Lorentz-Minkowski 空間の (空間的) 極大超曲面論

藤森 祥一 *

2018 年 1 月 26 日

目次

1 Lorentz-Minkowski **空間** 3

2 **空間的 (超) 曲面論の復習** 10

3 **超曲面の体積 (曲面の面積) の第 1 変分** 15

4 **空間的超曲面の体積 (曲面の面積) の第 2 変分** 21

5 **グラフ超曲面, 極大超曲面の方程式** 29

6 Bernstein **問題** 33

7 **等温座標系** 37

8 **極大曲面の例** 39

8.1 回転面 40

8.2 線織面 48

8.3 移動曲面 56

9 **空間的共形はめ込み** 57

10 Ricci **型定理** 59

11 Gauss **写像** 61

12 **表現公式** 67

* 岡山大学大学院自然科学研究科 (理学部数学科), `fujimori@math.okayama-u.ac.jp`

13 Weierstrass **型表現公式** 70

14 **随伴極大曲面, 共役極大曲面** 73

A **補遺** 75

A.1 調和関数 75

A.2 行列値関数 75

A.3 線形微分方程式系の解の存在と一意性 76

A.4 微分形式と Stokes の定理 76

A.5 $\mathrm{PSU}(1,1)$ と $\mathrm{SO}^+(2,1)$ との同型対応 79

序

この講義ノートは, Lorentz-Minkowski 空間の (空間的) 極大超曲面について解説したものである. 第 1 節では Lorentz-Minkowski 空間の性質について, 第 2 節では空間的超曲面の局所理論についてそれぞれ復習し, 第 3 節, 第 4 節で空間的超曲面の体積 (曲面の面積) の第 1, 第 2 変分を計算し, 平均曲率が消えている超曲面は境界を固定する変分に関して体積が極大であることを示す. 第 5 節ではグラフ超曲面が極大超曲面であるときに満たす偏微分方程式を求める. 第 6 節では $\mathbb{R}^n$ 全体で定義されたグラフ極大超曲面は超平面に限るという Berstein 型の定理を, $n=2$ の場合に限り証明する. 第 7 節からは 3 次元 Lorentz-Minkowski 空間 $\mathbb{L}^3$ の極大曲面に話を限定する. まず第 7 節では極大曲面は実解析的であることを示し, さらに極大曲面の各点のまわに等温座標系が存在することを示す. 第 8 節では回転面, 線織面, 移動曲面の分類を与える. 第 9 節では空間的共形はめ込みの一般論を与える. 第 10 節では与えられた 2 次元 Riemann 多様体が $\mathbb{L}^3$ の空間的極大はめ込みとして与えられるための必要十分条件 (所謂 Ricci 型の定理) を与える. 第 11 節では空間的共形はめ込みの Gauss 写像を立体射影と合成して複素数値関数とみなし, これが正則写像または反正則写像であるための必要十分条件を求める. 第 12 節では Gauss 写像と高さ微分による空間的共形はめ込みの表現公式 (所謂剱持型表現公式) を与え, 第 13 節で特に空間的極大はめ込みの表現公式を与える. また, 第 8 節で与えた例の Weierstrass data も与える. 第 12 節では 2 つの曲面が合同であるために Weierstrass data が満たす必要十分条件も与える. 第 14 節では随伴極大曲面と共役極大曲面の定義を与え, 等長的な 2 つの極大曲面は互いに他の随伴曲面であるという所謂 Schwarz 型の定理を証明する.

この講義ノートは 2017 年 1 月に室蘭工業大学で行われた第 5 回室蘭連続講演会, 2017 年 4 月に福岡大学理学部行われた集中講義, および 2017 年度前期の岡山大学大学院自然科学研究科での講義ノートに加筆修正したものである. 講演および集中講義の機会を作って下った高橋雅朋先生と成慶明先生, および講義ノートについて有益なご助言を下さった三石史人先生と藤木淳先生に深く感謝の意を表したい.

記号

- 本講義ノートでは, 特に断らない限り関数, 写像などはすべて C^∞ 級とする.
- 不定値計量 $\langle\ ,\ \rangle = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2 - (dx^{n+1})^2$ を持つ $(n+1)$ 次元 Lorentz-Minkowski 空間を $\mathbb{L}^{n+1}$ で表す.
- 第 2 節から第 6 節では n 次元多様体 M から $\mathbb{L}^{n+1}$ への空間的はめ込みを扱う. M の局所座標系は主に ${}^t(u^1, \ldots, u^n)$ で表し, $\mathbb{L}^{n+1}$ の直交座標系は ${}^t(x^1, \ldots, x^{n+1})$ で表す. また, 添字の動く範囲は
$$1 \le i, j, k, \ldots \le n, \qquad 1 \le \alpha, \beta, \gamma, \ldots \le n+1,$$
と約束とし, Einstein の規約に従って和の記号を省略する.
- 1 変数の関数や写像などの導関数は f', φ'' などのようにプライムを付けて表す.
- n 変数の関数や写像などの偏導関数は
$$f_i := \frac{\partial f}{\partial u^i}, \qquad \nu_{ij} := \frac{\partial^2 \nu}{\partial u^j \partial u^i}$$
等のように右下に微分する変数の番号を添えて表す. ただし, n^2 個の関数 g_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ の第 k 成分による偏微分は
$$g_{ij,k} := \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$
のように表す. $g_{ij,k}$ は通常の微分商であって共変微分商ではないことに注意.
- 虚数単位は bold 斜体の $\boldsymbol{i}$ を用いる. $\boldsymbol{i} := \sqrt{-1}$. Bold でない斜体の i は添字に用いる.
- 第 7 節以降は 2 次元多様体 (または Riemann 面) M から $\mathbb{L}^3$ への空間的はめ込みを扱う. M の局所座標系は主に ${}^t(x, y)$ (M を Riemann 面と見なしたときは $z = x + \boldsymbol{i}y$) で表し, $\mathbb{L}^3$ の直交座標系は ${}^t(x_1, x_2, x_3)$ で表す. また, 偏導関数は
$$f_x := \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \nu_{z\bar{z}} := \frac{\partial^2 \nu}{\partial \bar{z} \partial z}$$
等のように右下に微分する変数を添えて表す.

1 Lorentz-Minkowski 空間

本節では Lorentz-Minkowski 空間の基本的性質について簡単に復習する. 詳細は, 例えば [ON] や [Nom, 第 5 章] などを参照のこと.

n を自然数とする. $(n+1)$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の対称双線形関数 $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を
$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x^i y^i - x^{n+1} y^{n+1}$$

で定める．ただし $x = {}^t(x^1, \dots, x^{n+1})$, $y = {}^t(y^1, \dots, y^{n+1})$ である．

$$\mathrm{id}_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\langle x, y \rangle = {}^t x \, \mathrm{id}_{n,1} \, y$$

と書くこともできる．$\langle \ , \ \rangle$ は非退化，すなわち任意の $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して $\langle x, y \rangle = 0$ ならば $x = 0$ である．$\langle \ , \ \rangle$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の (符号数 $(n, 1)$ の) **Lorentz 計量**または **Lorentz 内積**という．Lorentz 計量が与えられた $\mathbb{R}^{n+1}$ を $(n+1)$ 次元 **Lorentz-Minkowski 空間**といい，$\mathbb{L}^{n+1}$ で表す．

補題 1.1. $\mathbb{L}^{n+1}$ の任意の基底 $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ に対して

$$\det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_{n+1}, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_{n+1}, v_{n+1} \rangle \end{pmatrix} \neq 0 \tag{1.1}$$

が成り立つ．

証明. $\mathbb{L}^{n+1}$ の任意の基底 $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ をとる．$u = u^\alpha v_\alpha \in \mathbb{L}^{n+1}$ とする．$\langle u, w \rangle = 0$ が任意の $w \in \mathbb{L}^{n+1}$ に対して成り立つことと，

$$\langle u, v_\alpha \rangle = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots, n+1)$$

が成り立つことは同値である．

$$\langle u, v_\alpha \rangle = u^\beta \langle v_\alpha, v_\beta \rangle$$

であるから，これは

$$u^\beta \langle v_\alpha, v_\beta \rangle = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots, n+1)$$

が成り立つことは同値である．すなわち

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_{n+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_{n+1}, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_{n+1}, v_{n+1} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことと同値である．この方程式が自明な解 $u^1 = \cdots = u^{n+1} = 0$ しかもたないことと $\langle \ , \ \rangle$ が非退化であることは同値であるから，これは (1.1) と同値である． $\square$

注意 1.2. この証明から，一般にベクトル空間上の対称双線形関数 $\langle \ , \ \rangle$ が，そのベクトル空間のある基底 $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ に対して (1.1) を満たすならば，$\langle \ , \ \rangle$ が非退化であることがわかる．

Lorentz 内積は通常の Euclid 内積のような正定値性を満たさない．すなわち，$x \in \mathbb{L}^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して $\langle x, x\rangle > 0$ とは限らない．$x \in \mathbb{L}^{n+1} \setminus \{0\}$ は，$\langle x, x\rangle > 0$ を満たすとき**空間的**，$\langle x, x\rangle = 0$ を満たすとき**光的**または**零的**，$\langle x, x\rangle < 0$ を満たすとき**時間的**という．時間的ベクトルとベクトル光的ベクトルをまとめて**因果的ベクトル**という．因果的ベクトル $x = {}^t(x^1, \ldots, x^{n+1})$ は，$x^{n+1} > 0$ のとき**未来的**，$x^{n+1} < 0$ のとき**過去的**であるという．また，$x \in \mathbb{L}^{n+1}$ の**長さ**を $|x| := \sqrt{|\,\langle x, x\rangle\,|}$ で定める．光的ベクトルは長さ 0 である．長さ 1 のベクトルを**単位ベクトル**という．x が空間的単位ベクトルならば $\langle x, x\rangle = 1$，時間的単位ベクトルならば $\langle x, x\rangle = -1$ である．

$v_1, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{L}^{n+1}$ が

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \langle v_i, v_{n+1}\rangle = 0, \quad \langle v_{n+1}, v_{n+1}\rangle = -1 \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

を満たすとき，$\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ を **Lorentz 正規直交基底**という．特に，

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の組 $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ を $\mathbb{L}^{n+1}$ の**標準基底**という．

Euclid 空間の直交群に対応する群として **Lorentz 群**

$$\mathrm{O}(n, 1) := \{A \in \mathrm{GL}(n+1; \mathbb{R}) \; ; \; {}^t A \,\mathrm{id}_{n,1}\, A = \mathrm{id}_{n,1}\}$$

がある．

命題 1.3. 次の 4 条件は同値である．

(1) $A \in \mathrm{O}(n, 1)$.

(2) 任意の $v \in \mathbb{L}^{n+1}$ に対して $\langle Av, Av\rangle = \langle v, v\rangle$ が成り立つ．

(3) 任意の $v,\, w \in \mathbb{L}^{n+1}$ に対して $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$ が成り立つ．

(4) 行列 A の $(n+1)$ 個の列ベクトルを $a_1, \ldots, a_{n+1}$ とすると，$\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ は $\mathbb{L}^{n+1}$ の Lorentz 正規直交基底である．

問題 1.4. この命題を証明せよ．

$A \in \mathrm{O}(n, 1)$ とすると，$\det A = \pm 1$ かつ $|a^{n+1}_{n+1}| \geq 1$ であるから，$\mathrm{O}(n, 1)$ は 4 つの連結成分からなる．ただし a^{n+1}_{n+1} は A の $(n+1, n+1)$ 成分である．このうち，$\det A = 1$ かつ $a^{n+1}_{n+1} \geq 1$ の連結成分は $\mathrm{O}(n, 1)$ の部分群になる．これを $\mathrm{SO}^+(n, 1)$ と表し，**固有 Lorentz 群**という．

$$\mathrm{SO}^+(n, 1) := \{A \in \mathrm{O}(n, 1) \; ; \; \det A = 1, \;\; a^{n+1}_{n+1} > 0\}.$$

$(v_1, \ldots, v_{n+1}) \in \mathrm{SO}^+(n, 1)$ ならば，$\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ は $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ と同じ向きで時間的ベクトル v_{n+1} が未来的な Lorentz 正規直交基底である．

$\mathbb{L}^{n+1}$ の部分 (ベクトル) 空間 V に対して

$$V^{\perp} := \{w \in \mathbb{L}^{n+1}\ ;\ \langle v, w\rangle = 0\ \ (\forall v \in V)\}$$

とおく．$\langle\ ,\ \rangle$ は正定値ではないので $V + V^{\perp} = \mathbb{L}^{n+1}$ とは限らない．例えば $n = 1$ として $V = \{{}^{t}(\lambda, \lambda)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ とすると, $V^{\perp} = V$ である．しかし次が成り立つ.

補題 1.5. V が $\mathbb{L}^{n+1}$ の部分空間ならば次が成り立つ.

(1) $\dim V + \dim V^{\perp} = \dim \mathbb{L}^{n+1} (= n + 1)$.
(2) $(V^{\perp})^{\perp} = V$.

証明. (1) $\{v_1 \ldots, v_{n+1}\}$ を $\mathbb{L}^{n+1}$ の基底で, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ が V の基底となるものとする．任意の $w \in \mathbb{L}^{n+1} \setminus \{0\}$ をとる．$w \in V^{\perp}$ であることと任意の $v \in V$ に対して $\langle v, w\rangle = 0$ が成り立つことは同値であり, これは

$$\langle v_\beta, w\rangle = 0$$

が $\beta = 1, \ldots, k$ に対して成り立つことと同値である．$w = w^\alpha v_\alpha$ とおくとこれは

$$w^\alpha \langle v_\beta, v_\alpha\rangle = 0$$

が $\beta = 1, \ldots, k$ に対して成り立つことと同値である．これは

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & \langle v_1, v_{n+1}\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_k, v_1\rangle & \cdots & \langle v_k, v_{n+1}\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

と同値である．補題 1.1 によりこの左辺の行列の階数は k であるから, この $w^1, \ldots, w^{n+1}$ に関する連立方程式の解空間の次元は $n + 1 - k$ である．従って

$$\dim V^{\perp} = n + 1 - k$$

であるから $\dim V + \dim V^{\perp} = n + 1$ が成り立つ.

(2) 任意の $u \in V$ をとる．(1) で用いた V の基底 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ を使って $u = \sum_{\alpha=1}^{k} u^\alpha v_\alpha$ とおくと, 任意の $w \in V^{\perp}$ に対して

$$\langle u, w\rangle = \sum_{\alpha=1}^{k} \langle v_\alpha, w\rangle = 0$$

が成り立つ．よって $u \in (V^{\perp})^{\perp}$ である．従って

$$V \subset (V^{\perp})^{\perp} \tag{1.2}$$

が成り立つ．さらに (1) と同様の議論で

$$\dim (V^{\perp})^{\perp} = n + 1 - \dim V^{\perp} = n + 1 - (n + 1 - k) = k$$

が成り立つから

$$\dim V = \dim(V^\perp)^\perp \tag{1.3}$$

が成り立つ. (1.2), (1.3) により $V = (V^\perp)^\perp$ が成り立つ. □

命題 1.6. (1) V を $\mathbb{L}^{n+1}$ の n 次元部分空間とする. V の元が空間的ベクトル (と零ベクトル) のみからなるならば, $V^\perp$ は時間的ベクトル (と零ベクトル) のみからなる 1 次元部分空間である.

(2) V を $\mathbb{L}^{n+1}$ の 1 次元部分空間とする. V の元が時間的ベクトル (と零ベクトル) のみからなるならば, $V^\perp$ は空間的ベクトル (と零ベクトル) のみからなる n 次元部分空間である.

証明. (1) V は n 次元部分空間だから, ある $a^1, \ldots, a^{n+1} \in \mathbb{R}$ が存在して

$$V = \left\{ {}^t(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1} \; ; \; \sum_{\alpha=1}^{n+1} a^\alpha x^\alpha = 0 \right\}$$

と書くことができる. このとき $a = {}^t(a^1, \ldots, a^n, -a^{n+1})$ とおくと

$$\langle a, x \rangle = a^1 x^1 + \ldots a^n x^n - (-a^{n+1}) x^{n+1} = 0$$

であるから $a \in V^\perp$ である. 補題 1.5 により $\dim V^\perp = 1$ であるから

$$V^\perp = \{\lambda a \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

である. a が時間的ベクトルであることを示せばよい. すなわち

$$(a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2 < (a^{n+1})^2$$

を示す. まず $a^{n+1} = 0$ ならば, ${}^t(0, \ldots, 0, 1) \in V$ となり, これは V の元が空間的ベクトルのみからなることに反するから, $a^{n+1} \neq 0$ である.

(i) $a^1 = \cdots = a^n = 0$ のとき, $a = {}^t(0, \ldots, 0, -a^{n+1})$ は時間的ベクトルである.

(ii) $a^1, \ldots, a^n$ のうち少なくとも 1 つは 0 でないとき, すなわち $(a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2 > 0$ のとき,

$$x = {}^t(x^1, \ldots, x^{n+1}) = {}^t\!\left(a^1, \ldots, a^n, -\frac{(a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2}{a^{n+1}} \right)$$

とおくと,

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} a^\alpha x^\alpha = (a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2 - \left((a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2 \right) = 0$$

であるから $x \in V$ である.

$$\begin{aligned} 0 < \langle x, x \rangle &= (a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2 - \frac{\left((a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2 \right)^2}{(a^{n+1})^2} \\ &= \frac{(a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2}{(a^{n+1})^2} \left((a^{n+1})^2 - \left((a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

であるから $(a^{n+1})^2 - \left((a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2 \right) > 0$, すなわち a は時間的ベクトルである.

(i), (ii) により a は時間的ベクトルである.

(2) $a = {}^t(a^1, \ldots, a^{n+1}) \in V \setminus \{0\}$ とすると, $V = \{\lambda a \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ である. a は時間的ベクトルであるから,

$$(a^{n+1})^2 > (a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2 \tag{1.4}$$

を満たす. 特に $a^{n+1} \neq 0$ である. 補題 1.5 により $\dim V^\perp = n$ であるから, $V^\perp \setminus \{0\}$ の任意の元が空間的であることを証明すればよい. $V^\perp \setminus \{0\}$ の任意の元 $x = {}^t(x^1, \ldots, x^{n+1})$ をとると, $\langle a, x\rangle = 0$ であるから

$$a^1x^1 + \cdots + a^nx^n = a^{n+1}x^{n+1} \tag{1.5}$$

が成り立つ. もし $(a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2 = 0$ ならば (1.5) により $x^{n+1} = 0$ となるので x は空間的である. $(a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2 \neq 0$ ならば, Cauchy-Schwarz の不等式及び (1.5), (1.4) により

$$\begin{aligned}
\left((a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2\right)\left((x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2\right) &\geqq \left(a^1x^1 + \ldots a^nx^n\right)^2 \\
&= (a^{n+1})^2(x^{n+1})^2 \\
&> \left((a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2\right)(x^{n+1})^2
\end{aligned}$$

が成り立つので, $(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 > (x^{n+1})^2$ となり x は空間的である. □

命題 1.7. (1) x を空間的単位ベクトルとする. このとき $v_2, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{L}^{n+1}$ が存在して

$$\{x = v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$$

は Lorentz 正規直交基底となる.

(2) x を時間的単位ベクトルとする. このとき $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{L}^{n+1}$ が存在して

$$\{v_1, \ldots, v_n, x = v_{n+1}\}$$

は Lorentz 正規直交基底となる.

