right]^{\frac{1}{\gamma}}$ も同様の評価を持つ．次に，$\rho_{n-1}^{1+\beta}\frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta}$ の一様有界性を示す．

命題３．仮定 (A.1)-(A.3) の下，

$$\left|\left(\rho_{n-1}^{1+\beta}\frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta}\right)(t)\right| \leq C(T), \tag{2.10}$$

が成り立つ．

また，u_n の一様有界性と，有界変動性が示せる．

命題４．仮定 (A.1)-(A.3) の下，

$$\sum_{n=1}^{N} |u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq C(T), \tag{2.11}$$

$$|u_n(t)| \leq C(T), \tag{2.12}$$

が成り立つ．

密度関数の上下の評価式より，ρ_{n-1} の有界変動性を得る．

命題５．(A.1)-(A.3) を仮定する．

$$\sum_{n=1}^{N} |\rho_n(t) - \rho_{n-1}(t)| \leq C(T), \tag{2.13}$$

が得られる.

更に，$\rho_{n-1}^{1+\beta}\frac{u_n-u_{n-1}}{\Delta}$ の有界変動性が得られる.

命題 6. (A.1)-(A.3) を仮定する.

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\rho_n^{1+\beta}\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta}(t)-\rho_{n-1}^{1+\beta}\frac{u_n-u_{n-1}}{\Delta}(t)\right|\leq C(T), \tag{2.14}$$

を得る.

最後に，解の L^2 連続性を示す.

命題 7. (A.1)-(A.3) を仮定する.

$$\sum_{n=1}^{N}|\rho_{n-1}(t)-\rho_{n-1}(s)|^2\Delta\leq C(T)|t-s|^2, \tag{2.15}$$

$$\sum_{n=1}^{N}|u_n(t)-u_n(s)|^2\Delta\leq C(T)|t-s|^2, \tag{2.16}$$

$$\sum_{n=1}^{N}|\rho_{n-1}^{1+\beta}\frac{u_n-u_{n-1}}{\Delta}(t)-\rho_{n-1}^{1+\beta}\frac{u_n-u_{n-1}}{\Delta}(s)|^2\Delta\leq C(T)|t-s|, \tag{2.17}$$

が成り立つ.

3 補題の証明

以下の４つの命題を示すことにより、補題を証明することができる.

命題 8.

$$\sum_{n=1}^{N}[1-(n-1)\Delta]\left(\frac{\rho_n^{\beta}-\rho_{n-1}^{\beta}}{\Delta}\right)^2(t)\Delta\leq C(T). \tag{3.1}$$

命題 9.

$$\sum_{n=1}^{N}[1-(n-1)\Delta]^{k_1}\rho_{n-1}^{-\delta}(t)\Delta\leq C(T),\qquad k_1>1,\ \delta=\frac{1-\beta}{2}>0. \tag{3.2}$$

命題１０.

$$\sum_{n=1}^{N}[1-(n-1)\Delta]^{k_1}\left(\rho_{n-1}^{-\delta}u_n^2\right)(t)\Delta + 2b\int_0^t\sum_{n=1}^{N}[1-(n-1)\Delta]^{k_1}\rho_{n-1}^{1+\beta-\delta}\left(\frac{u_n-u_{n-1}}{\Delta}\right)^2\Delta d\tau \le C(T), \qquad k_1>1,\ \delta=\tfrac{1-\beta}{2}>0,\ 1+\beta-\delta=\tfrac{1}{2}(1+3\beta). \tag{3.3}$$

命題１１.

$$\sum_{n=1}^{N}[1-(n-1)\Delta]^{k_1}\rho_{n-1}^{-\kappa}\Delta \le C(T), \qquad k_1>1, \quad \kappa=\frac{3}{2}(1-\beta)>0. \tag{3.4}$$

References

[1] R. Balin, From microphysics to macrophysics, Texts and monographs in physics, Springer, (1982).

[2] M. Okada, Free boundary value problems for the equation of one-dimensionasl motion of viscous gas, Japan J. Indust. Appl. Math., 6(1989), 161-177.

[3] T. Yang and C.J. Zhu, Compressible Navier-Stokes equations with degenerate viscosity coefficient and vacuum, Commun. Math. Phys.,230(2002), 329-363.

[4] M. Okada, Š. M.-Nečasová and T. Makino, Free boundary problem for the equation of one-dimensional motion of compressible gas with density-dependent viscosity, Annali dell'Universita di Ferrara, Sez. 7 -Sc. Mat., 48(2002), 1-20.