証明. (1) $x = {}^t(x^1, \ldots, x^{n+1})$ を空間的単位ベクトルとする. $x^{n+1} = 0$ ならば $a = {}^t(0, \ldots, 0, 1)$ とすると

$$\langle a, x\rangle = 0, \qquad \langle a, a\rangle = -1 \tag{1.6}$$

が成り立つ. また, $x^{n+1} \neq 0$ ならば

$$a = \frac{|x^{n+1}|}{\sqrt{1 + (x^{n+1})^2}}\, {}^t\!\left(x^1, \ldots, x^n, \frac{1 + (x^{n+1})^2}{x^{n+1}}\right)$$

とおくと (1.6) が成り立つ. いずれの場合も $V = \{\lambda a \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ とおくと $x \in V^\perp$ であり, 命題 1.6 (2) により $V^\perp$ は n 次元でその全てのベクトルは空間的 (または零ベクトル) であるから $v_2, \ldots, v_n \in V^\perp$ が存在して

$$\{x = v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

は $V^\perp$ の正規直交基底となる．よって $\{x = v_1, v_2, \dots, v_n, a\}$ が求める Lorentz 正規直交基底である．

(2) x を時間的単位ベクトルとする．$V = \{\lambda x \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ とおくと, 命題 1.6 (2) により $V^\perp$ は n 次元でその全てのベクトルは空間的 (または零ベクトル) であるから $v_1, \dots, v_n \in V^\perp$ が存在して

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

は $V^\perp$ の正規直交基底となる．よって $\{v_1, v_2, \dots, v_n, x = v_{n+1}\}$ が求める Lorentz 正規直交基底である． $\square$

命題 1.8. x が時間的ベクトルならば任意のベクトル y に対して

$$\langle x, y\rangle^2 \geq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

が成り立つ．等号が成り立つための必要十分条件はある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $y = \lambda x$ となることである．

注意 1.9. 正定値内積のときの Cauchy-Schwarz の不等式

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

とは不等号の向きが逆であることに注意せよ．

命題 1.8 **の証明**. x が時間的単位ベクトルの場合に証明すれば十分である．x を時間的単位ベクトルとすると, 命題 1.7 (2) により $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{L}^{n+1}$ が存在して

$$\{v_1, \dots, v_n, x\}$$

は Lorentz 正規直交基底となる．任意の $y \in \mathbb{L}^{n+1}$ に対してある $y^1, \dots, y^{n+1} \in \mathbb{R}$ が存在して

$$y = y^i v_i + y^{n+1} x$$

と表すことができる．$\langle x, y\rangle = -y^{n+1}$ であるから $\langle x, y\rangle^2 = (y^{n+1})^2$ である．一方, $\langle x, x\rangle = -1$, $\langle y, y\rangle = \sum_{i=1}^n (y^i)^2 - (y^{n+1})^2$ であるから

$$\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle = -\sum_{i=1}^n (y^i)^2 + (y^{n+1})^2 \leqq (y^{n+1})^2 = \langle x, y\rangle^2$$

が成り立つ．さらに等号が成り立つための必要十分条件は $y^1 = \cdots = y^n = 0$, すなわち $y = y^{n+1} x$ となるとき, すなわち y が x に比例するときである． $\square$

定義 1.10 ($\mathbb{L}^3$ のベクトル積)**.** $x = {}^t(x^1, x^2, x^3)$, $y = {}^t(y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{L}^3$ に対して, その**ベクトル積** $x \times y$ を

$$x \times y := \begin{pmatrix} -(x^2y^3 - x^3y^2) \\ -(x^3y^1 - x^1y^3) \\ (x^1y^2 - x^2y^1) \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

で定める．Euclid 空間のベクトル積との符号の違いに注意せよ．

問題 1.11. $x, y, z \in \mathbb{L}^3$ に対して次が成り立つことを証明せよ.

(1) $\langle x, x \times y \rangle = \langle y, x \times y \rangle = 0$.

(2) $\langle x \times y, x \times y \rangle = -\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle^2$.

(3) $\langle x \times y, z \rangle = -\det(x, y, z)$.

2 空間的 (超) 曲面論の復習

本節では空間的 (超) 曲面論について簡単に復習する. 本節で与える命題や定理には証明を与えていないので, 詳細は曲面論の教科書などを適宜参照のこと.

M を n 次元多様体とする (ただし n は 2 以上の整数). n 次元であることを強調したいときは M^n と書くこともある. 当面は局所的な話をするので, M は $\mathbb{R}^n$ の領域と思うことにする. $\mathbb{L}^{n+1}$ を $(n+1)$ 次元 Lorentz-Minkowski 空間とし, その (符号数 $(n,1)$ の) Lorentz 計量を $\langle\ ,\ \rangle$ で表す. $f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ をはめ込みとする. ${}^t(u^1, \ldots, u^n)$ を M の局所座標系とすると, M の各点で

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u^n} \right\}$$

は 1 次独立である. 以後, 偏微分の記号を簡略化して

$$f_i := \frac{\partial f}{\partial u^i}, \qquad f_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i}, \qquad (1 \le i, j \le n)$$

等と書くことにする. $\{f_1, \ldots, f_n\}$ は M の各点 p で $f(p)$ の接空間の基底をなす. $p \in M$ に対して $f(p)$ の接空間の元が全て空間的ベクトル (または零ベクトル) のとき, f は点 p において**空間的**であるという. M の全ての点 p において f が空間的であるとき, f を**空間的はめ込み**という.

定義 2.1. 空間的はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ のことを $\mathbb{L}^{n+1}$ の空間的**超曲面**という. 特に $n = 2$ のときは $\mathbb{L}^3$ の空間的**曲面**という.

D を $\mathbb{R}^n$ の領域, $f : D \to \mathbb{L}^{n+1}$ を空間的はめ込みとする. 微分同相写像

$$\varphi : D' \ni {}^t(v^1, \ldots, v^n) \mapsto {}^t(u^1, \ldots, u^n) \in D$$

(ただし D' は $\mathbb{R}^n$ の領域) に対して, $f : D \to \mathbb{R}^{n+1}$ と $f' := f \circ \varphi : D' \to \mathbb{R}^{n+1}$ は同じ超曲面の異なるパラメータ表示を与える. $\varphi : D' \to D$ を超曲面の**座標変換**という.

以下, 本講義で座標変換というときは, **正の座標変換**, すなわち

$$J_\varphi := \det \frac{\partial(v^1, \ldots, v^n)}{\partial(u^1, \ldots, u^n)} > 0$$

である座標変換のみを考える.

定義 2.2. $g_{ij} := \langle f_i, f_j \rangle$ とし,

$$\mathrm{I} := g_{ij} du^i du^j$$

とおく. I を M の**第 1 基本形式**, g_{ij} を**第 1 基本形式の係数**という. また,

$$g := \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

とおき, M の**第 1 基本行列**という.

問題 2.3. g が n 次の正定値対称行列であることを証明せよ.

定義 2.4. M の各点 p に対して $f(p)$ における $\mathbb{L}^{n+1}$ のベクトル $v(p)$ を対応させる対応 v を, **f に沿う M 上のベクトル場**という.

$f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ を空間的はめ込みとすると, その接空間は空間的ベクトルからなる n 次元部分空間であるから, 命題 1.6 により f に沿う時間的ベクトル場で, 接空間の任意の元との内積が 0 となるものが存在する. そのようなベクトル場のうち長さが常に 1 であるものを f に沿う M 上の (時間的) **単位法ベクトル場**という.

ν を f に沿う M 上の (時間的) 単位法ベクトル場とすると, ν は f に沿うベクトル場で

$$\langle \nu, \nu \rangle = -1, \qquad \langle f_i, \nu \rangle = 0, \qquad (1 \leq i \leq n)$$

を満たす. ν は M から n 次元二葉超双曲面

$$H^n := \left\{ {}^t(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1} \ ; \ \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 - (x^{n+1})^2 = -1 \right\}$$

への写像とみなして f の (Lorentz) **Gauss 写像**と呼ぶことがある.

注意 2.5. $f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ に対して ν の選び方は 2 通りある. ここでは特に断らない限り

$$\det(f_1, \ldots, f_n, \nu) > 0$$

となる ν を選ぶことにするが, 特にこうしなければならない訳ではない.

定義 2.6. 空間的はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ と単位法ベクトル場 ν に対し, $h_{ij} := \langle f_{ij}, \nu \rangle$ とし,

$$\mathrm{II} := h_{ij} du^i du^j$$

とおく. II を f の**第 2 基本形式**, h_{ij} を**第 2 基本形式の係数**という. また,

$$h := \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

とおき, f の**第 2 基本行列**という. h は n 次の対称行列である.

問題 2.7. $h_{ij} = -\langle f_i, \nu_j \rangle = -\langle f_j, \nu_i \rangle$ であることを証明せよ.

第 1 基本行列 g は正定値であるから逆行列 g^{-1} をもつ．g^{-1} の (i,j) 成分を g^{ij} で表す．

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & \dots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \dots & g^{nn} \end{pmatrix}.$$

問題 2.8. $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$ $(1 \leq i,j \leq n)$ であることを証明せよ．ただし

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

は Kronecker のデルタである．

定義 2.9.

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2}g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}) \qquad (1 \leq i,j,k \leq n)$$

とおく．ただし

$$g_{ij,l} := \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}$$

とする (今後, h_{ij} などについても同様の記号を用いることがある)．Γ_{ij}^k を **Christoffel の記号**, または**接続の係数**という．Γ_{ij}^k は第 1 基本形式のみに依存して決まる．Γ_{ij}^k は i, j に関して対称である．

命題 2.10 (Gauss の公式). 空間的はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ と単位法ベクトル場 ν に対して,

$$f_{ij} = \Gamma_{ij}^k f_k - h_{ij}\nu \qquad (1 \leq i,j \leq n) \tag{2.1}$$

が成り立つ．Euclid 空間の超曲面の場合と h_{ij} の前の符号が異なることに注意せよ．

定義 2.11.

$$s := \begin{pmatrix} s_1^1 & \dots & s_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^n & \dots & s_n^n \end{pmatrix} := g^{-1}h$$

とおく．行列 s を f の**型作用素**という．また, $f_j \mapsto -s_j^i f_i$ で定義される M の接空間上の線形写像を f の **Weingarten 写像**という．

問題 2.12. 型作用素 s は常に対角化可能であり, 固有値は常に実数であることを証明せよ (ヒント: 例えば [UY] の練習問題 8-1 などを参照のこと)．

命題 2.13 (Weingarten の公式). 空間的はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ と単位法ベクトル場 ν に対して,

$$\nu_i = -s_i^j f_j \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{2.2}$$

が成り立つ．ただし

$$\nu_i = \frac{\partial \nu}{\partial u^i}.$$

定義 2.14. 空間的はめ込み $f: M \to \mathbb{R}^{L+1}$ と単位法ベクトル場 ν に対して, s を f と ν から定まる型作用素とする. s の固有値を f の**主曲率**, 固有空間の 1 次元部分空間を**主方向**という. また,

$$K := -\det(s) = -\frac{\det(h)}{\det(g)}, \qquad H := \frac{1}{n}\operatorname{tr}(s)$$

とおき, K を f の **Gauss-Kronecker 曲率**, H を f の**平均曲率**, $H\nu$ を f の**平均曲率ベクトル**という. $n=2$ のときは, K のことを M の **Gauss 曲率**という. Euclid 空間の超曲面の場合と K の符号が異なることに注意せよ.

定義 2.15. はめ込み $f: M \to \mathbb{R}^{n+1}$ と単位法ベクトル場 ν に対して,

$$\mathrm{I\!I\!I} := \langle \nu_i, \nu_j \rangle \, du^i du^j$$

を f の**第 3 基本形式**という.

注意 2.16. h_{ij}, s^i_j, H は ν の取り方に依存する. すなわち, ν を $-\nu$ に取り替えるとこれらの量はすべて符号が変わる. 一方, g_{ij}, Γ^k_{ij}, $H\nu$ は ν の取り方に依存しない.

また, K は n が奇数のときは ν の取り方に依存するが, n が偶数のときは ν の取り方に依存しない.

問題 2.17. I, II, III, K, H はいずれも座標の取り方に依存しないことを証明せよ (g, h, s は座標の取り方に依存する).

問題 2.18. $n=2$ のとき,

$$-K\mathrm{I} - 2H\mathrm{I\!I} + \mathrm{I\!I\!I} = 0 \tag{2.3}$$

が成り立つことを証明せよ (ヒント: s に Cayley-Hamilton の公式を適用する. 後は Weingarten の公式を使って $\langle \nu_i, \nu_j \rangle = h_{ik} g^{kl} h_{lj}$ となることを確かめればよい). 問題 2.22 も参照.

定義 2.19. $1 \le i, j, k, l \le n$ に対して

$$R_{ijkl} := g_{lm}\left(\Gamma^m_{jk,i} - \Gamma^m_{ik,j} + \Gamma^n_{jk}\Gamma^m_{in} - \Gamma^n_{ik}\Gamma^m_{jn}\right)$$

とおく. R_{ijkl} を**曲率テンソルの係数**という. R_{ijkl} は第 1 基本形式のみに依存して決まる.

$(f_{ij})_k = (f_{ik})_j$ の両辺を Gauss の公式および Weingarten の公式を用いて $f_1, \ldots, f_n, \nu$ の 1 次結合の形に書き下し, その接成分の係数を比較することで命題 2.20, 法成分の係数を比較することで命題 2.21 を得る.

命題 2.20 (Gauss の方程式). $1 \le i, j, k, l \le n$ に対して

$$R_{ijkl} = -(h_{il}h_{jk} - h_{ik}h_{jl})$$

が成り立つ. Euclid 空間の超曲面の場合と右辺の符号が異なることに注意せよ.

命題 2.21 (**Codazzi の方程式**)**.** $1 \leq i, j, k \leq n$ に対して

$$h_{ij,k} + \Gamma^l_{ij} h_{kl} = h_{ik,j} + \Gamma^l_{ik} h_{jl}$$

が成り立つ.

問題 2.22. $1 \leq j, k \leq n$ に対して, $R_{jk} := g^{il} R_{ijkl}$ とおく. R_{jk} を **Ricci テンソルの係数**という. また,

$$\mathrm{Ric} := R_{jk} du^j du^k$$

を **Ricci 形式**という. 問題 2.18 の一般化として,

$$-\mathrm{Ric} - nH\mathrm{I\!I} + \mathrm{I\!I\!I} = 0 \tag{2.4}$$

が成り立つことを証明せよ (ヒント: Gauss の方程式と Weingarten の公式を使って直接計算する).

問題 2.23. 曲率テンソルの径数 R_{ijkl} は次の (i)–(iv) を満たすことを証明せよ.

(i) $R_{jikl} = -R_{ijkl}$. 特に $R_{iikl} = 0$.
(ii) $R_{ijlk} = -R_{ijkl}$. 特に $R_{ijkk} = 0$.
(iii) $R_{klij} = R_{ijkl}$.
(iv) $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0$

注意 2.24. (1) Gauss の方程式は見かけ上 n^4 個の方程式であるが, 問題 2.23 の対称性から, 実際の方程式の数は少ない. 例えば $n = 2$ のときは,

$$R_{1212} = -R_{1221} = R_{2121} = -R_{2112}$$

であり, それ以外は $R_{ijkl} = 0$ である.

(2) Codazzi の方程式は見かけ上 n^3 個の方程式であるが, $j = k$ のときは自明な式であり, j と k を取り替えても同じ方程式が得られるから, 実際には高々 $n^2(n-1)/2$ 個の方程式である.

注意 2.25. $n = 2$ のとき, Gauss の方程式において $i = l = 1$, $j = k = 2$ とすると,

$$R_{1221} = -\det(h)$$

であることがわかる. 従って Gauss 曲率 K は

$$K = \frac{R_{1221}}{\det(g)} \tag{2.5}$$

となり, K は第 1 基本形式のみに依存することがわかる. これを **Gauss の基本定理** (*theorema egregium*) という.

空間的はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ が与えられると, f から定まる第 1 基本形式および第 2 基本形式は Gauss の方程式および Codazzi の方程式を満たすが, 逆に次が成り立つ.

定理 2.26 (**超曲面論の基本定理**)**.** M は単連結であるとする．次の条件を満たす M 上の関数 g_{ij}, h_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ 与えられたとする:

$$(g_{ij}) \text{ は正定値対称行列}, \qquad (h_{ij}) \text{ は対称行列}$$

このとき, $g_{ij}du^i du^j$, $h_{ij}du^i du^j$ をそれぞれ第 1 基本形式, 第 2 基本形式とする空間的はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ が存在するための必要十分条件は, g_{ij}, h_{ij} が Gauss の方程式および Codazzi の方程式を満たすことである．さらに, このような f は (f の単位法ベクトル場 ν が未来的または過去的と限定すると) $\mathbb{L}^{n+1}$ の合同変換 (すなわち $\mathrm{SO}^+(n, 1)$ の元の左からの作用と平行移動) を除いて一意に定まる．

3 超曲面の体積 (曲面の面積) の第 1 変分

M を向き付け可能な n 次元多様体, $f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ を空間的はめ込みとする．$\nu : M \to H^n$ を f に沿う M 上の単位法ベクトル場とする．

本節では M は $\mathbb{R}^n$ の領域で, かつ $\overline{M}$ がコンパクトであると仮定する．M の境界を ∂M で表す．すなわち $\overline{M} = M \cup \partial M$ である．∂M は $(n-1)$ 次元多様体であり, M から自然に向きを入れることができる．

問題 3.1. M が n 次元の境界付き多様体ならば, ∂M は $(n-1)$ 次元多様体であることを証明せよ．

定義 3.2. 空間的はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ の**体積** Vol_f を

$$\mathrm{Vol}_f = \int_M dV, \qquad dV := \sqrt{\det g}\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^n$$

で定める．ただし g は M の第 1 基本行列, ${}^t(u^1, \ldots, u^n)$ は M の局所座標系である．dV を f の**体積要素**という．

注意 3.3. 上の定義において, $n = 2$ の場合は特に Vol_f, dV をそれぞれ f の**面積**, **面積要素**というが, ここでは $n = 2$ の場合も含めて体積や体積要素という用語を用いる．

問題 3.4. $f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ を空間的はめ込みとする．$\nu = {}^t(\nu^1, \ldots, \nu^{n+1}) : M \to H^n$ を f に沿う M 上の単位法ベクトル場で

$$\det F > 0, \qquad F = (f_1, \ldots, f_n, \nu)$$

を満たすものとする．

(1) $\det F = \sqrt{\det g}$ が成り立つことを証明せよ (ヒント: $\det({}^tFF) = \det g$ が成り立つことを示す).

(2) $d\check{x}^\alpha := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha-1} \wedge dx^{\alpha+1} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$ $(1 \leq \alpha \leq n+1)$ とおく．$d\check{x}^\alpha \in \Lambda^n \mathbb{L}^{n+1}$ である．f に沿う M 上のベクトル場 $\mu = {}^t(\mu^1, \ldots, \mu^{n+1})$ に対して

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^{n+1} (-1)^{\alpha-1} \mu^\alpha d\check{x}^\alpha$$

とおくと，$f^*\omega = \det(f_1, \ldots, f_n, \mu) du^1 \wedge \cdots \wedge du^n$ が成り立つことを証明せよ (ヒント: $dx^\alpha \in \Lambda^1 \mathbb{L}^{n+1}$ の f による引き戻し $f^* dx^\alpha \in \Lambda^1(M)$ が

$$f^* dx^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i} du^i$$

で与えられることを用いる).

(3) 特に

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^{n+1} (-1)^{\alpha-1} \nu^\alpha d\check{x}^\alpha$$

とおくと，$f^*\omega = dV$ が成り立つことを証明せよ (ヒント: (1) と (2) からすぐに分かる).

次の問題を考える:

問題. $\mathbb{R}^{n+1}$ 内に埋め込まれた $(n-1)$ 次元閉多様体が与えられたとき，それを境界とする n 次元多様体で，体積が最小となるものは存在するか．存在するならばどのようなものか．

$n = 2$ のとき，この問題は **Plateau 問題**と呼ばれている．面積が最小となる曲面は常に存在し，その曲面は平均曲率が恒等的に 0 になることが知られている．この問題のように，何かを最小 (または最大) にする状態を調べる問題を**変分問題**という．

これと同様のことを $\mathbb{L}^{n+1}$ の空間的超曲面に対して考える．ただしここでは体積を最大にする空間的はめ込みを調べる．そのために，まず次の言葉を用意する．ε_0 を十分小さな正の実数とし，固定する．$I := (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ とおく．

定義 3.5. 次の 2 条件を満たす C^∞ 級写像

$$\bar{f} : I \times \overline{M} \ni (t; u^1, \ldots, u^n) \mapsto \bar{f}(t; u^1, \ldots, u^n) \in \mathbb{L}^{n+1}$$

を，**$f(\overline{M})$ の境界を固定する滑らかな変分**という．

(1) 任意の ${}^t(u^1, \ldots, u^n) \in M$ に対して $\bar{f}(0; u^1, \ldots, u^n) = f(u^1, \ldots, u^n)$,
(2) 任意の $t \in I$, 任意の ${}^t(u^1, \ldots, u^n) \in \partial M$ に対して $\bar{f}(t; u^1, \ldots, u^n) = f(u^1, \ldots, u^n)$.

「$f(\overline{M})$ の境界を固定する滑らかな変分」という言い回しは長いので，今後は単に f の**変分**ということにする．

f の変分 $\bar{f}$ に対して

$$\left.\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}\right|_{t=0}$$

は f に沿う M 上のベクトル場となる．これを f の変分 $\bar{f}$ に関する**変分ベクトル場**という．

注意 3.6. $\bar{f}$ は $t \in I$ に関しても C^∞ 級であり, ε_0 は十分小であるから, 各 $t \in I$ に対して $\bar{f}$ は空間的はめ込み (すなわち $\mathbb{L}^{n+1}$ の空間的 (超) 曲面) になっている.

空間的はめ込み f の境界を固定する滑らかな変分 $\bar{f}$ を任意に 1 つとる. 各 $t \in I$ に対して, はめ込み $\bar{f}$ の体積を $\mathrm{Vol}_f(t)$ で表す. $\mathrm{Vol}_f(t)$ を $\bar{f}$ の**体積汎関数**という.

与えられた $\mathbb{L}^{n+1}$ 内の空間的 $(n-1)$ 次元閉多様体 N に対して, 空間的はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^{n+1}$ が $f(\partial M) = N$ を満たし, かつ体積が最大ならば, f の任意の変分 $\bar{f}$ に対して

$$\mathrm{Vol}_f(0) \geq \mathrm{Vol}_f(t), \qquad t \in I$$

が成り立つ. そしてこのとき

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t) = 0 \tag{3.1}$$

が成り立つ. そこで (3.1) を満たす f について調べる. このような変分問題の定式化を**変分法**という. (3.1) の左辺を f の**第 1 変分**という.

以下,

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Vol}_f(t)$$

を計算する.

各 $t \in I$ に対して, 空間的はめ込み $\bar{f}$ の第 1 基本行列を $\bar{g}$ で表す ($t = 0$ のときは $\bar{g} = g$ である). また, 第 2 基本行列やそれぞれの係数などもすべて $\bar{h}$, $\bar{g}_{ij}$, $\bar{h}_{ij}$ などと上に bar を付けて表す.

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Vol}_f(t) = \frac{d}{dt} \int_M \sqrt{\det \bar{g}}\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^n = \int_M \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det \bar{g}}\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^n \tag{3.2}$$

であるから,

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det \bar{g}}$$

を計算する.

問題 3.7. (3.2) の右側の等号が成り立つことを証明せよ.

定理 A.8 (1) により

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det \bar{g}} = \frac{1}{2\sqrt{\det \bar{g}}} \operatorname{tr}\left(\bar{g}^{ij} \bar{g}_{jk,t}\right) \det \bar{g} = \frac{1}{2} \sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij} \bar{g}_{ij,t} \tag{3.3}$$

である. ただし

$$\bar{g}_{ij,t} := \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial t} = \left\langle \bar{f}_i, \bar{f}_j \right\rangle_t = \left\langle (\bar{f}_t)_i, \bar{f}_j \right\rangle + \left\langle \bar{f}_i, (\bar{f}_t)_j \right\rangle.$$

ここで $\bar{f}_t$ は $\mathbb{L}^{n+1}$ のベクトルであるから, $I \times \overline{M}$ 上の関数 $\bar{\alpha}^1, \ldots, \bar{\alpha}^n, \bar{\beta}$ を用いて

$$\bar{f}_t = \bar{\alpha}^i \bar{f}_i + \bar{\beta} \bar{\nu}$$

と表すことができる.

注意 3.8. 各 $t \in I$ に対して $\bar{f}|_{\partial M} = f|_{\partial M}$ であるから, 任意の $t \in I$, 任意の $(u^1, \dots, u^n) \in \partial M$ に対して

$$\bar{\alpha}^1(t; u^1, \dots, u^n) = \cdots = \bar{\alpha}^n(t; u^1, \dots, u^n) = \bar{\beta}(t; u^1, \dots, u^n) = 0$$

が成り立つ.

$\bar{\xi} := \bar{\alpha}^i \bar{f}_i$ とおくと,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij,t} &= \left\langle (\bar{\xi} + \bar{\beta}\bar{\nu})_i, \bar{f}_j \right\rangle + \left\langle \bar{f}_i, (\bar{\xi} + \bar{\beta}\bar{\nu})_j \right\rangle \\ &= \left\langle \bar{\xi}_i + \bar{\beta}\bar{\nu}_i, \bar{f}_j \right\rangle + \left\langle \bar{f}_i, \bar{\xi}_j + \bar{\beta}\bar{\nu}_j \right\rangle \\ &= \left\langle \bar{\xi}_i, \bar{f}_j \right\rangle - \bar{\beta}\bar{h}_{ij} + \left\langle \bar{f}_i, \bar{\xi}_j \right\rangle - \bar{\beta}\bar{h}_{ij} \end{aligned} \tag{3.4}$$

であるから,

$$\bar{g}^{ij}\bar{g}_{ij,t} = \bar{g}^{ij}\left(\left\langle \bar{\xi}_i, \bar{f}_j \right\rangle + \left\langle \bar{\xi}_j, \bar{f}_i \right\rangle\right) - 2\bar{\beta}\bar{g}^{ij}\bar{h}_{ij} = 2\left(\bar{g}^{ij}\left\langle \bar{\xi}_i, \bar{f}_j \right\rangle - n\bar{\beta}\overline{H}\right)$$

となる. よって (3.3) から

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det \bar{g}} = \sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\left\langle \bar{\xi}_i, \bar{f}_j \right\rangle - n\sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{\beta}\overline{H} \tag{3.5}$$

が成り立つ.

補題 3.9. $\sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\left\langle \bar{\xi}_i, \bar{f}_j \right\rangle = \left\langle \bar{\xi}, \sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\bar{f}_j \right\rangle_i$ が成り立つ.

証明. $\sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\left\langle \bar{\xi}_i, \bar{f}_j \right\rangle = \left\langle \bar{\xi}, \sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\bar{f}_j \right\rangle_i - \left\langle \bar{\xi}, \left(\sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\bar{f}_j\right)_i \right\rangle$ であるから,

$$\left\langle \bar{\xi}, \left(\sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\bar{f}_j\right)_i \right\rangle = 0$$

を示せば良い. $\bar{\xi} = \bar{\alpha}^k \bar{f}_k$ であるから,

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{\xi}, \left(\sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\bar{f}_j\right)_i \right\rangle &= \bar{\alpha}^k \left\langle \bar{f}_k, \left(\sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\bar{f}_j\right)_i \right\rangle \\ &= \bar{\alpha}^k \left(\left\langle \bar{f}_k, \sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\bar{f}_j \right\rangle_i - \sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\left\langle \bar{f}_{ki}, \bar{f}_j \right\rangle\right) \end{aligned}$$

である. ここで

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{f}_k, \sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\bar{f}_j \right\rangle_i &= \left(\sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\left\langle \bar{f}_k, \bar{f}_j \right\rangle\right)_i \\ &= \left(\sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\bar{g}_{jk}\right)_i \\ &= \left(\sqrt{\det \bar{g}} \cdot \delta^i_k\right)_i = \left(\sqrt{\det \bar{g}}\right)_k = \frac{1}{2}\sqrt{\det \bar{g}}\bar{g}^{ij}\bar{g}_{ij,k}, \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} \sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\left\langle \bar{f}_{ki}, \bar{f}_j \right\rangle &= \sqrt{\det \bar{g}}\left(\frac{1}{2}\bar{g}^{ij}\left\langle \bar{f}_{ki}, \bar{f}_j \right\rangle + \frac{1}{2}\bar{g}^{ji}\left\langle \bar{f}_{kj}, \bar{f}_i \right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\det \bar{g}}\bar{g}^{ij}\left(\left\langle \bar{f}_{ik}, \bar{f}_j \right\rangle + \left\langle \bar{f}_{kj}, \bar{f}_i \right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\det \bar{g}}\bar{g}^{ij}\left\langle \bar{f}_i, \bar{f}_j \right\rangle_k = \frac{1}{2}\sqrt{\det \bar{g}}\bar{g}^{ij}\bar{g}_{ij,k} \end{aligned}$$

であるから, 結論を得る. □

従って (3.5) により

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det\bar{g}} = \left\langle \bar{\xi}, \sqrt{\det\bar{g}}\cdot\bar{g}^{ij}\bar{f}_j \right\rangle_i - n\sqrt{\det\bar{g}}\cdot\bar{\beta}\overline{H} \tag{3.6}$$

であり,

$$\left\langle \bar{\xi}, \sqrt{\det\bar{g}}\cdot\bar{g}^{ij}\bar{f}_j \right\rangle_i = \left(\bar{\alpha}^k\sqrt{\det\bar{g}}\cdot\bar{g}^{ij}\bar{g}_{jk}\right)_i = \left(\bar{\alpha}^k\sqrt{\det\bar{g}}\cdot\delta^i_k\right)_i = \left(\bar{\alpha}^i\sqrt{\det\bar{g}}\right)_i$$

であるから, (3.6) から

$$\frac{d}{dt}\int_M d\overline{V} = \int_M \left(\bar{\alpha}^i\sqrt{\det\bar{g}}\right)_i du^1\wedge\cdots\wedge du^n - n\int_M \bar{\beta}\overline{H}d\overline{V} \tag{3.7}$$

を得る.

補題 3.10. $\displaystyle\int_M \left(\bar{\alpha}^i\sqrt{\det\bar{g}}\right)_i du^1\wedge\cdots\wedge du^n = 0$ が成り立つ.

証明. $d\check{u}^i := du^1\wedge\cdots\wedge du^{i-1}\wedge du^{i+1}\wedge\cdots\wedge du^n$ とおく. $d\check{u}^i\in\Lambda^{n-1}(M)$ である.

$$\omega := \frac{1}{n}\sum_i(-1)^{i-1}\left(\bar{\alpha}^i\sqrt{\det\bar{g}}\right)d\check{u}^i \in \Lambda^{n-1}(M) \tag{3.8}$$

とおくと,

$$d\omega = \left(\bar{\alpha}^i\sqrt{\det\bar{g}}\right)_i du^1\wedge\cdots\wedge du^n \tag{3.9}$$

が成り立つ. よって Stokes の定理 (定理 A.13) により

$$\int_M \left(\bar{\alpha}^i\sqrt{\det\bar{g}}\right)_i du^1\wedge\cdots\wedge du^n = \int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega$$

が成り立つ. 一方, 注意 3.8 により ∂M 上で $\bar{\alpha}^i = 0$ であるから

$$\int_{\partial M}\omega = 0$$

となり, 結論を得る. □

問題 3.11. ω を (3.8) で定めると (3.9) が成り立つことを証明せよ.

一方,

$$\bar{\beta}\overline{H} = -\left\langle \bar{f}_t, \bar{\nu}\right\rangle\overline{H} = -\left\langle \frac{\partial\bar{f}}{\partial t}, \overline{H}\bar{\nu}\right\rangle$$

である. 以上をまとめて次を得る.

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Vol}_f(t) = \frac{d}{dt}\int_M d\overline{V} = n\int_M\left\langle \frac{\partial\bar{f}}{\partial t}, \overline{H}\bar{\nu}\right\rangle d\overline{V}. \tag{3.10}$$

ここで $t=0$ とすると

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t) = n \int_M \left\langle \left.\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}\right|_{t=0}, H\nu \right\rangle dV. \tag{3.11}$$

を得る．(3.11) をはめ込み f の体積の**第 1 変分公式**という．(3.11) から，f の体積の第 1 変分は変分ベクトル場の法成分のみに依存することがわかる．

第 1 変分公式から次の定理が得られる．

定理 3.12. はめ込み f の任意の変分 $\bar{f}$ に対して (3.1) が成り立つための必要十分条件は，f の平均曲率 H が恒等的に 0 となることである．

この定理の十分性は (3.11) から明らかである．定理の必要性を示すために次の補題を用意する．

補題 3.13. 任意の点 $u_0 = {}^t(u_0^1, \ldots, u_0^n) \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\delta > 0$ に対して，$\mathbb{R}^n$ の関数 $h_{(u_0;\delta)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$h_{(u_0;\delta)}(u^1, \ldots, u^n) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\sum_i (u^i - u_0^i)^2 - \delta^2}\right) & \left(\sum_i (u^i - u_0^i)^2 < \delta^2\right) \\ 0 & \left(\sum_i (u^i - u_0^i)^2 \geq \delta^2\right) \end{cases}$$

で定めると，$h_{(u_0;\delta)}(u^1, \ldots, u^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 級関数で，

$$\begin{aligned} h_{(u_0;\delta)}(u^1, \ldots, u^n) > 0 &\quad \left(\textstyle\sum_i (u^i - u_0^i)^2 < \delta^2 \text{ のとき}\right), \\ h_{(u_0;\delta)}(u^1, \ldots, u^n) = 0 &\quad \left(\textstyle\sum_i (u^i - u_0^i)^2 \geq \delta^2 \text{ のとき}\right), \end{aligned}$$

を満たす．

問題 3.14. (1) $n=1$ のとき，$h_{(u_0;\delta)}(u)$ のグラフを描け．

(2) $n=1$ のとき，$h_{(u_0;\delta)}(u)$ が C^∞ 級であることを証明せよ．

定理 3.12 の証明. (必要性) 任意の点 $u_0 = (u_0^1, \ldots, u_0^n) \in M$ をとる．点 u_0 の δ 近傍が M に含まれるような $\delta > 0$ が存在する．この δ と補題 3.13 の関数 $h_{(u_0;\delta)} : M \to \mathbb{R}$ を用いて $\bar{f}$ を

$$\bar{f} := f + t h_{(u_0;\delta)} H\nu$$

で定めると，$\bar{f}$ は f の変分となる．このとき

$$\left\langle \left.\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}\right|_{t=0}, H\nu \right\rangle = \left\langle h_{(u_0;\delta)} H\nu, H\nu \right\rangle = -h_{(u_0;\delta)} H^2$$

であるから，(3.11) により

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t) = -n \int_M h_{(u_0;\delta)} H^2 dV.$$

となり，これが 0 になるためには点 u_0 において $H=0$ でなければならない．u_0 は M の任意の点であるから M 上で $H=0$ が成り立たなければならない． □

4 空間的超曲面の体積 (曲面の面積) の第 2 変分

前節では

$$
\begin{aligned}
&f \text{ が与えられた境界を固定する条件の下で体積最大} \\
&\Longrightarrow \quad f \text{ が与えられた境界を固定する条件の下で体積極大} \\
&\Longleftrightarrow \quad f \text{ の任意の変分 } \bar{f} \text{ に対して} \quad \mathrm{Vol}_f(0) \geq \mathrm{Vol}_f(t) \\
&\Longrightarrow \quad f \text{ の任意の変分 } \bar{f} \text{ に対して} \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad H \equiv 0 \qquad (\text{定理 } 3.12)
\end{aligned}
$$

であることを見た．すなわち体積最大超曲面は $H \equiv 0$ を満たす．この逆は成り立つだろうか．一般に体積極大であることから体積最大であることは言えないが, $H \equiv 0$ であることから体積が極大かどうかを調べることはできる．これを調べるために,

$$
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t) = 0 \quad \text{の条件の下で} \quad \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t)
$$

を計算する．

$$
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t) = 0
$$

のとき $H = 0$ であるから, (3.10) により

$$
\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t) = \int_M n \left.\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}\right|_{t=0} \left\langle \left.\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}\right|_{t=0}, \nu \right\rangle dV \tag{4.1}
$$

である．そこで

$$
n\overline{H}_t := n\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}
$$

を計算する．

$$
n\overline{H}_t = \left(\bar{g}^{ij}\bar{h}_{ij}\right)_t = \bar{g}^{ij}{}_{,t}\,\bar{h}_{ij} + \bar{g}^{ij}\bar{h}_{ij,t}, \quad \text{ただし} \quad \bar{g}^{ij}{}_{,t} := \frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial t}, \quad \bar{h}_{ij,t} := \frac{\partial \bar{h}_{ij}}{\partial t} \tag{4.2}
$$

である．まず第 1 項を計算する．命題 A.5 (4) により

$$
\bar{g}^{ij}{}_{,t} = -\bar{g}^{ik}\bar{g}_{kl,t}\bar{g}^{lj} \tag{4.3}
$$

であるから, (3.4) により

$$
\begin{aligned}
\bar{g}^{ij}{}_{,t}\,\bar{h}_{ij} &= -\bar{g}^{ik}\left(\langle\bar{\xi}_k, \bar{f}_l\rangle + \langle\bar{f}_k, \bar{\xi}_l\rangle - 2\bar{\beta}\bar{h}_{kl}\right)\bar{g}^{lj}\bar{h}_{ij} \\
&= -\bar{g}^{ik}\bar{g}^{jl}\bar{h}_{ij}\langle\bar{\xi}_k, \bar{f}_l\rangle - \bar{g}^{ik}\bar{g}^{jl}\bar{h}_{ij}\langle\bar{\xi}_l, \bar{f}_k\rangle + 2\bar{g}^{ik}\bar{g}^{jl}\bar{h}_{ij}\bar{\beta}\bar{h}_{kl}
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

となる．ただし前節と同様に $\bar{f}_t = \bar{\xi} + \bar{\beta}\bar{\nu}$ とおいた．ここで (4.4) の第 2 項は, 添字の i と j, k と l をそれぞれ交換すると第 1 項に等しいことが分かる．よって,

$$
\bar{g}^{ij}{}_{,t}\,\bar{h}_{ij} = 2\bar{g}^{ik}\bar{g}^{jl}\bar{h}_{ij}\left(-\langle\bar{\xi}_k, \bar{f}_l\rangle + \bar{\beta}\bar{h}_{kl}\right) \tag{4.5}
$$

が成り立つ.

次に第 2 項を計算する.

$$\bar{h}_{ij,t} = \left\langle \bar{f}_{ij}, \bar{\nu} \right\rangle_t = \left\langle (\bar{f}_t)_{ij}, \bar{\nu} \right\rangle + \left\langle \bar{f}_{ij}, \bar{\nu}_t \right\rangle = \left\langle \bar{\xi}_{ij} + (\bar{\beta}\bar{\nu})_{ij}, \bar{\nu} \right\rangle + \left\langle \overline{\Gamma}_{ij}^m \bar{f}_m - \bar{h}_{ij}\bar{\nu}, \bar{\nu}_t \right\rangle$$

ここで次の補題が成り立つ.

補題 4.1. $\bar{\nu}_t = -\bar{g}^{kl}\left(\left\langle \bar{\nu}, \bar{\xi}_l \right\rangle - \bar{\beta}_l\right)\bar{f}_k$ が成り立つ.

証明. $\langle \bar{\nu}, \bar{\nu} \rangle = -1$ の両辺を t で微分すると $\bar{\nu}_t$ は $\bar{\nu}$ に直交することがわかる. よってある a^i が存在して $\bar{\nu}_t = a^i \bar{f}_i$ と書くことができる. この両辺を $\bar{f}_l$ と内積をとり, 両辺に $\bar{g}^{kl}$ をかけると

$$a^k = -\bar{g}^{kl}\left(\left\langle \bar{\nu}, \bar{\xi}_l \right\rangle - \bar{\beta}_l\right)$$

を得る. □

問題 4.2. 上の証明を完成させよ.

よって

$$\left\langle \overline{\Gamma}_{ij}^m \bar{f}_m - \bar{h}_{ij}\bar{\nu}, \bar{\nu}_t \right\rangle = -\overline{\Gamma}_{ij}^m \bar{g}^{kl}\left(\left\langle \bar{\nu}, \bar{\xi}_l \right\rangle - \bar{\beta}_l\right)\bar{g}_{km} = -\overline{\Gamma}_{ij}^l\left(\left\langle \bar{\nu}, \bar{\xi}_l \right\rangle - \bar{\beta}_l\right)$$

であるから

$$\bar{g}^{ij}\bar{h}_{ij,t} = \bar{g}^{ij}\left(\left\langle \bar{\xi}_{ij}, \bar{\nu} \right\rangle + \left\langle (\bar{\beta}\bar{\nu})_{ij}, \bar{\nu} \right\rangle - \overline{\Gamma}_{ij}^l \left\langle \bar{\xi}_l, \bar{\nu} \right\rangle + \overline{\Gamma}_{ij}^l \bar{\beta}_l\right) \tag{4.6}$$

を得る. (4.2), (4.5), (4.6) から

$$\begin{aligned} n\overline{H}_t = \bar{g}^{ij}&\left(-2\bar{g}^{kl}\bar{h}_{ik}\left\langle \bar{\xi}_j, \bar{f}_l \right\rangle + \left\langle \bar{\xi}_{ij}, \bar{\nu} \right\rangle - \overline{\Gamma}_{ij}^l \left\langle \bar{\xi}_l, \bar{\nu} \right\rangle\right) \\ &+ \bar{g}^{ij}\left(2\bar{\beta}\bar{g}^{kl}\bar{h}_{ik}\bar{h}_{jl} + \left\langle (\bar{\beta}\bar{\nu})_{ij}, \bar{\nu} \right\rangle + \overline{\Gamma}_{ij}^l \bar{\beta}_l\right) \end{aligned}$$

を得る. この右辺の 1 行目と 2 行目の項について, 次の補題が成り立つ.

補題 4.3. $\bar{\xi} = \bar{\alpha}^i \bar{f}_i$ とおくと, 次の 2 式が成り立つ.

$$\bar{g}^{ij}\left(-2\bar{g}^{kl}\bar{h}_{ik}\left\langle \bar{\xi}_j, \bar{f}_l \right\rangle + \left\langle \bar{\xi}_{ij}, \bar{\nu} \right\rangle - \overline{\Gamma}_{ij}^l \left\langle \bar{\xi}_l, \bar{\nu} \right\rangle\right) = n\bar{\alpha}^i \overline{H}_i, \tag{4.7}$$

$$\bar{g}^{ij}\left(2\bar{\beta}\bar{g}^{kl}\bar{h}_{ik}\bar{h}_{jl} + \left\langle (\bar{\beta}\bar{\nu})_{ij}, \bar{\nu} \right\rangle + \overline{\Gamma}_{ij}^l \bar{\beta}_l\right) = \bar{\beta}|\bar{\mathrm{I\!I}}|^2 - \triangle_{\bar{\mathrm{I}}}\bar{\beta}, \tag{4.8}$$

ただし, $|\bar{\mathrm{I\!I}}|^2$ は $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$ を $\bar{s} := \bar{g}^{-1}\bar{h}$ の固有値として

$$|\bar{\mathrm{I\!I}}|^2 := \sum_i \bar{\lambda}_i^2$$

で定義される. また, $\triangle_{\bar{\mathrm{I}}}\bar{\beta} := \bar{g}^{ij}(\bar{\beta}_{ij} - \overline{\Gamma}_{ij}^k \bar{\beta}_k)$ とする.

注意 4.4. (1) $n = 2$ のときは, $|\bar{\mathrm{I\!I}}|^2 = 2(2\overline{H}^2 + \overline{K})$ が成り立つ.

(2) $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ を点 $p \in M$ における M の接空間の正規直交基底とすると,

$$|\bar{\mathrm{II}}|^2 = \sum_{i,j} \bar{\mathrm{II}}(\bar{e}_i, \bar{e}_j)^2$$

が成り立つ. このことから $|\bar{\mathrm{II}}|$ を $\bar{f}$ の**第 2 基本形式のノルム**という.

(3) $\triangle_{\bar{\mathrm{I}}}\bar{\beta}$ を $\bar{\beta}$ の $\bar{\mathrm{I}}$ に関する **Laplace 作用素**という. $\triangle_{\bar{\mathrm{I}}}\bar{\beta}$ は

$$\triangle_{\bar{\mathrm{I}}}\bar{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}}}\left(\sqrt{\det \bar{g}} \cdot \bar{g}^{ij}\bar{\beta}_j\right)_i$$

と表すこともできる.

問題 4.5. 注意 4.4 の (1), (2), (3) を確かめよ.

ヒント (2)**.** $\bar{e}_i = a_i^j \bar{f}_i$ とおくと, $\delta_{ij} = \bar{\mathrm{I}}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = a_i^k a_j^l \bar{g}_{kl}$, $\bar{\mathrm{II}}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = a_i^k a_j^l \bar{h}_{kl}$ が成り立つ. 行列 $a = (a_j^i)$ は基底の変換行列だから逆行列をもつ. a の逆行列を $b = (b_j^i)$ と書くと,

$$\bar{g}_{kl} a_i^k a_j^l b_m^i b_n^j = \delta_{ij} b_m^i b_n^j$$

から $\bar{g}_{ij} = \sum_k b_i^k b_j^k$, すなわち $\bar{g} = {}^t bb$ が成り立つ. よって $g^{-1} = a^t a$ となるから $\bar{g}^{ij} = \sum_k a_k^i a_k^j$. 従って

$$\sum_{i,j} \bar{\mathrm{II}}(\bar{e}_i, \bar{e}_j)^2 = \sum_{i,j} a_i^k a_j^l \bar{h}_{kl} a_i^m a_j^n \bar{h}_{mn} = \bar{g}^{km}\bar{g}^{ln}\bar{h}_{kl}\bar{h}_{mn} = \bar{s}_l^m \bar{s}_m^l = |\bar{\mathrm{II}}|^2$$

が成り立つ (最後の等号については, 補題 4.3 の証明の最後の部分を参照のこと).

補題 4.3 の証明. 最初に (4.7) を証明する. $\bar{\xi} = \bar{\alpha}^i \bar{f}_i$ とおくと

$$\bar{\xi}_j = \bar{\alpha}^k{}_{,j}\bar{f}_k + \bar{\alpha}^i \bar{f}_{ij} = \left(\bar{\alpha}^k{}_{,j} + \bar{\alpha}^i \overline{\Gamma}_{ij}^k\right)\bar{f}_k - \bar{\alpha}^i \bar{h}_{ij}\bar{\nu}, \qquad \bar{\alpha}^k{}_{,j} := \frac{\partial \bar{\alpha}^k}{\partial u^j} \tag{4.9}$$

であるから

$$\left\langle \bar{\xi}_j, \bar{f}_l \right\rangle = \left(\bar{\alpha}^k{}_{,j} + \bar{\alpha}^i \overline{\Gamma}_{ij}^k\right)\bar{g}_{kl}, \qquad \left\langle \bar{\xi}_l, \nu \right\rangle = \bar{\alpha}^i \bar{h}_{il}$$

である. よって

$$\begin{aligned} -2\bar{g}^{ij}\bar{g}^{kl}\bar{h}_{ik}\left\langle \bar{\xi}_j, \bar{f}_l \right\rangle &= -2\bar{g}^{ij}\bar{g}^{kl}\bar{h}_{ik}\left(\bar{\alpha}^n{}_{,j} + \bar{\alpha}^m \overline{\Gamma}_{mj}^n\right)\bar{g}_{nl} \\ &= -2\bar{g}^{ij}\bar{h}_{ik}\left(\bar{\alpha}^n{}_{,j} + \bar{\alpha}^m \overline{\Gamma}_{mj}^n\right)\delta_n^k \\ &= -2\bar{g}^{ij}\bar{h}_{ik}\left(\bar{\alpha}^k{}_{,j} + \bar{\alpha}^l \overline{\Gamma}_{lj}^k\right), \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$-\bar{g}^{ij}\overline{\Gamma}_{ij}^l \left\langle \bar{\xi}_l, \bar{\nu} \right\rangle = -\bar{g}^{ij}\bar{h}_{kl}\bar{\alpha}^k \overline{\Gamma}_{ij}^l \tag{4.11}$$

を得る. また, (4.9) から

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{ij} &= \left\{\left(\bar{\alpha}^k{}_{,j} + \bar{\alpha}^l \overline{\Gamma}_{jl}^k\right)\bar{f}_k - \bar{\alpha}^k \bar{h}_{jk}\bar{\nu}\right\}_i \\ &= \left(\bar{\alpha}^k{}_{,j} + \bar{\alpha}^l \overline{\Gamma}_{jl}^k\right)_i \bar{f}_k + \left(\bar{\alpha}^k{}_{,j} + \bar{\alpha}^l \overline{\Gamma}_{jl}^k\right)\bar{f}_{ik} - \left(\bar{\alpha}^k \bar{h}_{jk}\right)_i \bar{\nu} - \bar{\alpha}^k \bar{h}_{jk}\bar{\nu}_i \end{aligned}$$

であるから

$$\langle \bar{\xi}_{ij}, \bar{\nu} \rangle = \left(\bar{\alpha}^k{}_{,j} + \bar{\alpha}^l \overline{\Gamma}^k_{jl} \right) \bar{h}_{ik} + \left(\bar{\alpha}^k \bar{h}_{jk} \right)_i = \bar{h}_{ik} \left(\bar{\alpha}^k{}_{,j} + \bar{\alpha}^l \overline{\Gamma}^k_{jl} \right) + \bar{\alpha}^k{}_{,i} \bar{h}_{jk} + \bar{\alpha}^k \bar{h}_{jk,i}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} \bar{g}^{ij} \langle \bar{\xi}_{ij}, \bar{\nu} \rangle &= \bar{g}^{ij} \bar{h}_{ik} \left(\bar{\alpha}^k{}_{,j} + \bar{\alpha}^l \overline{\Gamma}^k_{jl} \right) + \bar{g}^{ij} \bar{h}_{jk} \bar{\alpha}^k{}_{,i} + \bar{g}^{ij} \bar{h}_{jk,i} \bar{\alpha}^k \\ &= \bar{g}^{ij} \bar{h}_{ik} \left(\bar{\alpha}^k{}_{,j} + \bar{\alpha}^l \overline{\Gamma}^k_{jl} \right) + \bar{g}^{ij} \bar{h}_{ik} \bar{\alpha}^k{}_{,j} + \bar{g}^{ij} \bar{h}_{jk,i} \bar{\alpha}^k \end{aligned} \tag{4.12}$$

を得る．(4.10), (4.11), (4.12) により

$$\begin{aligned} ((4.7) \text{ の左辺}) &= -\bar{g}^{ij} \bar{h}_{ik} \bar{\alpha}^l \overline{\Gamma}^k_{jl} + \bar{g}^{ij} \bar{h}_{jk,i} \bar{\alpha}^k - \bar{g}^{ij} \bar{h}_{kl} \bar{\alpha}^k \overline{\Gamma}^l_{ij} \\ &= -\bar{g}^{ij} \bar{h}_{il} \bar{\alpha}^k \overline{\Gamma}^l_{jk} + \bar{\alpha}^k \bar{g}^{ij} \left(\bar{h}_{jk,i} - \bar{h}_{kl} \overline{\Gamma}^l_{ij} \right) \end{aligned} \tag{4.13}$$

となる．ここで Codazzi の方程式 (命題 2.21) により

$$\bar{h}_{jk,i} - \bar{h}_{kl} \overline{\Gamma}^l_{ij} = \bar{h}_{ij,k} - \bar{h}_{il} \overline{\Gamma}^l_{jk}$$

が成り立つので, (4.13) により

$$\begin{aligned} ((4.7) \text{ の左辺}) &= -\bar{g}^{ij} \bar{h}_{il} \bar{\alpha}^k \overline{\Gamma}^l_{jk} + \bar{\alpha}^k \bar{g}^{ij} \left(\bar{h}_{ij,k} - \bar{h}_{il} \overline{\Gamma}^l_{jk} \right) \\ &= \bar{\alpha}^k \left(\bar{g}^{ij} \bar{h}_{ij,k} - 2 \bar{g}^{ij} \bar{h}_{il} \overline{\Gamma}^l_{jk} \right) \\ &= \bar{\alpha}^k \left(\bar{g}^{ij} \bar{h}_{ij,k} + \bar{g}^{ij}{}_{,k} \bar{h}_{ij} - \bar{g}^{ij}{}_{,k} \bar{h}_{ij} - 2 \bar{g}^{ij} \bar{h}_{il} \overline{\Gamma}^l_{jk} \right) \\ &= \bar{\alpha}^k \left(n \overline{H}_k - \bar{g}^{ij}{}_{,k} \bar{h}_{ij} - 2 \bar{g}^{ij} \bar{h}_{il} \overline{\Gamma}^l_{jk} \right) \end{aligned}$$

従って (4.7) を証明するためには

$$-\bar{g}^{ij}{}_{,k} \bar{h}_{ij} = 2 \bar{g}^{ij} \bar{h}_{il} \overline{\Gamma}^l_{jk} \tag{4.14}$$

であることを示せばよい．命題 A.5 (4) により $\bar{g}^{ij}{}_{,k} = -\bar{g}^{il} \bar{g}_{lm,k} \bar{g}^{mj}$ であり,

$$\bar{g}_{lm,k} = \langle \bar{f}_l, \bar{f}_m \rangle_k = \langle \bar{f}_{kl}, \bar{f}_m \rangle + \langle \bar{f}_l, \bar{f}_{km} \rangle = \overline{\Gamma}^n_{kl} \bar{g}_{mn} + \overline{\Gamma}^n_{km} \bar{g}_{ln}$$

であるから

$$\begin{aligned} -\bar{g}^{ij}{}_{,k} \bar{h}_{ij} &= \bar{g}^{il} \bar{g}_{lm,k} \bar{g}^{mj} \bar{h}_{ij} \\ &= \bar{g}^{il} \left(\overline{\Gamma}^n_{kl} \bar{g}_{mn} + \overline{\Gamma}^n_{km} \bar{g}_{ln} \right) \bar{g}^{mj} \bar{h}_{ij} \\ &= \bar{g}^{il} \overline{\Gamma}^n_{kl} \delta^j_n \bar{h}_{ij} + \delta^i_n \overline{\Gamma}^n_{km} \bar{g}^{mj} \bar{h}_{ij} \\ &= \bar{g}^{il} \overline{\Gamma}^j_{kl} \bar{h}_{ij} + \overline{\Gamma}^i_{km} \bar{g}^{mj} \bar{h}_{ij} \\ &= \bar{g}^{ij} \overline{\Gamma}^l_{kj} \bar{h}_{il} + \overline{\Gamma}^l_{kj} \bar{g}^{ji} \bar{h}_{li} \\ &= 2 \bar{g}^{ij} \bar{h}_{il} \overline{\Gamma}^l_{jk} \end{aligned} \tag{4.15}$$

となり, (4.14) が成り立つ (上の変形で (4.15) の等号について補足すると, 第 1 項は添字の j と l を交換し, 第 2 項は添字の m を j に, j を i に, i を l にそれぞれ変更した). 以上により (4.7) が成り立つ.

次に (4.8) を証明する.

$$(\bar{\beta}\bar{\nu})_{ij} = \bar{\beta}_{ij}\bar{\nu} + \bar{\beta}_i\bar{\nu}_j + \bar{\beta}_j\bar{\nu}_i + \bar{\beta}\bar{\nu}_{ij}$$

であり, また $\bar{\nu}_i = -\bar{h}_{ik}\bar{g}^{kl}\bar{f}_l$ により

$$\bar{\nu}_{ij} = -\left(\bar{h}_{ik}\bar{g}^{kl}\right)_j \bar{f}_l - \bar{h}_{ik}\bar{g}^{kl}\bar{f}_{jl}$$

であるから,

$$\left\langle(\bar{\beta}\bar{\nu})_{ij}, \bar{\nu}\right\rangle = -\bar{\beta}_{ij} - \bar{\beta}\bar{h}_{ik}\bar{g}^{kl}\bar{h}_{jl}$$

よって

$$\text{(4.8) の左辺} = \bar{\beta}\bar{g}^{ij}\bar{g}^{kl}\bar{h}_{ik}\bar{h}_{jl} - \bar{g}^{ij}\bar{\beta}_{ij} + \bar{g}^{ij}\bar{\Gamma}^l_{ij}\bar{\beta}_l = \bar{\beta}\bar{s}^i_j\bar{s}^j_i - \triangle_{\bar{\mathrm{I}}}\bar{\beta} \tag{4.16}$$

を得る. ここで $\bar{s}^i_j\bar{s}^j_i = \mathrm{tr}(\bar{s}^2)$ であり, 問題 2.12 により $\bar{s}$ は対角化可能であるから,

$$\bar{s} = P^{-1}DP, \qquad \text{ただし} \quad P \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}), \quad D = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

($\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n \in \mathbb{R}$ は $\bar{s}$ の固有値) と対角化すると

$$\mathrm{tr}(\bar{s}^2) = \mathrm{tr}(P^{-1}D^2P) = \mathrm{tr}(D^2) = \sum_i \bar{\lambda}_i^2 = |\bar{\mathrm{II}}|^2$$

となる. よって (4.16) から (4.8) が成り立つ. □

従って

$$n\overline{H}_t = n\bar{\alpha}^i\overline{H}_i + \bar{\beta}|\bar{\mathrm{II}}|^2 - \triangle_{\bar{\mathrm{I}}}\bar{\beta}$$

であり, $t=0$ としたとき $H=0$ と仮定したから,

$$n\overline{H}_t|_{t=0} = \beta|\mathrm{II}|^2 - \triangle_{\mathrm{I}}\beta$$

となる. よって (4.1) から

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t) = \int_M \beta\left(\triangle_{\mathrm{I}}\beta - \beta|\mathrm{II}|^2\right)dV, \quad \text{ただし} \quad \beta = -\left\langle \left.\frac{\partial\bar{f}}{\partial t}\right|_{t=0}, \nu\right\rangle \tag{4.17}$$

を得る. (4.17) を空間的はめ込み f の体積の**第 2 変分公式**という. (4.17) から, f の体積の第 2 変分は変分ベクトル場の法成分のみに依存することがわかる.

変分ベクトル場 $\bar{f}_t|_{t=0}$ が f に沿う M の接ベクトル場となる変分 $\bar{f}$, すなわち $\bar{f}_t|_{t=0} = \alpha^i f_i + \beta\nu$ としたとき $\beta \equiv 0$ となる変分 $\bar{f}$ を f の**自明な変分**という. 第 1 および第 2 変分公式から, f の自明な変分に対しては

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t) = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t) = 0$$

が成り立つ. 従って f の体積の第 1 変分および第 2 変分を考えるときは, f の変分として

$$\bar{f} = f + t\beta\nu$$

(ただし β は M 上の関数で $\beta|_{\partial M} = 0$ かつある点では $\beta \neq 0$) を考えれば十分である.

注意 4.6. 特に $n = 2$ の場合は $|\mathrm{II}|^2 = 2(2H^2 + K) = 2K$ であるから, 第 2 変分公式は

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t) = \int_M \beta\,(\triangle_{\mathrm{I}}\beta - 2K\beta)\,dV$$

となる.

第 2 変分公式は (4.17) の他にもう 1 つよく使われる公式があるので, それについて述べる.

定義 4.7. (1) M 上の関数 φ に対して, f に沿う M 上のベクトル場 $\nabla_{\mathrm{I}}\,\varphi$ を

$$\nabla_{\mathrm{I}}\,\varphi := g^{ij}\varphi_j f_i$$

で定める. $\nabla_{\mathrm{I}}\,\varphi$ を φ の I に関する**勾配**という. $\nabla_{\mathrm{I}}\,\varphi$ を $\mathrm{grad}_{\mathrm{I}}\varphi$ と表すこともある.

(2) f に沿う M 上のベクトル場 $v = v^i f_i$ に対して, M 上の関数 $\mathrm{div}_{\mathrm{I}} v$ を

$$\mathrm{div}_{\mathrm{I}} v := \Gamma^i_{ij} v^j + v^j_{\ ,j}$$

で定める. $\mathrm{div}_{\mathrm{I}} v$ を v の I に関する**発散**という.

問題 4.8. (1) $\nabla_{\mathrm{I}}\,\varphi = 0$ ならば φ は定数関数であることを証明せよ.

(2) $\mathrm{div}_{\mathrm{I}} v$ について

$$\mathrm{div}_{\mathrm{I}} v = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\sqrt{\det g} \cdot v^i\right)_i$$

が成り立つことを証明せよ.

(3) M 上の関数 φ に対して $\triangle_{\mathrm{I}}\varphi = \mathrm{div}_{\mathrm{I}}\mathrm{grad}_{\mathrm{I}}\varphi$ が成り立つことを証明せよ.

定理 4.9. はめ込み f の体積の**第 2 変分公式**は,

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(t) = -\int_M \left(|\nabla_{\mathrm{I}}\,\beta|^2 + \beta^2|\mathrm{II}|^2\right) dV, \quad \text{ただし} \quad \beta = -\left\langle \left.\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}\right|_{t=0}, \nu \right\rangle \tag{4.18}$$

と表すこともできる.

証明. (4.17) により,

$$\int_M \beta\triangle_{\mathrm{I}}\beta dV = -\int_M |\nabla_{\mathrm{I}}\,\beta|^2 dV$$

を証明すればよい. 注意 4.4 (3) により

$$\begin{aligned}\int_M \beta\triangle_{\mathrm{I}}\beta dV &= \int_M \frac{\beta}{\sqrt{\det g}}\left(g^{ij}\beta_j\sqrt{\det g}\right)_i\sqrt{\det g}\,du^1\wedge\cdots\wedge du^n\\ &= \int_M \beta\left(g^{ij}\beta_j\sqrt{\det g}\right)_i du^1\wedge\cdots\wedge du^n\\ &= \int_M \left(\beta g^{ij}\beta_j\sqrt{\det g}\right)_i du^1\wedge\cdots\wedge du^n - \int_M \beta_i g^{ij}\beta_j dV\end{aligned}$$

であるが, この右辺の第 1 項は β が ∂M 上で消えていることから Stokes の定理により

$$\int_M \left(\beta g^{ij}\beta_j\sqrt{\det g}\right)_i du^1\wedge\cdots\wedge du^n = \frac{1}{n}\sum_i(-1)^{i-1}\int_{\partial M}\beta g^{ij}\beta_j\sqrt{\det g}\,d\check{u}^i = 0$$

であり, また

$$|\nabla_{\mathrm{I}}\beta|^2 = \langle\nabla_{\mathrm{I}}\beta,\nabla_{\mathrm{I}}\beta\rangle = \left\langle g^{ij}\beta_j f_i, g^{kl}\beta_l f_k\right\rangle = g^{ij}g^{kl}\beta_j\beta_l g_{ij} = g^{ij}\beta_i\beta_j$$

により第 2 項は

$$-\int_M \beta_i g^{ij}\beta_j dV = -\int_M |\nabla_{\mathrm{I}}\beta|^2 dV$$

となるので結論を得る. □

(4.18) により, f の変分 $\bar{f}$ に関する第 2 変分が 0 ならば $|\nabla_{\mathrm{I}}\beta|^2+\beta^2|\mathrm{I\!I}|^2\equiv 0$ であるから $|\nabla_{\mathrm{I}}\beta|\equiv 0$ が成り立つ. このとき問題 4.8 (1) により β は定数であるが, β は ∂M 上 0 であるから $\beta\equiv 0$, すなわち $\bar{f}$ は自明な変分である. 従って非自明な変分に対して

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0}\mathrm{Vol}_f(t) < 0$$

が成り立つことが分かる.

従って次の系を得る.

系 4.10. $H\equiv 0$ を満たす空間的 (超) 曲面は体積極大である.

このことから $H\equiv 0$ を満たす空間的はめ込みを**極大 (超) 曲面**という.

注意 4.11. 特に $H\equiv 0$ を満たす空間的グラフ (超) 曲面は体積最大である. このことは次節で証明する.

極大超曲面の特徴付けをもう 1 つ与える.

命題 4.12. M を n 次元多様体, $f: M\to\mathbb{L}^{n+1}$ を空間的はめ込みとする. ν を f に沿う M 上の単位法ベクトル場, H を f の平均曲率とする. $\triangle_{\mathrm{I}}$ を f の第 1 基本形式に関する Laplace 作用素とする. このとき,

$$\triangle_{\mathrm{I}} f = -nH\nu$$

が成り立つ. 特に f が極大超曲面ならば, $\triangle_{\mathrm{I}} f = 0$ が成り立つ.

問題 4.13. 命題 4.12 を証明せよ.

この命題と楕円型偏微分作用素の一般論から, 極大超曲面は実解析的であることが分かる. 第 7 節で $n=2$ の場合に極大曲面実解析的であることを楕円型偏微分作用素の一般論を用いず証明する. 定理 7.1 (37 ページ) を参照のこと.

特に $n=2$ のとき, ${}^t(x,y)$ が M の f に関する**等温座標系** (すなわち, $g_{11}=g_{22}$, $g_{12}=g_{21}=0$ を満たす座標系) ならば, 注意 4.4 の (3) により

$$\triangle_{\mathrm{I}} f = \frac{1}{g_{11}}\left(f_{xx}+f_{yy}\right)$$

であるから, 次の系を得る.

系 4.14. M を $\mathbb{R}^2$ の領域, $f: M \to \mathbb{L}^3$ を空間的はめ込みとする. ${}^t(x,y)$ を M の f に関する等温座標系とする. このとき, f が極大曲面であることと, f の各成分が調和関数であることとは同値である.

補足

ここまでの議論で得られたのは次のことである:

> M を $\overline{M}$ がコンパクトである $\mathbb{R}^n$ の領域とし, $f: M \to \mathbb{L}^{n+1}$ を空間的はめ込みとする. このとき, $f(\partial M)$ を境界にもつ空間的 (超) 曲面の中で $f(M)$ が体積極大であるならば, f の平均曲率は恒等的に 0 である. また, この逆も成り立つ.

極小曲面の Plateau 問題については本講義では言及しないが, 歴史的な背景を少しだけ述べておく. $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面に関する Plateau 問題については, 1930 年頃に J. Douglas と T. Radó によって独立に解決された:

定理 4.15. $\mathbb{R}^3$ 内の任意の (区分的に滑らかかつ長さが有限の) 単純閉曲線 Γ に対して, Γ を境界とする面積最小曲面が存在する.

Douglas の方法は $\mathbb{R}^n$ の極小曲面にも適用することができる (超曲面ではない). Douglas はこの業績により, 第 1 回の Fields 賞を受賞した. R. Courant は 1930 年代, Douglas の方法を改良し, また有限個の (長さが有限の) 単純閉曲線の和集合を境界とする場合にも解が存在することを証明した. 現在もっとも良く知られている Platear 問題の証明法は, この Courant によるものと思われる.

Douglas, Rodó, Courant によって得られた面積最小曲面は, 特異点 (すなわち, はめ込みでない点) をもつ可能性を否定できなかったが, この面積最小曲面が特異点をもたないことについては 1970 年の R. Osserman の結果を経て, 1973 年に R. D. Gulliver により完全に証明された.

Plateau 問題の解の一意性は一般には成り立たない. 非可算無限個の解をもつこともある (一意性や有限性が成り立つための条件に関する研究はいろいろある).

Plateau 問題についての詳細は, 例えば [L] の第 2 章を参照のこと.

極小超曲面や一般の極小部分多様体の Plateau 問題については, W. H. Fleming, F. J. Almgren, J. Simons, H. Federer 等による幾何学的測度論を用いた研究がある:

定理 4.16. Γ を境界のない $\mathbb{R}^{n+p}$ 上の $(n-1)$ 次元修正可能カレントとする. このとき $\partial M = \Gamma$ を満たす n 次元体積最小修正可能カレント M が存在する. 特に $p = 1$ かつ $n \leq 6$ のとき, $\mathrm{supp}(M) - \mathrm{supp}(\partial M)$ は埋め込まれた解析的多様体である.

詳細は幾何学的測度論 (geometric measure theory) の教科書を参照のこと.

5 グラフ超曲面, 極大超曲面の方程式

本節では空間的グラフ (超) 曲面が極大 (超) 曲面となるための方程式を導く. M を $\mathbb{R}^n$ の領域, φ を M 上の関数とする.

$$f : M \ni {}^t(u^1, \dots, u^n) \mapsto {}^t\big(u^1, \dots, u^n, \varphi(u^1, \dots, u^n)\big) \in \mathbb{L}^{n+1}$$

で与えられる空間的はめ込み f を φ による**空間的 (超) 曲面のグラフ表示**, または関数 φ で表される**空間的グラフ (超) 曲面**という.

定義 5.1. (1) $M \subset \mathbb{R}^n$ 上の関数 φ に対して, M 上のベクトル場 $\nabla\varphi$ を

$$\nabla\varphi := {}^t(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

で定める. $\nabla\varphi$ を φ の**勾配**という. $\nabla\varphi$ を $\mathrm{grad}\varphi$ と表すこともある.

(2) $M \subset \mathbb{R}^n$ 上のベクトル場 $v = {}^t(v^1, \dots, v^n)$ に対して, M 上の関数 $\mathrm{div}v$ を

$$\mathrm{div}v := {v^i}_{,i}$$

で定める. $\mathrm{div}v$ を v の**発散**という.

(3) $M \subset \mathbb{R}^n$ 上の関数 φ に対して, M 上の関数 $\triangle v$ を

$$\triangle\varphi := \sum_i \varphi_{ii}$$

で定める. $\triangle\varphi$ を φ の **Laplace 作用素**という.

これらの定義は, 前節で定義した ∇_{I}, $\mathrm{div}_{\mathrm{I}}$, $\triangle_{\mathrm{I}}$ において $g_{ij} = \delta_{ij}$ とすると得られる.

関数 φ で表される空間的グラフ (超) 曲面の平均曲率 (の n 倍) を計算する. まず

$$f_i = {}^t\big(0, \dots, 0, \overset{i}{\check{1}}, 0, \dots, 0, \varphi_i\big)$$

であるから

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \varphi_i\varphi_j \tag{5.1}$$

である．また, $\tilde{\nu} = {}^t(\varphi_1, \dots, \varphi_n, 1)$ とすると

$$\langle \tilde{\nu}, f_i \rangle = \varphi_i - \varphi_i = 0 \qquad (1 \le i \le n)$$

であるから $\tilde{\nu}$ は f のすべての接ベクトルとの内積が 0 である．よって命題 1.6 により $\tilde{\nu}$ は時間的ベクトルである．従って

$$\langle \tilde{\nu}, \tilde{\nu} \rangle = |\nabla\varphi|^2 - 1 < 0$$

が成り立つ．ただし $|\nabla\varphi|^2 = \varphi_1^2 + \cdots + \varphi_n^2$ である．

問題 5.2. g_{ij} が (5.1) で与えられたとき,

$$g^{ij} = \delta^{ij} + \frac{\varphi_i\varphi_j}{1 - |\nabla\varphi|^2}$$

となることを証明せよ．

また, この (超) 曲面の単位法ベクトル場 ν は

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla\varphi|^2}}\,{}^t(\varphi_1, \dots, \varphi_n, 1)$$

で与えられる．さらに $f_{ij} = {}^t(0, \dots, 0, \varphi_{ij})$ であるから

$$h_{ij} = \frac{-\varphi_{ij}}{\sqrt{1 - |\nabla\varphi|^2}}$$

となる．従って平均曲率 (の n 倍) は

$$\begin{aligned}
nH &= g^{ij}h_{ij} \\
&= \sum_{i,j}\left(\delta^{ij} + \frac{\varphi_i\varphi_j}{1 - |\nabla\varphi|^2}\right)\frac{-\varphi_{ij}}{\sqrt{1 - |\nabla\varphi|^2}} \\
&= \frac{-1}{(1 - |\nabla\varphi|^2)^{3/2}}\left((1 - |\nabla\varphi|^2)\delta^{ij}\varphi_{ij} + \sum_{i,j}\varphi_i\varphi_j\varphi_{ij}\right) \\
&= \frac{-1}{(1 - |\nabla\varphi|^2)^{3/2}}\left((1 - |\nabla\varphi|^2)\sum_i\varphi_{ii} + \sum_{i,j}\varphi_i\varphi_j\varphi_{ij}\right) \qquad (5.2) \\
&= -\sum_i\left(\frac{\varphi_i}{\sqrt{1 - |\nabla\varphi|^2}}\right)_i \qquad (5.3) \\
&= -\mathrm{div}\left(\frac{\varphi_1}{\sqrt{1 - |\nabla\varphi|^2}}, \dots, \frac{\varphi_n}{\sqrt{1 - |\nabla\varphi|^2}}\right) \\
&= -\mathrm{div}\frac{\nabla\varphi}{\sqrt{1 - |\nabla\varphi|^2}}
\end{aligned}$$

と表される. よって関数 φ で表される空間的グラフ (超) 曲面が極大 (超) 曲面であるための必要十分条件は

$$(1-|\nabla\varphi|^2)\sum_i \varphi_{ii} + \sum_{i,j}\varphi_i\varphi_j\varphi_{ij} = 0 \qquad \bigl(1-|\nabla\varphi|^2>0\bigr) \tag{5.4}$$

またはこれと同値な

$$\mathrm{div}\frac{\nabla\varphi}{\sqrt{1-|\nabla\varphi|^2}} = 0 \qquad \bigl(1-|\nabla\varphi|^2>0\bigr) \tag{5.5}$$

が成り立つことである. (5.4) を**極大 (超) 曲面の方程式**, (5.5) をその発散形という.

$n=2$ のとき, (5.4) や (5.5) は

$$\bigl(1-\varphi_y^2\bigr)\varphi_{xx} + 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \bigl(1-\varphi_x^2\bigr)\varphi_{yy} = 0 \qquad \bigl(1-\varphi_x^2-\varphi_y^2>0\bigr) \tag{5.6}$$

や

$$\left(\frac{\varphi_x}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}\right)_x + \left(\frac{\varphi_y}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}\right)_y = 0 \qquad \bigl(1-\varphi_x^2-\varphi_y^2>0\bigr) \tag{5.7}$$

と同値であることが (5.2) や (5.3) から分かる. ただし $(u^1,u^2)=(x,y)$ とおいた. (5.6) は 2 階準線形楕円型偏微分方程式で, **極大曲面の方程式**と呼ばれている.

前節で述べたように, グラフ極大 (超) 曲面は体積極大なだけでなく, 体積最大である.

定理 5.3. M を $\overline{M}$ がコンパクトである $\mathbb{R}^n$ の領域とし, φ を M 上の関数で (5.5) を満たすとする. $f:M\to\mathbb{L}^{n+1}$ を φ のグラフ超曲面とする. M' を $\overline{M}'$ がコンパクトである n 次元多様体とし, $f':M'\to\mathbb{L}^{n+1}$ を空間的はめ込みで $f(\partial M)=f'(\partial M')$ を満たすとする. このとき $\mathrm{Vol}_f\ge\mathrm{Vol}_{f'}$ が成り立つ.

証明. $f(M)$ がグラフであり, かつ $f(\partial M)=f'(\partial M')$ であるから $f'(M')$ もグラフである.*1 よって M' が 1 つの座標系で覆われているとしてよい. M, M', $\mathbb{L}^{n+1}$ の座標系をそれぞれ ${}^t(u^1,\dots,u^n)$, ${}^t(v^1,\dots,v^n)$, ${}^t(x^1,\dots,x^{n+1})$ とする.

$$\nu = {}^t\bigl(\nu^1,\dots,\nu^{n+1}\bigr) := \frac{1}{\sqrt{1-|\nabla\varphi|^2}}\,{}^t(\varphi_1,\dots,\varphi_n,1)$$

を f に沿う M 上の単位法ベクトル場, ν' を f' に沿う M' 上の単位法ベクトル場で

$$\det(f'_1,\dots,f'_n,\nu')>0, \qquad f'_i := \frac{\partial f'}{\partial v^i}$$

を満たすものとする. 必要なら M' の座標系を ${}^t(v^2,v^1,\dots,v^n)$ などとすることで ν' は未来的であるとしてよい. dV, dV' をそれぞれ f, f' の体積要素とする. $\varphi:M\to\mathbb{R}$ を $\varphi(x^1,\dots,x^{n+1}):=$

*1 要証明.

$\varphi(x^1, \ldots, x^n)$ によって $M \times \mathbb{R}$ 上の関数に拡張し, $f_1, \ldots, f_n$, ν もそれぞれ $M \times \mathbb{R}$ 上のベクトル場に拡張する. $M \times \mathbb{R}$ 上の n 次微分形式 $\omega \in \Lambda^n(M \times \mathbb{R})$ を

$$\omega := \sum_{\alpha=1}^{n+1} (-1)^{\alpha-1} \nu^\alpha d\check{x}^\alpha, \qquad d\check{x}^\alpha := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha-1} \wedge dx^{\alpha+1} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$$

で定めると, φ が (5.5) を満たすことから

$$d\omega = 0 \tag{5.8}$$

が成り立つ. よって, $f(M)$ と $f'(M')$ で囲まれる $M \times \mathbb{R}$ 上の領域を Ω として, $\partial\Omega$ の向きが $f(M)$, $-f'(M')$ の向きと一致するように Ω に向きを入れると, Stokes の定理により

$$0 = \int_\Omega d\omega = \int_{f(M)} \omega - \int_{f'(M')} \omega \tag{5.9}$$

が成り立つ. また, 問題 3.4 (3) から

$$f^*\omega = dV \tag{5.10}$$

が成り立つ. さらに, 問題 3.4 (2) から $(f')^*\omega = \det(f'_1, \ldots, f'_n, \nu) dv^1 \wedge \cdots \wedge dv^n$ であり,

$$\det(f'_1, \ldots, f'_n, \nu) dv^1 \wedge \cdots \wedge dv^n \geq \det(f'_1, \ldots, f'_n, \nu') dv^1 \wedge \cdots \wedge dv^n = dV' \tag{5.11}$$

であるから

$$(f')^*\omega \geq dV' \tag{5.12}$$

が成り立つ. 等号は $\nu = \nu'$ のときに限り成立する.

従って (5.9), (5.10), (5.12) から

$$\mathrm{Vol}_f = \int_M dV = \int_M f^*\omega = \int_{f(M)} \omega = \int_{f'(M')} \omega = \int_{M'} (f')^*\omega \geq \int_{M'} dV' = \mathrm{Vol}_{f'}$$

であり, 境界条件 $f(\partial M) = f'(\partial M')$ と (5.12) の等号条件から等号は $f(M) = f'(M')$ のときに限り成立する. □

問題 5.4. (5.8), (5.10) が成り立つことを証明せよ.

問題 5.5. 不等式 (5.11) が成り立つことを証明せよ. また, 等号が成り立つことと $\nu = \nu'$ が同値であることも証明せよ (ヒント: $\nu = \alpha^i f'_i + \beta\nu'$ とおくと, $\det(f'_1, \ldots, f'_n, \nu) = \beta \det(f'_1, \ldots, f'_n, \nu')$, $\beta = -\langle \nu, \nu' \rangle$ となる. ν, ν' は共に未来的であるから $\beta > 0$ である. 後は $\langle \nu, \nu' \rangle$ に命題 1.8 を適用する).

6 Bernstein 問題

次の問題を (一般化された) **Bernstein 問題**という.

> **問題.** $\mathbb{R}^n$ 全体で定義された関数 φ で表されるグラフ極小超曲面は超平面に限るか.

この問題は, $n=2$ のとき S. Bernstein (1915), $n=3$ のとき E. de Giorgi (1961), $n=4$ のとき F. J. Almgren (1966), $n \leq 7$ のとき J. Simons (1968) によってそれぞれ肯定的に解決され, $n \geq 8$ のとき E. Bombieri, E. de Giorgi, E. Giusti (1969) によって否定的に解決されている ($n \leq 5$ の場合は R. Schoen, L. Simon, S.-T. Yau (1974) による別証明がある). 一般化された Bernstein の問題については [G] を参照のこと.

グラフ極大超曲面に対して同様の問題を考える. 前節で与えた極大超曲面の方程式により, この問題は次の問題と同値である.

> **問題.** $\mathbb{R}^n$ 全体で定義された関数 φ が (5.4) (あるいは (5.5)) を満たすならば, φ は高々 1 次式か.

この問題は $n \leq 4$ のとき E. Calabi (1968) によって肯定的に解決され, さらに任意の n に対して S.-Y. Cheng, S.-T.Yau (1976) によって肯定的に解決された. さらに S.-Y. Cheng, S.-T.Yau (1976) は完備な極大超曲面は超平面に限ることも証明している.

本節では $n=2$ の場合, すなわち $\mathbb{L}^3$ の極大曲面の場合に Bernstein 問題を考える.

定理 6.1. $\mathbb{R}^2$ 全体で定義された関数 φ で表されるグラフ極大曲面は平面に限る.

証明は本節 (36 ページ) で与える. 定理 6.1 を証明するために, 次の補題を用意する.

補題 6.2. w を $\mathbb{R}^2$ 全体で定義された C^2 級関数で,

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = 1 \quad {}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{6.1}$$

を満たすとする. このとき $w(x,y)$ は高々 2 次式である.

(6.1) を **Monge-Ampère 方程式**という.

補題 6.2 の証明. 必要ならば w の代わりに $-w$ を考えればよいので, $w_{xx} > 0$ と仮定する. このとき (6.1) から $w_{yy} > 0$ も成り立つ. 写像

$$\psi : \mathbb{R}^2 \ni {}^t(x,y) \mapsto \psi(x,y) = {}^t\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big) \in \mathbb{R}^2 \tag{6.2}$$

を

$$\xi(x,y) := x + w_x(x,y), \qquad \eta(x,y) := y + w_y(x,y) \tag{6.3}$$

で定める.

第 1 段. ψ が $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級微分同相写像であることを示す.

$$J_\psi = \det \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} 1+w_{xx} & w_{xy} \\ w_{yx} & 1+w_{yy} \end{pmatrix} = 2 + w_{xx} + w_{yy} \geq 2$$

であるから, 逆写像の定理により ψ は局所的には微分同相である. よって ψ が $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への全単射であることを示せばよい. 最初に単射であることを示す. $\mathbb{R}^2$ の異なる 2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) をとる.

$$x(t) := x_1 + t(x_2 - x_1), \qquad y(t) := y_1 + t(y_2 - y_1) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
&(x_2 - x_1)\big(w_x(x_2,y_2) - w_x(x_1,y_1)\big) + (y_2 - y_1)\big(w_y(x_2,y_2) - w_y(x_1,y_1)\big) \\
&\quad = (x_2 - x_1)\int_0^1 \frac{d}{dt} w_x(x(t),y(t))dt + (y_2 - y_1)\int_0^1 \frac{d}{dt} w_y(x(t),y(t))dt \\
&\quad = (x_2 - x_1)\int_0^1 \left(w_{xx}\frac{dx}{dt} + w_{xy}\frac{dy}{dt} \right) dt + (y_2 - y_1)\int_0^1 \left(w_{yx}\frac{dx}{dt} + w_{yy}\frac{dy}{dt} \right) dt \\
&\quad = \int_0^1 \big((x_2 - x_1)^2 w_{xx} + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) w_{xy} + (y_2 - y_1)^2 w_{yy} \big) dt \\
&\quad = \int_0^1 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{xy} & w_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} dt \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

であり, 今

$$\begin{pmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{xy} & w_{yy} \end{pmatrix}$$

は仮定から正定値対称行列だから, (6.4) の被積分関数は非負である. よって

$$(x_2 - x_1)\big(w_x(x_2,y_2) - w_x(x_1,y_1)\big) + (y_2 - y_1)\big(w_y(x_2,y_2) - w_y(x_1,y_1)\big) \geq 0 \qquad (6.5)$$

が成り立つ. 故に $\xi_i = \xi(x_i, y_i)$, $\eta_i = \eta(x_i, y_i)$, $w_{x,i} = w_x(x_i, y_i)$, $w_{y,i} = w_y(x_i, y_i)$ とおくと,

$$\xi_2 - \xi_1 = (x_2 - x_1) + (w_{x,2} - w_{x,1}), \qquad \eta_2 - \eta_1 = (y_2 - y_1) + (w_{y,2} - w_{y,1})$$

であるから, (6.5) により

$$\begin{aligned}
&(x_2 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) + (y_2 - y_1)(\eta_2 - \eta_1) \\
&\quad = (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)(w_{x,2} - w_{x,1}) + (y_2 - y_1)^2 + (y_2 - y_1)(w_{y,2} - w_{y,1}) \\
&\quad \geq (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって

$$(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 > 0 \qquad (6.6)$$

が成り立つ. 従って ψ は単射である. 次に ψ が全射であることを示す. ψ は連続写像であるから $\psi(\mathbb{R}^2)$ は連結である. よって $\psi(\mathbb{R}^2)$ が開かつ閉集合であることを言えばよい. これは (6.6) と ψ

が連続であることを使えば簡単だから演習問題とする (問題 6.3 (1)) 以上により, $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は C^1 級微分同相写像である. よって逆写像

$$\psi^{-1}:\mathbb{R}^2\ni {}^t(\xi,\eta)\mapsto {}^t\big(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\big)\in\mathbb{R}^2$$

が定義でき, これは C^1 級である.

第 2 段. $h:\mathbb{R}^2\ni {}^t(\xi,\eta)\mapsto {}^t\big(h^1(\xi,\eta),h^2(\xi,\eta)\big)\in\mathbb{R}^2$ を

$$h^1(\xi,\eta):=x(\xi,\eta)-w_x\big(x(\xi,\eta),x(\xi,\eta)\big),\quad h^2(\xi,\eta):=-y(\xi,\eta)+w_y\big(x(\xi,\eta),x(\xi,\eta)\big)$$

で定める. (6.1) に注意すると

$$\begin{aligned}
J_h=\frac{\partial(h^1,h^2)}{\partial(\xi,\eta)}&=\frac{\partial(h^1,h^2)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=\frac{\partial(h^1,h^2)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}1-w_{xx} & -w_{xy}\\ w_{yx} & -1+w_{yy}\end{pmatrix}\frac{1}{2+w_{xx}+w_{yy}}\begin{pmatrix}1+w_{yy} & -w_{xy}\\ -w_{yx} & 1+w_{xx}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2+w_{xx}+w_{yy}}\begin{pmatrix}-w_{xx}+w_{yy} & -2w_{xy}\\ 2w_{xy} & -w_{xx}+w_{yy}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h^1}{\partial\xi}&=\frac{\partial h^2}{\partial\eta}=\frac{-w_{xx}+w_{yy}}{2+w_{xx}+w_{yy}},\\
\frac{\partial h^2}{\partial\xi}&=-\frac{\partial h^1}{\partial\eta}=\frac{2w_{xy}}{2+w_{xx}+w_{yy}},
\end{aligned}$$

が成り立つ. すなわち $h^1(\xi,\eta)$, $h^2(\xi,\eta)$ は Cauchy-Riemann の関係式を満たす. よって $\zeta:=\xi+\boldsymbol{i}\eta$ とおいて $h(\zeta)=h^1(\zeta)+\boldsymbol{i}h^2(\zeta)$ によって h を $\mathbb{C}$ 上の複素数値関数とみなすと, h は ζ に関して正則な関数である. ただし $\boldsymbol{i}:=\sqrt{-1}$ とする.

$$h'(\zeta):=\frac{dh}{d\zeta}=\frac{\partial h^1}{\partial\xi}+\boldsymbol{i}\frac{\partial h^2}{\partial\xi}=\frac{-w_{xx}+w_{yy}+2\boldsymbol{i}w_{xy}}{2+w_{xx}+w_{yy}}\tag{6.7}$$

であるから, 再び (6.1) (と $w_{xx}>0$, $w_{yy}>0$) に注意すると

$$|h'(\zeta)|^2=\frac{(-w_{xx}+w_{yy})^2+(2w_{xy})^2}{(2+w_{xx}+w_{yy})^2}=\frac{(w_{xx}+w_{yy})^2-4}{(2+w_{xx}+w_{yy})^2}=\frac{w_{xx}+w_{yy}-2}{w_{xx}+w_{yy}+2}<1\tag{6.8}$$

を得る. 従って $h'(\zeta)$ は全平面 $\mathbb{C}$ で定義された有界な正則関数であるから, Liouville の定理により $h'(\zeta)$ は定数となる. (6.7) の実部と (6.8) から w_{xx} と w_{yy} を求め, それを (6.1) に代入して w_{xy} を求めると

$$w_{xx}=\frac{|1-h'|^2}{1-|h'|^2},\qquad w_{yy}=\frac{|1+h'|^2}{1-|h'|^2},\qquad w_{xy}^2=\left(\frac{2\,\mathrm{Im}\,h'}{1-|h'|^2}\right)^2\tag{6.9}$$

となり, これらは全て定数である. 従って $w(x,y)$ は高々 2 次の多項式である. □

この証明は長いので要点をまとめると, 次のようになる. ψ によって座標系を (x,y) から (ξ,η) に取り替えて, $h=h^1+\boldsymbol{i}h^2$ を $\zeta=\xi+\boldsymbol{i}\eta$ の関数とみて第 2 段の 2 行目の式で定めると, h は正則関数で h' は有界となる. このことから Liouville の定理によって h' は定数となり, ここから w_{xx}, w_{xy}, w_{yy} が全て定数となることが導かれる.

問題 6.3. 補題 6.2 の証明中, 次を証明せよ.

(1) ψ が全射であることを証明せよ.
(2) (6.9) が成り立つことを証明せよ.

定理 6.1 の証明. この定理を示すには, $\mathbb{R}^2$ 全体で定義された関数 $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が極大曲面の方程式 (5.6) (あるいは (5.7)) を満たすとき, φ_x, φ_y が定数であることを示せばよい. φ が極大曲面の方程式を満たすとき,

$$\left(\frac{1-\varphi_y^2}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}\right)_x=\left(\frac{-\varphi_x\varphi_y}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}\right)_y, \tag{6.10}$$

$$\left(\frac{-\varphi_x\varphi_y}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}\right)_x=\left(\frac{1-\varphi_x^2}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}\right)_y \tag{6.11}$$

が成り立つ. 実際, (5.7), を用いると

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-\varphi_y^2}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}\right)_x &= \left(\frac{(1-\varphi_x^2-\varphi_y^2)+\varphi_x^2}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}\right)_x \\
&= \left(\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}\right)_x+\left(\frac{\varphi_x^2}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}\right)_x \\
&= \left(\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}\right)_x+\left(\varphi_x\frac{\varphi_x}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}\right)_x \\
&= \left(\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}\right)_x+\varphi_{xx}\frac{\varphi_x}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}+\varphi_x\left(\frac{\varphi_x}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}\right)_x \\
&= \left(\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}\right)_x+\varphi_{xx}\frac{\varphi_x}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}-\varphi_x\left(\frac{\varphi_y}{\sqrt{1-\varphi_y^2-\varphi_y^2}}\right)_y \\
&= \left(\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}\right)_x+\varphi_{xx}\frac{\varphi_x}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}} \\
&\qquad -\left(\varphi_x\frac{\varphi_y}{\sqrt{1-\varphi_y^2-\varphi_y^2}}\right)_y+\varphi_{xy}\frac{\varphi_y}{\sqrt{1-\varphi_y^2-\varphi_y^2}}
\end{aligned} \tag{6.12}$$

であり,

$$\left(\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}\right)_x = \frac{-\varphi_x\varphi_{xx}-\varphi_y\varphi_{yx}}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}$$

であるから

$$(6.12) = \left(\frac{-\varphi_x\varphi_y}{\sqrt{1-\varphi_y^2-\varphi_y^2}}\right)_y$$

となって (6.10) が成り立つ. 同様に (6.11) も成り立つ.

(6.10), (6.11) から, $\mathbb{R}^2$ 全体で定義されたある C^1 級関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ が存在して

$$u_x = \frac{-\varphi_x\varphi_y}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}, \qquad u_y = \frac{1-\varphi_y^2}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}} \tag{6.13}$$

$$v_x = \frac{1-\varphi_x^2}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}, \qquad v_y = \frac{-\varphi_x\varphi_y}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}} \tag{6.14}$$

を満たす. さらに, (6.13) の左の式と (6.14) の右の式から, $\mathbb{R}^2$ 全体で定義されたある C^2 級関数 $w(x,y)$ が存在して

$$w_x = v, \qquad w_y = u$$

を満たす.

$$w_{xx} = \frac{1-\varphi_x^2}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}, \qquad w_{xy} = \frac{-\varphi_x\varphi_y}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}, \qquad w_{yy} = \frac{1-\varphi_y^2}{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}} \tag{6.15}$$

であるから, この $w(x,y)$ は Monge-Ampère の方程式 (6.1) を満たす. よって補題 6.2 により w_{xx}, w_{xy}, w_{yy} は全て定数となる. 従って (6.15) から φ_x, φ_y も定数となる. $\square$

問題 6.4. w_{xx}, w_{xy}, w_{yy} が定数で (6.15) を満たすとき, φ_x, φ_y が定数であることを証明せよ.

7 等温座標系

本節以降, $n=2$ とする. 空間的はめ込み f は 2 次元多様体 (あるいは $\mathbb{R}^2$ の領域) M から $\mathbb{L}^3$ への写像である. M の局所座標系を ${}^t(x,y)$, $\mathbb{L}^3$ の座標系を (添字を下にして) ${}^t(x_1,x_2,x_3)$ で表す.

定理 7.1. C^2 級関数 φ が極大曲面の方程式を満たすならば, φ は実解析的関数である.

この定理を証明するために, 次の命題を用意する.

定理 7.1 の証明. M を $\mathbb{R}^2$ の単連結領域とし, C^2 級関数

$$\varphi : M \ni {}^t(x,y) \mapsto \varphi(x,y) \in \mathbb{R}$$

が極大曲面の方程式 (5.6) を満たすとする．このとき, 定理 6.1 の証明から, ある (C^3 級) 関数 $w: M \to \mathbb{R}$ が存在して (6.15) を満たす．この w を用いて,

$$\psi: M \ni {}^t(x,y) \mapsto {}^t(\xi,\eta) \in M' \subset \mathbb{R}^2, \qquad M' := \psi(M)$$

を (6.2), (6.3) で定めると, ψ は M から M' への C^2 級微分同相写像である．従って $\psi^{-1}: M' \to M$ は, φ で表されるグラフ極大曲面

$$f: M \ni {}^t(x,y) \mapsto {}^t(x,y,\varphi(x,y)) \in \mathbb{L}^3$$

の座標変換である．

$$f' := f \circ \psi^{-1}: M' \ni {}^t(\xi,\eta) \mapsto {}^t\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta), (\varphi\circ\psi^{-1})(\xi,\eta)\big) \in \mathbb{L}^3$$

の第一基本行列を

$$g' := \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \left\langle f'_\xi, f'_\xi \right\rangle & \left\langle f'_\xi, f'_\eta \right\rangle \\ \left\langle f'_\eta, f'_\xi \right\rangle & \left\langle f'_\eta, f'_\eta \right\rangle \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$g'_{11} = g'_{22} = \left(\frac{\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}}{1+\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}} \right)^2, \qquad g'_{12} = g'_{21} = 0 \tag{7.1}$$

となる (問題 7.2 (1) 参照) から, (ξ,η) は M' の f' に関する等温座標系である．よって系 4.14 により f' の各成分は調和関数である．すなわち,

$$x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} = 0, \qquad y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} = 0, \qquad (\varphi\circ\psi^{-1})_{\xi\xi} + (\varphi\circ\psi^{-1})_{\eta\eta} = 0$$

が成り立つ．よって $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$, $(\varphi\circ\psi^{-1})(\xi,\eta)$ はいずれも実解析的関数である (問題 7.2 (2) 参照)．さらに, $\psi^{-1}(\xi,\eta) = {}^t\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)$ であるから $\psi^{-1}: M' \to M$ は実解析的写像であり, ψ が微分同相写像であることから $\psi: M \to M'$ も実解析的写像となる (問題 7.2 (3) 参照)．φ は実解析的写像 ψ と実解析的関数 $\varphi\circ\psi^{-1}$ の合成, すなわち

$$\varphi = \big(\varphi\circ\psi^{-1}\big)\circ\psi$$

であるから φ は実解析的関数である (問題 7.2 (4) 参照)． □

問題 7.2. 定理 7.1 の証明中, 次の (1)–(4) を証明せよ．

(1) (7.1) が成り立つことを証明せよ．
(2) $x: M' \to \mathbb{R}$ が調和関数ならば, x は実解析的関数であることを証明せよ．
(3) $\psi^{-1}: M \to M'$ が実解析的な微分同相写像ならば, ψ も実解析的写像であることを証明せよ．
(4) 2 つの実解析的関数の合成関数は実解析的であることを証明せよ．

ヒント. (1): f'_ξ, f'_η はそれぞれ

$$\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x,y)}\left(\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$$

の第 1 列, 第 2 列であるから, これらの内積を計算すればよい.
(2): x が $x_{\xi\xi}+x_{\eta\eta}=0$ を満たすとする. このとき $x':M'\to\mathbb{R}$ を $x'_\xi=-x_\eta$, $x'_\eta=x_\xi$ を満たすようにとる (このような x' が存在することは $(x'_\xi)_\eta=-x_{\eta\eta}=-x_{\xi\xi}=(x'_\eta)_\xi$ から分かる) と $x+\boldsymbol{i}x'$ は正則関数となるから, x は実解析的となる.
(3), (4): n 変数の実解析的関数は, その n 個の変数を実数から複素数に拡張すると (複素) n 変数の正則関数になる. このことを利用すればよい. 複素数に拡張しないで証明する方法もある. 例えば [KP] の第 1 章を参照のこと.

M を 2 次元多様体, $f:M\to\mathbb{L}^3$ を空間的はめ込みとする. 任意の $p\in M$ に対して, p のまわりで f は関数 $\varphi(x,y)$ のグラフとして表すことができる. 従って f が極大曲面ならば, 定理 7.1 の証明から次の命題が得られる.

命題 7.3. 極大曲面の各点のまわりに等温座標系が存在する.

注意 7.4. 実は極大曲面でなくても, 2 次元 Riemann 多様体の各点の周りに等温座標系は存在するが, その証明は難しい. 曲面が実解析的ならば比較的容易に証明できる. 詳しくは [Sp] の第 9 章の Addendum 1 を参照のこと. また, [Nis] においても等温座標系の存在が解説されている.

系 4.14 と命題 7.3 から次の系が得られる.

系 7.5. 境界のないコンパクトな極大曲面は存在しない.

証明. M を境界のないコンパクトな 2 次元多様体として, 極大曲面 $f:M\to\mathbb{L}^3$ が存在したとする. M はコンパクトであるから, 各 f の各成分 x_α $(\alpha=1,2,3)$ はそれぞれ M 上に最大値をとる点をもつ. x_1 が最大値をとる点を $p\in M$ とする. 命題 7.3 により各点のまわりに等温座標系が存在するので, p のまわりでの等温座標系を ${}^t(x,y)$ とすると, 系 4.14 により $x_1(x,y)$ は調和関数となる. M は境界をもたないので, 調和関数の最大値の原理により $x_1(x,y)$ はこの座標近傍上定数となり, 調和関数は実解析的であるから, 結局 x_1 は M 上定数となる. 同様に x_2, x_3 も定数となるから $f(M)$ は 1 点となり, これは f がはめ込みであることに矛盾する. □

8 極大曲面の例

本節では, 極大曲面の基本的な例を紹介する. 極大曲面を構成することは 2 階の非線形偏微分方程式の階を構成することに帰着され, これは一般には難しいが, 曲面を回転面や線織面に限定すると, この偏微分方程式が常微分方程式に帰着されるので, 具体的に解を求めることができる. また, Scherk 型の曲面と呼ばれる曲面も紹介する.

例 8.1 (平面)**.** $a, b, c \in \mathbb{R}$ (ただし $a^2 + b^2 < 1$) に対して, xy 平面上の高々 1 次の関数 $\varphi = ax + by + c$ は極大曲面の方程式 (5.6) を満たす. これは平面で, 自明な極大曲面である.

命題 8.2. Gauss 曲率が一定な極大曲面は平面に限る.

証明. $f : M \to \mathbb{L}^3$ を Gauss 曲率が一定な極大曲面, ν を f の単位法ベクトル場とする. K が正で一定と仮定すると, f を相似変換することで $K \equiv 1$ とできる. このとき (2.3) により $\mathrm{I} = \mathrm{III}$ であるから, III も M 上の正定値な計量を定める. しかし III は $\nu : M \to H^2 \subset \mathbb{L}^3$ から誘導される計量であるから, III から定まる Gauss 曲率は -1 であり, これは I から定まる Gauss 曲率が $+1$ であることに矛盾する. 従って $K \equiv 0$ である (極大曲面の Gauss 曲率は 0 以上であることに注意). このとき f の型作用素 $s = g^{-1}h$ の固有値が 0 (重複度 2) となるので, s が対角化可能であることに注意すると s が零行列であることがわかる. よって $h = gs$ も零行列となり,

$$h = -\begin{pmatrix} \langle f_x, \nu_x \rangle & \langle f_x, \nu_y \rangle \\ \langle f_y, \nu_x \rangle & \langle f_y, \nu_y \rangle \end{pmatrix}$$

であるから ν は定ベクトルとなるので f は平面である. □

8.1 回転面

定義 8.3. $\mathbb{L}^3$ のある 1 次元部分空間 l の各点を固定する $\mathrm{SO}^+(2,1)$ の元全体を l を軸とする**回転**といい, R_l で表す.

$$R_l = \{A \in \mathrm{SO}^+(2,1)\ ;\ Av = v \ \ \forall v \in l\}.$$

l を含む平面内の曲線 C の R_l の回転による軌道を l を軸とする**回転面**, C をその**子午線**という.

$\mathbb{L}^3$ の 1 次元部分空間 l は, l を生成するベクトルが空間的のとき**空間的軸**, 光的のとき**光的軸**, 時間的のとき**時間的軸**という. l を空間的軸とすると, 命題 1.3 (2) により任意の $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ に対して

$$Al := \{av \in \mathbb{L}^3\ ;\ v \in l\}$$

はまた空間的軸になる. 同様に l が光的軸ならば Al も光的軸, l が時間的軸ならば Al も時間的軸である.

一方, ${}^t(1,0,0)$ が生成する空間的軸を l_S, ${}^t(1,0,1)$ が生成する光的軸を l_L, ${}^t(0,0,1)$ が生成する時間的軸を l_T とすると次が成り立つ.

補題 8.4. (1) l が空間的軸ならば, ある $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ が存在して $Al_S = l$ が成り立つ.

(2) l が光的軸ならば, ある $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ が存在して $Al_L = l$ が成り立つ.

(3) l が時間的軸ならば, ある $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ が存在して $Al_T = l$ が成り立つ.

証明. (1) l を空間的軸とする. l を生成する単位ベクトルの 1 つを v とすると, 命題 1.7 (1) によりある v_2, $v_3 \in \mathbb{L}^3$ が存在して

$$\{v = v_1, v_2, v_3\}$$

は Lorentz 正規直交基底となる．そこで $A = (v_1, v_2, v_3)$ とおくと $A \in \mathrm{O}(2,1)$ である．必要ならば v_2 を $-v_2$ に，また v_3 を $-v_3$ に取り替えることで $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ とできる．$A^t(1,0,0) = v$ であるから $Al_S = l$ となる．

(2) l が光的軸ならばある $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $l = \{r^t(\cos\theta, \sin\theta, 1) \; ; \; r \in \mathbb{R}\}$ と書ける．そこで

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ であり，$A^t(1,0,1) = {}^t(\cos\theta, \sin\theta, 1)$ であるから $Al_L = l$ である．

(3) l を時間的軸とする．l を生成する未来的単位ベクトルを v とすると，命題 1.7 (2) によりある v_1, $v_2 \in \mathbb{L}^3$ が存在して

$$\{v_1, v_2, v_3 = v\}$$

は Lorentz 正規直交基底となる．そこで $A = (v_1, v_2, v_3)$ とおくと $A \in \mathrm{O}(2,1)$ である．必要ならば v_1 を $-v_1$ に取り替えることで $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ とできる．$A^t(0,0,1) = v$ であるから $Al_T = l$ となる． □

従って，回転面は時間的軸 l_T に関する回転面，空間的軸 l_S に関する回転面，光的軸 l_L に関する回転面のいずれかと合同である．

例 8.5 (時間的軸に関する回転面)**.** まず時間的軸 l_T (すなわち x_3 軸) を軸とする回転 R_{l_T} を求める．$A = (a_{\alpha\beta}) \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ $(\alpha, \beta = 1,2,3)$ とする．$A \in R_{l_T}$ ならば

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{33} = 1$ を得る．また上の式の両辺に左から A^{-1} をかけると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるが，$A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ であるから

$$A^{-1} = \mathrm{id}_{2,1} \, {}^tA \, \mathrm{id}_{2,1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & -a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

であることに注意すると $a_{31} = 0$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = 1$ を得る．さらに A の第 1 列，第 2 列をそれぞれ a_1, a_2 とすると $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$ であり，また $\det A = 1$ であることから

$$R_{l_T} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; y \in \mathbb{R} \right\}$$

となる．次に l_T を含む平面であるが, これは x_1x_3-平面に R_{l_T} を作用させることで得られるから, l_T を含む平面としては x_1x_3-平面を考えて良い．また, 今考える曲面は空間的曲面であるから, x_1x_3-平面上の曲線 C (子午線) は空間的曲線でなければならない．よって C は $\varphi'(x)^2 < 1$ を満たす関数 φ を用いて ${}^t(x, 0, \varphi(x))$ と書くことができる．従って

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \varphi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos y \\ x\sin y \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$$

である．これが極大曲面となる条件を求める．

$$f_x = {}^t(\cos y, \sin y, \varphi'), \qquad f_y = {}^t(-x\sin y, x\cos y, 0)$$

である．$x = 0$ のとき $f_y = 0$ となって f がはめ込みにならないので, $x > 0$ とする．

$$f_x \times f_y = {}^t(x\varphi'\cos y, x\varphi'\sin y, x)$$

であり, $|f_x \times f_y| = \sqrt{-\langle f_x \times f_y, f_x \times f_y\rangle} = x\sqrt{1-(\varphi')^2}$ であるから

$$\nu = \frac{f_x \times f_y}{|f_x \times f_y|} = \frac{1}{\sqrt{1-(\varphi')^2}} \begin{pmatrix} \varphi'\cos y \\ \varphi'\sin y \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．また,

$$f_{xx} = {}^t(0, 0, \varphi''), \qquad f_{xy} = {}^t(-\sin y, \cos y, 0), \qquad f_{yy} = {}^t(-x\cos y, -x\sin y, 0)$$

であるから,

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1-(\varphi')^2, & g_{12} &= 0, & g_{22} &= x^2, \\ h_{11} &= \frac{-\varphi''}{\sqrt{1-(\varphi')^2}}, & h_{12} &= 0, & h_{22} &= \frac{-x\varphi'}{\sqrt{1-(\varphi')^2}} \end{aligned}$$

となる．よって

$$H = \frac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} = \frac{-(1-(\varphi')^2)\varphi' - x\varphi''}{2x(1-(\varphi')^2)^{3/2}}$$

であるから, f が極大曲面であるための必要十分条件は φ が

$$-(1-(\varphi')^2)\varphi' - x\varphi'' = 0, \qquad \text{ただし } x > 0 \text{ かつ } (\varphi')^2 < 1 \tag{8.1}$$

を満たすことである．この常微分方程式を解けばよい．φ が定数ならば (8.1) は成り立つが, これは平面 (の一部) であるから, φ は定数でないと仮定する．この常微分方程式を解くと

$$\varphi = \frac{1}{c}\sinh^{-1}(cx), \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{c}\sinh(c\varphi)$$

を得る．ただし $c > 0$ は定数である．φ を改めて x とおくと, 求める曲面は

$$f(x,y) = {}^t\left(c\sinh\frac{x}{c}\cos y, c\sinh\frac{x}{c}\sin y, x\right) \tag{8.2}$$

となる．この極大曲面を**第 1 種懸垂面** (catenoid of 1st kind) という．なお (8.2) は, $(x,y)\mapsto(cx,y)$ と座標変換してから曲面を $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1/c,x_2/c,x_3/c)$ と相似変換することで, $c=1$ とすることができる．すなわち,

$$f(x,y)={}^t(\sinh x\cos y,\sinh x\sin y,x) \tag{8.3}$$

としてよい．

例 8.6 (空間的軸に関する回転面)**.** まず空間的軸 l_S (すなわち x_1 軸) を軸とする回転 R_{l_S} を求める．$A=(a_{\alpha\beta})\in\mathrm{SO}^+(2,1)$ $(\alpha,\beta=1,2,3)$ とする．$A\in R_{l_S}$ ならば

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

であるから $a_{11}=1$, $a_{21}=0$, $a_{31}=0$ を得る．また上の式の両辺に左から A^{-1} をかけると, 例 8.5 と同様に $a_{11}=1$, $a_{12}=0$, $a_{13}=0$ を得る．さらに A の第 2 列, 第 3 列をそれぞれ a_2, a_3 とすると $\langle a_2,a_2\rangle=1$, $\langle a_3,a_3\rangle=-1$, $\langle a_2,a_3\rangle=0$ であり, また $\det A=1$ かつ $a_{33}>0$ であることから

$$R_{l_S}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cosh y&\sinh y\\0&\sinh y&\cosh y\end{pmatrix}\ ;\ y\in\mathbb{R}\right\}$$

となる．次に l_S を含む平面であるが, これは x_1x_3-平面を考えて良い．実際, l_S を含む平面上の曲線 C (子午線) を ${}^t(x_1(x),x_2(x),x_3(x))$ とすると

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cosh y&\sinh y\\0&\sinh y&\cosh y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(x)\\x_2(x)\\x_3(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1(x)\\x_2(x)\cosh y+x_3(x)\sinh y\\x_2(x)\sinh y+x_3(x)\cosh y\end{pmatrix}$$

であり, このとき

$$f_y=\begin{pmatrix}0\\x_2\sinh y+x_3\cosh y\\x_2\cosh y+x_3\sinh y\end{pmatrix}$$

であるから

$$g_{22}=-x_2^2+x_3^2$$

となり, これは正でなければならないので, C が乗っている平面が ${}^t(1,0,0)$ と ${}^t(0,x_2,x_3)$ で張られているとすると,

$$x_3^2>x_2^2$$

でなければならない．$x_3>0$ とすると, ある $t\in\mathbb{R}$ が存在して

$$x_3=\cosh t,\qquad x_2=\sinh t$$

と書くことができる．ここで

$$A_0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cosh(-t)&\sinh(-t)\\0&\sinh(-t)&\cosh(-t)\end{pmatrix}\in R_{l_S}$$

とおくと, $A_0{}^t(0, \sinh t, \cosh t) = {}^t(0,0,1)$ であるから C が乗っている平面は R_{l_S} の元の作用により x_1x_3-平面に移されるからである.

また, 今考える曲面は空間的曲面であるから, x_1x_3-平面上の曲線 C (子午線) は空間的曲線でなければならない. よって C は $\varphi'(x)^2 < 1$ を満たす関数 φ を用いて ${}^t(x, 0, \varphi(x))$ と書くことができる. 従って

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh y & \sinh y \\ 0 & \sinh y & \cosh y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \varphi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x)\sinh y \\ \varphi(x)\cosh y \end{pmatrix}$$

である. これが極大曲面となる条件を求める.

$$f_x = {}^t(1, \varphi'\sinh y, \varphi'\cosh y), \qquad f_y = {}^t(0, \varphi\cosh y, \varphi\sinh y)$$

である. $\varphi = 0$ のとき $f_y = 0$ となって f がはめ込みにならないので, $\varphi > 0$ とする.

$$f_x \times f_y = {}^t(\varphi\varphi', \varphi\sinh y, \varphi\cosh y)$$

であり, $|f_x \times f_y| = \sqrt{-\langle f_x \times f_y, f_x \times f_y\rangle} = \varphi\sqrt{1-(\varphi')^2}$ であるから

$$\nu = \frac{f_x \times f_y}{|f_x \times f_y|} = \frac{1}{\sqrt{1-(\varphi')^2}} \begin{pmatrix} \varphi' \\ \sinh y \\ \cosh y \end{pmatrix}$$

である. また,

$$f_{xx} = {}^t(0, \varphi''\sinh y, \varphi''\cosh y), \qquad f_{xy} = {}^t(0, \varphi'\cosh y, \varphi'\sinh y), \qquad f_{yy} = {}^t(0, \varphi\sinh y, \varphi\cosh y)$$

であるから,

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1-(\varphi')^2, & g_{12} &= 0, & g_{22} &= \varphi^2, \\ h_{11} &= \frac{-\varphi''}{\sqrt{1-(\varphi')^2}}, & h_{12} &= 0, & h_{22} &= \frac{-\varphi}{\sqrt{1-(\varphi')^2}} \end{aligned}$$

となる. よって

$$H = \frac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} = \frac{-1+(\varphi')^2 - \varphi\varphi''}{2\varphi(1-(\varphi')^2)^{3/2}}$$

であるから, f が極大曲面であるための必要十分条件は φ が

(8.4) $$1-(\varphi')^2 + \varphi\varphi'' = 0, \qquad \text{ただし } \varphi > 0 \text{ かつ } (\varphi')^2 < 1$$

を満たすことである. この常微分方程式を解けばよい. この常微分方程式を解くと

$$\varphi = \frac{1}{c}\sin(cx)$$

を得る. ただし $c > 0$ は定数である. よって求める曲面は

(8.5) $$f(x,y) = {}^t\left(x, \frac{1}{c}\sin(cx)\sinh y, \frac{1}{c}\sin(cx)\cosh y\right)$$

となる．この極大曲面を**第 2 種懸垂面** (catenoid of 2st kind) という．なお (8.5) は, $(x,y) \mapsto (x/c,y)$ と座標変換してから曲面を $(x_1,x_2,x_3) \mapsto c(x_1,x_2,x_3)$ と相似変換することで, $c=1$ とすることができる．すなわち,

$$f(x,y) = {}^t(x, \sin x \sinh y, \sin x \cosh y) \tag{8.6}$$

としてよい．

例 8.7 (光的軸に関する回転面)**.** まず光的軸 l_L を軸とする回転 R_{l_L} を求める．$A=(a_{\alpha\beta}) \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ $(\alpha,\beta=1,2,3)$ とする．$A \in R_{l_L}$ ならば

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

であるから

$$a_{11}+a_{13}=1, \qquad a_{21}+a_{23}=0, \qquad a_{31}+a_{33}=1$$

を得る．また上の式の両辺に左から A^{-1} をかけると, 例 8.5 と同様に

$$a_{11}-a_{31}=1, \qquad a_{12}-a_{32}=0, \qquad -a_{13}+a_{33}=1$$

を得る．よって $x=a_{11}-1$, $y=a_{12}$, $z=a_{21}$, $w=a_{22}$ とすると

$$A=\begin{pmatrix}1+x & y & -x\\ z & w & -z\\ x & y & 1-x\end{pmatrix}$$

となる．ここで $\det A = w$ となるので $w=1$, すなわち

$$A=\begin{pmatrix}1+x & y & -x\\ z & 1 & -z\\ x & y & 1-x\end{pmatrix}$$

となる．さらに

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = {}^tA\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}A = \begin{pmatrix}1+2x+z^2 & y+z & -(2x+z^2)\\ y+z & 1 & -(y+z)\\ -(2x+z^2) & -(y+z) & -1+(2x+z^2)\end{pmatrix}$$

であるから $z=-y$ かつ $2x=-z^2=-y^2$, すなわち $x=-y^2/2$ となる．従って

$$R_{l_L} = \left\{ \begin{pmatrix}1-\frac{y^2}{2} & y & \frac{y^2}{2}\\ -y & 1 & y\\ -\frac{y^2}{2} & y & 1+\frac{y^2}{2}\end{pmatrix} \;;\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

となる．次に l_S を含む平面であるが, これは x_1x_3-平面を考えて良い．実際, l_L を含む平面上の曲線 C (子午線) を ${}^t(x_1(x), x_2(x), x_3(x))$ とすると

$$f(x,y) = \begin{pmatrix}1-\frac{y^2}{2} & y & \frac{y^2}{2}\\ -y & 1 & y\\ -\frac{y^2}{2} & y & 1+\frac{y^2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(x)\\x_2(x)\\x_3(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1(x)(1-\frac{y^2}{2})+x_2(x)y+x_3(x)\frac{y^2}{2}\\ -x_1(x)y+x_2(x)+x_3(x)y\\ -x_1(x)\frac{y^2}{2}+x_2(x)y+x_3(x)(1+\frac{y^2}{2})\end{pmatrix}$$

であり, このとき

$$f_y = \begin{pmatrix} (-x_1+x_3)y+x_2 \\ -x_1+x_3 \\ (-x_1+x_3)y+x_2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$g_{22} = (-x_1+x_3)^2$$

となり, これは正でなければならないので, C が乗っている平面が ${}^t(1,0,1)$ と ${}^t(x_1,x_2,x_3)$ で張られているとすると,

$$x_1 \neq x_3$$

でなければならない. $x_2 \neq 0$ とすると, この平面は ${}^t(1,0,1)$ と ${}^t(x_1,1,x_3)$ $(x_1 \neq x_3)$ で張られる平面と一致, すなわち ${}^t(1,0,1)$ と ${}^t(0,1,c)$ $(c \neq 0)$ で張られる平面と一致する. ここで

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2c^2} & -\frac{1}{c} & \frac{1}{2c^2} \\ \frac{1}{c} & 1 & -\frac{1}{c} \\ -\frac{1}{2c^2} & -\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{2c^2} \end{pmatrix} \in R_{l_L}$$

とおくと, $A_0{}^t(0,1,c) = {}^t(-1/(2c), 0, c-1/(2c))$ であるから C が乗っている平面は R_{l_L} の元の作用により x_1x_3-平面に移されるからである.

また, 今考える曲面は空間的曲面であるから, x_1x_3-平面上の曲線 C (子午線) は空間的曲線でなければならない. よって C は $\varphi'(x)^2 < 1$ を満たす関数 φ を用いて ${}^t(x,0,\varphi(x))$ と書くことができる. 従って

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1-\frac{y^2}{2} & y & \frac{y^2}{2} \\ -y & 1 & y \\ -\frac{y^2}{2} & y & 1+\frac{y^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \varphi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1-\frac{y^2}{2})+\varphi(x)\frac{y^2}{2} \\ -xy+\varphi(x)y \\ -x\frac{y^2}{2}+\varphi(x)(1+\frac{y^2}{2}) \end{pmatrix}$$

である. ここで

$$t = \frac{x-\varphi(x)}{2}, \qquad h = \frac{x+\varphi(x)}{2}$$

とおく. $dt/dx = (1-\varphi')/2 > 0$ であるから逆関数の定理により $x = x(t)$ とみなすことができる. また $t+h = x(t)$ であるから $h = x(t)-t$ である. よって h も t の関数とみなすことができる. 特に $h'(t) = dx/dt - 1 = 2/(1-\varphi') - 1 = (1+\varphi')/(1-\varphi') > 0$ である.

$$x = h(t)+t, \qquad \varphi = h(t)-t$$

を $f(x,y)$ の式に代入して, t を改めて x と書くと,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1-\frac{y^2}{2} & y & \frac{y^2}{2} \\ -y & 1 & y \\ -\frac{y^2}{2} & y & 1+\frac{y^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(x)+x \\ 0 \\ h(x)-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x)+(1-y^2)x \\ -2xy \\ h(x)-(1+y^2)x \end{pmatrix}$$

となる. これが極大曲面となる条件を求める.

$$f_x = {}^t(h'+1-y^2, -2y, h'-1-y^2), \qquad f_y = -2x{}^t(y,1,y)$$

である．$x=0$ のとき $f_y=0$ となって f がはめ込みにならないので, $x>0$ とする．

$$f_x \times f_y = -2x^t(h'+y^2-1, 2y, h'+y^2+1)$$

であり, $|f_x \times f_y| = \sqrt{-\langle f_x \times f_y, f_x \times f_y\rangle} = 4x\sqrt{h'}$ であるから

$$\nu = \frac{f_x \times f_y}{|f_x \times f_y|} = \frac{-1}{2\sqrt{h'}}\begin{pmatrix} h'+y^2-1 \\ 2y \\ h'+y^2+1 \end{pmatrix}$$

である．また,

$$f_{xx} = h''^t(1,0,1), \qquad f_{xy} = -2^t(y,1,y), \qquad f_{yy} = -2x^t(1,0,1)$$

であるから,

$$\begin{aligned} g_{11} &= 4h', & g_{12} &= 0, & g_{22} &= 4x^2, \\ h_{11} &= \frac{h''}{\sqrt{h'}}, & h_{12} &= \frac{2(y-1)}{\sqrt{h'}}, & h_{22} &= \frac{-2x}{\sqrt{h'}} \end{aligned}$$

となる．よって

$$H = \frac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} = \frac{xh'' - 2h'}{32(h')^2x^2}$$

であるから, f が極大曲面であるための必要十分条件は h が

(8.7) $$xh'' - 2h' = 0, \qquad \text{ただし } x>0 \text{ かつ } h'>0$$

を満たすことである．この常微分方程式を解けばよい．この常微分方程式を解くと

$$h = cx^3 + c'$$

を得る．ただし $c>0$ および $c' \in \mathbb{R}$ は定数である．必要ならば曲面を l_L に沿って平行移動して $c'=0$ としてよい．よって求める曲面は

(8.8) $$f(x,y) = {}^t\bigl(cx^3 + (1-y^2)x, -2xy, cx^3 - (1+y^2)x\bigr)$$

となる．この極大曲面を**第 2 種 Enneper 曲面** (Enneper surface of 2st kind) という．なお (8.8) は, $(x,y) \mapsto (x/\sqrt{c}, y)$ と座標変換してから曲面を $(x_1,x_2,x_3) \mapsto \sqrt{c}(x_1,x_2,x_3)$ と相似変換することで, $c=1$ とすることができる．すなわち,

(8.9) $$f(x,y) = {}^t\bigl(x^3 + (1-y^2)x, -2xy, x^3 - (1+y^2)x\bigr)$$

としてよい．

例 8.5, 例 8.6, 例 8.7 の作り方から, 次の命題を得る．

命題 8.8 (小林治 [Kob], 1983)**.** 回転面で極大曲面となるのは以下の曲面に限る．

(1) 平面または第 1 種懸垂面 (時間的軸に関する回転面).
(2) 第 2 種懸垂面 (空間的軸に関する回転面).
(3) 第 2 種 Enneper 曲面 (光的軸に関する回転面).

8.2 線織面

定義 8.9. 直線の運動によって描かれる曲面を**線織面**といい, その動直線を**母線**という.

I を $\mathbb{R}$ の開区間 ($0 \in I$ と仮定する), $c : I \ni x \mapsto c(x) \in \mathbb{L}^3$ を空間曲線, $n : I \ni x \mapsto n(x) \in \mathbb{L}^3$ を p に沿うベクトル場で $n \neq 0$ を満たすものとすると, 線織面は

$$f : I \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto c(x) + yn(x) \in \mathbb{L}^3$$

と表される. 線織面で極大曲面となるものを考える.

$$f_x = c' + yn', \qquad f_y = n$$

であるから任意の $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$ に対して $g_{11} > 0$ かつ $g_{22} > 0$ となるためには c' および n はともに空間的ベクトルでなければならない. よって x を c の弧長パラメータ (すなわち $\langle c'(x), c'(x)\rangle = 1$ を満たすパラメータ) としてよい. また

$$c(x) + y\frac{n(x)}{|n(x)|}$$

と $f(x, y)$ は同じ曲面を定めるから n は $\langle n(x), n(x)\rangle = 1$ を満たすとしてよい. さらに I で定義された任意の関数 h に対して,

$$\hat{f}(x, y) := c(x) + \big(y + h(x)\big)n(x) = \big(c(x) + h(x)n(x)\big) + yn(x)$$

とおくと, $f(x, y)$ と $\hat{f}(x, y)$ は同じ曲面を定める. そこで h を

$$h(y) := -\int \langle c'(x), n(x)\rangle \, dx$$

で定め, $\tilde{c}(x) := c(c) + h(x)n(x)$ とおくと, $\hat{f}(x, y) = \tilde{c}(x) + yn(x)$ であり,

$$\langle \tilde{c}', n\rangle = \langle c' + h'n + hn', n\rangle = \langle c', n\rangle - \langle c', n\rangle \langle n, n\rangle + h \langle n', n\rangle = 0$$

であるから, $\tilde{c}'(x)$ と $n(x)$ は直交する. そこでこの $\hat{f}$ を改めて f とおき, $\tilde{c}$ を改めて c とおく. すなわち,

$$f(x, y) = c(x) + yn(x), \qquad x \in I, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \langle c', c'\rangle = \langle n, n\rangle = 1, \quad \langle c', n\rangle = 0$$

で極大曲面となるものを求める. $f_x = c' + yn'$, $f_y = n$, $f_{yy} = 0$ から

$$g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1, \qquad h_{22} = 0 \tag{8.10}$$

なので, $H = 0$ は $h_{11} = 0$ と同値であり, これは $\langle f_x \times f_y, f_{xx}\rangle = 0$, すなわち $\det(f_x, f_{xx}, f_y) = 0$ と同値である.

$$\begin{aligned}\det(f_x, f_{xx}, f_y) &= \det(c' + yn',\, c'' + yn'',\, n) \\ &= \det(c', c'', n) + y\left(\det(c', n'', n) + \det(n', c'', n)\right) + y^2 \det(n', n'', n)\end{aligned}$$

であるから, f が極大曲面であるための必要十分条件は

$$\det(c', c'', n) = 0, \quad \det(c', n'', n) + \det(n', c'', n) = 0, \quad \det(n', n'', n) = 0 \tag{8.11}$$

となる. (8.11) の左の式からある I 上の関数 κ が存在して

$$c'' = \kappa n \tag{8.12}$$

が成り立つ. すなわち n (または $-n$) は c の主法線ベクトルである (c の曲率は $|\kappa|$ である). ここで

$$b := c' \times n$$

とおくと b は時間的単位ベクトルであり, $\{c', n, b\}$ は Lorentz 正規直交基底である. また, b' は n に比例することが簡単に確かめられる. すなわちある I 上の関数 τ が存在して

$$b' = -\tau n \tag{8.13}$$

が成り立つ (c の捩率は τ ($\kappa > 0$ のとき) または $-\tau$ ($\kappa < 0$ のとき) である). さらに n' は

$$n' = -\kappa c' - \tau b \tag{8.14}$$

を満たすこともわかる. (8.12), (8.13), (8.14) をまとめて Frenet-Serret 型の公式

$$F' = F\Omega, \qquad F = (c', n, b), \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \tag{8.15}$$

を得る. (8.12) により (8.11) の中央の式の左辺は第 2 項が 0 になるので, 第 1 項も 0 である. すなわち

$$\det(c', n'', n) = 0 \tag{8.16}$$

である. ここで (8.15) から

$$n'' = -\kappa' c' + (\tau^2 - \kappa^2)n - \tau' b \tag{8.17}$$

であるからこれを (8.16) に代入して

$$\tau' = 0$$

を得る. すなわち τ は定数である. さらに, (8.11) の右の式に (8.14) および (8.17) を代入すると

$$\tau\kappa' = 0$$

を得る. すなわち $\tau = 0$ か, または κ は定数である. ここで次が成り立つ.

主張 1. $\tau = 0$ ならばこの線織面 f は平面の一部である.

主張 *1* の証明. $\tau=0$ ならば b は定ベクトルである. $x_0 \in I$ を 1 つ固定すると任意の $x \in I$ に対して

$$\langle c(x)-c(x_0), b\rangle' = \langle c'(x), b\rangle = 0$$

であるから $\langle c(x)-c(x_0), b\rangle$ は定数となる. $x=x_0$ のときこの値は 0 であるから

$$\langle c(x)-c(x_0), b\rangle = 0$$

が任意の $x \in I$ に対して成り立つ. よって $c: I \to \mathbb{L}^3$ は点 $c(x_0)$ を通り b に直交する (空間的) 平面に含まれ, このとき n もこの平面に含まれるから f もこの平面に含まれる. □

以下, τ を 0 でない定数とする. このとき κ も定数である.

主張 2. $\kappa=0$ ならばこの線織面は

$$f(x,y) = {}^t(x,\, y\cosh x,\, y\sinh x) \qquad (y^2<1) \tag{8.18}$$

と合同である. この極大曲面を**第 2 種常螺旋面** (Helicoid of 2st kind) という.

主張 *2* の証明. $\kappa=0$ ならば $c''=0$ であるから c は (空間的) 直線である. 補題 8.4 (1) によりこの直線を x_1 軸としてよい. すなわち $c(x)={}^t(x,0,0)$ としてよい. このとき $\langle c', n\rangle = 0$, $\langle n, n\rangle = 1$ から $n={}^t(0,\cosh x, \sinh x)$ としてよい. また $g_{11}=\langle c'+yn', c'+yn'\rangle = 1-y^2$ であるから結論を得る. □

なお, (8.18) は

$$x_3 = x_2 \tanh x_1 \qquad (x_2^2 < \cosh^2 x_1) \tag{8.19}$$

と書くこともできるから, この曲面はグラフ極大曲面である.

以下 κ, τ は共に 0 でない定数とする. このとき c は定傾曲線である. すなわちある定ベクトル $a \in \mathbb{L}^3 \setminus \{0\}$ が存在して

$$\langle c', a\rangle = (\text{定数}) \tag{8.20}$$

が成り立つ. 実際,

$$a = \tau c' + \kappa b \tag{8.21}$$

とおくと, (8.12), (8.13) により

$$a' = \tau c'' + \kappa b' = \tau(\kappa n) - \kappa(\tau n) = 0$$

となるから a は定ベクトルであり, (8.12), (8.21) により

$$\langle c', a\rangle' = \langle c'', a\rangle = \langle \kappa n, \tau c' + \kappa b\rangle = 0$$

であるから (8.20) が成り立つ.

さらに, a の定義 (8.21) から

$$\langle a, a\rangle = \tau^2 - \kappa^2$$

であるから, 次の主張を得る.

主張 3. (8.21) で定義された定ベクトル $a \in \mathbb{L}^3 \setminus \{0\}$ に対して次が成り立つ.

(i) a が空間的であるための必要十分条件は $|\tau| > |\kappa| \geq 0$ が成り立つことである.
(ii) a が光的であるための必要十分条件は $|\tau| = |\kappa| > 0$ が成り立つことである.
(iii) a が時間的であるための必要十分条件は $|\kappa| > |\tau| > 0$ が成り立つことである.

主張 4. a が光的ベクトルのとき, すなわち $|\tau| = |\kappa| > 0$ のとき, この線織面は

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -x^3/3 + x + xy \\ x^2 - y \\ -x^3/3 - x + xy \end{pmatrix} \qquad (y > 0) \tag{8.22}$$

と合同である. この極大曲面を**第 2 種 Enneper 曲面の共役曲面** (Conjugate of Enneper surface of 2st kind) という.

主張 *4* の証明. $\tau = \pm\kappa$ であるから (8.15) の Ω は

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \mp\kappa \\ 0 & \mp\kappa & 0 \end{pmatrix}$$

となる. このとき Ω は対角化不可能であるが,

$$P = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \mp 1/\kappa^2 \\ 0 & \mp 1/\kappa & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mp\kappa & 0 \\ \mp\kappa^2 & 0 & \kappa^2 \end{pmatrix}$$

とすると Jordan 標準形は

$$\Omega = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

となる. ここで $G = FP$ とおくと, (8.15) により

$$G' = G \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. これを解くと

$$G = (c_1,\ c_1 x + c_2,\ c_1 x^2/2 + c_2 x + c_3)$$

を得る. ただし $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{L}^3$ は定ベクトルである. ここで, (8.15) の初期値を $F(0) = \mathrm{id}_3$ (3 次の単位行列) で定めると, $G(0) = F(0)P = P$ となるから

$$(c_1, c_2, c_3) = P$$

である．よって

$$G=\begin{pmatrix}\pm 1 & \pm x & \pm x^2/2\mp 1/\kappa^2\\ 0 & \mp 1/\kappa & \mp x/\kappa\\ 1 & x & x^2/2\end{pmatrix},$$

であり，

$$F=GP^{-1}=\begin{pmatrix}-\kappa^2x^2/2+1 & -\kappa x & \pm\kappa^2x^2/2\\ \kappa x & 1 & \mp\kappa x\\ \mp\kappa^2x^2/2 & \mp\kappa x & \kappa^2x^2/2+1\end{pmatrix}$$

となる．$F=(c',n,b)$ であったから，$c(0)={}^t(0,0,0)$ とすると

$$c(x)=\begin{pmatrix}-\kappa^2x^3/6+x\\ \kappa x^2/2\\ \mp\kappa^2x^3/6\end{pmatrix},\qquad n(x)=\begin{pmatrix}-\kappa x\\ 1\\ \mp\kappa x\end{pmatrix}$$

を得る．必要ならば曲面を x_1x_2 平面に関して反転させることで，上式の "$\mp$" は "$-$" としてよい．さらに $(x,y)\mapsto(x/\kappa,y/\kappa)$ と座標変換してから曲面を $(x_1,x_2,x_3)\mapsto\kappa(x_1,x_2,x_3)$ と相似変換することで，$\kappa=1$ とすることができる．よって求める曲面は

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}-x^3/6+x\\ x^2/2\\ -x^3/6\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-x\\ 1\\ -x\end{pmatrix}\qquad (y<1/2) \tag{8.23}$$

となる．さらに，$(x,y)\mapsto(x,(1-y)/2)$ と座標変換してから曲面を $(x_1,x_2,x_3)\mapsto 2(x_1,x_2,x_3)$ と相似変換することで結論を得る． □

以下，$|\kappa|\neq|\tau|$ とする．

主張 5. a が空間的ベクトルのとき，すなわち $|\tau|>|\kappa|>0$ のとき，この線織面は第 2 種常螺旋面 (8.18) と合同である．

主張 *5* の証明. $|\tau|>|\kappa|$ のとき (8.15) の Ω は対角化可能で，

$$P=\begin{pmatrix}\tau & \kappa & \kappa\\ 0 & -\sqrt{\tau^2-\kappa^2} & \sqrt{\tau^2-\kappa^2}\\ \kappa & \tau & \tau\end{pmatrix},\qquad P^{-1}=\frac{1}{2(\tau^2-\kappa^2)}\begin{pmatrix}2\tau & 0 & -2\kappa\\ -\kappa & -\sqrt{\tau^2-\kappa^2} & \tau\\ -\kappa & \sqrt{\tau^2-\kappa^2} & \tau\end{pmatrix}$$

とすると

$$\Omega=P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\tau^2-\kappa^2} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{\tau^2-\kappa^2}\end{pmatrix}P^{-1}$$

となる．ここで $G=FP$ とおくと，(8.15) により

$$G'=G\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\tau^2-\kappa^2} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{\tau^2-\kappa^2}\end{pmatrix}$$

となる．これを解くと

$$G=(c_1,\,c_2e^{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x},\,c_3e^{-\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x})=(c_1,c_2,c_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x} & 0\\ 0 & 0 & e^{-\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x}\end{pmatrix}$$

を得る．ただし $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{L}^3$ は定ベクトルである．ここで (8.15) の初期値を

$$F(0)=\frac{1}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}\begin{pmatrix}\tau & 0 & -\kappa\\ 0 & \sqrt{\tau^2-\kappa^2} & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\end{pmatrix}$$

で定めると, $G(0)=(c_1,c_2,c_3)=F(0)P$ となるから

$$(c_1,c_2,c_3)=F(0)P=\sqrt{\tau^2-\kappa^2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

である．よって

$$\begin{aligned}F&=(c_1,c_2,c_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x} & 0\\ 0 & 0 & e^{-\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x}\end{pmatrix}P^{-1}\\ &=\frac{1}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}\begin{pmatrix}\tau & 0 & -\kappa\\ \kappa\sinh\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x & \sqrt{\tau^2-\kappa^2}\cosh\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x & -\tau\sinh\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x\\ -\kappa\cosh\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x & -\sqrt{\tau^2-\kappa^2}\sinh\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x & \tau\cosh\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．$F=(c',n,b)$ であったから, $c(0)={}^t(0,\kappa/(\tau^2-\kappa^2),0)$ とすると

$$c(x)=\frac{1}{\tau^2-\kappa^2}\begin{pmatrix}\tau\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x\\ \kappa\cosh\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x\\ -\kappa\sinh\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x\end{pmatrix},\qquad n(x)=\begin{pmatrix}0\\ \cosh\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x\\ -\sinh\sqrt{\tau^2-\kappa^2}x\end{pmatrix}$$

を得る．ここで

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{x}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}},\frac{\tau y-\kappa}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}\right)$$

と座標変換してから曲面を

$$(x_1,x_2,x_3)\mapsto\frac{\tau^2-\kappa^2}{\tau}(x_1,x_2,x_3)$$

と相似変換することで結論を得る． □

主張 6. a が時間的ベクトルのとき, すなわち $|\kappa|>|\tau|\geq 0$ のとき, この線織面は

(8.24) $$f(x,y)=\begin{pmatrix}y\cos x\\ y\sin x\\ x\end{pmatrix}\qquad(|y|>1)$$

と合同である．この極大曲面を**常螺旋面** (helicoid) という．

主張 6 の証明. $|\kappa| > |\tau|$ のときも (8.15) の Ω は対角化可能で,

$$P = \begin{pmatrix} \kappa & \kappa & \tau \\ -i\sqrt{\kappa^2-\tau^2} & i\sqrt{\kappa^2-\tau^2} & 0 \\ \tau & \tau & \kappa \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2(\kappa^2-\tau^2)} \begin{pmatrix} \kappa & i\sqrt{\kappa^2-\tau^2} & -\tau \\ \kappa & -i\sqrt{\kappa^2-\tau^2} & -\tau \\ -2\tau & 0 & 2\kappa \end{pmatrix}$$

とすると

$$\Omega = P \begin{pmatrix} i\sqrt{\kappa^2-\tau^2} & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{\kappa^2-\tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

となる. ここで $G = FP$ とおくと, (8.15) により

$$G' = G \begin{pmatrix} i\sqrt{\kappa^2-\tau^2} & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{\kappa^2-\tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. これを解くと

$$G = (c_1 e^{i\sqrt{\kappa^2-\tau^2}}, c_2 e^{-i\sqrt{\kappa^2-\tau^2}}, c_3) = (c_1, c_2, c_3) \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{\kappa^2-\tau^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{\kappa^2-\tau^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る. ただし $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{L}^3$ は定ベクトルである. ここで (8.15) の初期値を

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\kappa^2-\tau^2} & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ -\tau & 0 & \kappa \end{pmatrix}$$

で定めると, $G(0) = (c_1, c_2, c_3) = F(0)P$ となるから

$$(c_1, c_2, c_3) = F(0)P = \sqrt{\kappa^2-\tau^2} \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. よって

$$\begin{aligned} F &= (c_1, c_2, c_3) \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{\kappa^2-\tau^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{\kappa^2-\tau^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}} \begin{pmatrix} -\kappa \sin\sqrt{\kappa^2-\tau^2}x & -\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\cos\sqrt{\kappa^2-\tau^2}x & \tau\sin\sqrt{\kappa^2-\tau^2}x \\ \kappa\cos\sqrt{\kappa^2-\tau^2}x & -\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\sin\sqrt{\kappa^2-\tau^2}x & -\tau\cos\sqrt{\kappa^2-\tau^2}x \\ -\tau & 0 & \kappa \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. $F = (c', n, b)$ であったから, $c(0) = {}^t(\kappa/(\kappa^2-\tau^2), 0, 0)$ とすると

$$c(x) = \frac{1}{\kappa^2-\tau^2} \begin{pmatrix} \kappa\cos\sqrt{\kappa^2-\tau^2}x \\ \kappa\sin\sqrt{\kappa^2-\tau^2}x \\ -\tau\sqrt{\kappa^2-\tau^2}x \end{pmatrix}, \qquad n(x) = \begin{pmatrix} -\cos\sqrt{\kappa^2-\tau^2}x \\ -\sin\sqrt{\kappa^2-\tau^2}x \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る．ここで

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}}, \frac{\tau y + \kappa}{\kappa^2 - \tau^2}\right)$$

と座標変換してから曲面を

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto -\frac{\kappa^2 - \tau^2}{\tau}(x_1, x_2, x_3)$$

と相似変換することで結論を得る． □

本小節の作り方から, 次の命題を得る．

命題 8.10 (小林治 [Kob], 1983)**.** 線織面で極大曲面となるのは以下の曲面に限る．

(1) 平面または常螺旋面 ((8.21) の $a \in \mathbb{L}^3$ が時間的).
(2) 第 2 種常螺旋面 ((8.21) の $a \in \mathbb{L}^3$ が空間的).
(3) 第 2 種 Enneper 曲面の共役曲面 ((8.21) の $a \in \mathbb{L}^3$ が光的).

常螺旋面 (8.24) は $\mathbb{R}^3$ の極小曲面でもある．このことについて次の結果が知られている．

命題 8.11 (小林治 [Kob], 1983)**.** $\mathbb{L}^3$ の極大曲面であり, かつ $\mathbb{R}^3$ の極小曲面であるのは, 平面か常螺旋面に限る．

証明. $\mathbb{L}^3$ の極大曲面であり, かつ $\mathbb{R}^3$ の極小曲面である曲面が与えられたとする．極大曲面は常に局所的にはグラフ $x_3 = \varphi(x, y)$ で表すことができるのでこの曲面をこのように表すと, φ は極大曲面の方程式 (5.6) を満たす．また, φ は極小曲面の方程式

$$\left(1 + \varphi_y^2\right) \varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \left(1 + \varphi_x^2\right) \varphi_{yy} = 0$$

も満たすから, 辺々引くと

$$\varphi_y^2\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \varphi_x^2\varphi_{yy} = 0,$$

すなわち

$$\begin{pmatrix}\varphi_x & \varphi_y\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\varphi_{xx} & -\varphi_{xy} \\ -\varphi_{yx} & \varphi_{yy}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\varphi_x \\ \varphi_y\end{pmatrix} = 0 \tag{8.25}$$

を得る．ここで任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して, 曲線

$$\{(x, y)\ ;\ \varphi(x, y) = c\}$$

の曲率は

$$\kappa = \pm\frac{1}{(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix}\varphi_x & \varphi_y\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\varphi_{xx} & -\varphi_{xy} \\ -\varphi_{yx} & \varphi_{yy}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\varphi_x \\ \varphi_y\end{pmatrix}$$

である ([Ta, 定理 2.16] 参照) から, (8.25) によりこの曲率は 0 である, すなわち曲面 $x_3 = \varphi(x, y)$ と平面 $x_3 = c$ の共通部分は直線である．従ってこの曲面 $x_3 = \varphi(x, y)$ は線織面となる．$\mathbb{R}^3$ の極小曲面で線織面となるのは平面か常螺旋面に限られることが知られている ([Nit2, § 79] 参照) ので結論を得る． □

8.3　移動曲面

定義 8.12. $\varphi(x,y)=p(x)+q(y)$ の形の関数 φ のグラフで表される曲面を**移動曲面**という．

移動曲面で極大曲面となるものを考える．$\varphi(x,y)=p(x)+q(y)$ のとき，極大曲面の方程式 (5.6) は

$$\bigl(1-q'(y)^2\bigr)\,p''(x)+\bigl(1-p'(x)^2\bigr)\,q''(y)=0$$

となる．ただし p' は p の x による微分，q' は q の y による微分をそれぞれ表す．よって

$$\frac{p''(x)}{1-p'(x)^2}=-\frac{q''(y)}{1-q'(y)^2}$$

であり，この左辺は x のみに依存し，右辺は y のみに依存しているから，ある定数 c が存在して

$$\frac{p''(x)}{1-p'(x)^2}=-\frac{q''(y)}{1-q'(y)^2}=c \tag{8.26}$$

が成り立つ．$c=0$ ならば $p''(x)=q''(y)=0$ であるから p は x の高々 1 次式，q は y の高々 1 次式となり，φ のグラフは平面となる．$c\neq 0$ のとき，必要ならば x と y を取り替えることで $c>0$ としてよい．このとき，

$$p(x)=\frac{1}{c}\log\bigl(c_1e^{2cx}+1\bigr)-x+c_2,\qquad q(y)=-\frac{1}{c}\log\bigl(c_3e^{2cy}+1\bigr)+y+c_4 \tag{8.27}$$

が成り立つ (問題 8.14 参照)．ただし $c_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $c_2\in\mathbb{R}$, $c_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $c_4\in\mathbb{R}$ は積分定数である．必要ならば

$$(x,y)\mapsto\left(x-\frac{1}{2c}\log c_1,\,y-\frac{1}{2c}\log c_3,\right)$$

と平行移動することで $c_1=c_3=1$ としてよい．すると

$$p(x)=\frac{1}{c}\log\cosh(cx)+c_2',\qquad q(y)=-\frac{1}{c}\log\cosh(cy)+c_4'$$

となる．ただし $c_2', c_4'\in\mathbb{R}$ は定数である．x_3 軸の平行移動で $c_2'=c_4'=0$ としてよい．よって

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{c}\bigl(\log\cosh(cx)-\log\cosh(cy)\bigr)=\frac{1}{c}\log\left(\frac{\cosh(cx)}{\cosh(cy)}\right) \tag{8.28}$$

を得る．この場合も回転面や線織面と同様に，曲面を $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1/c,x_2/c,x_3/c)$ によって相似変換することで，$c=1$ とできる．すなわち，

$$x_3=\log\left(\frac{\cosh x_1}{\cosh x_2}\right) \tag{8.29}$$

とできる．x_3 は $\mathbb{R}^2$ 全体で定義できるが，曲面が空間的となるのは $1-\varphi_x^2-\varphi_y^2>0$ を満たす部分，すなわち

$$\bigl\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,\tanh^2x+\tanh^2y<1\bigr\}$$

である．この極大曲面を**第 1 種 Scherk 曲面**という．

本小節の作り方から，次の命題を得る．

命題 8.13. 移動曲面で極大曲面となるのは平面と第 1 種 Scherk 曲面に限る.

問題 8.14. (8.26) で $c \neq 0$ のとき, (8.27) が成り立つことを証明せよ.

9 空間的共形はめ込み

M を 2 次元多様体, $f : M \to \mathbb{L}^3$ を空間的はめ込みとする. (x, y) を M の f に関する局所等温座標系とする. 対応

$$(x, y) \leftrightarrow z := x + \boldsymbol{i}y$$

によって M を Riemann 面とみなすと f は (空間的) 共形はめ込みとなる.

$$dz := dx + \boldsymbol{i}dy, \qquad d\bar{z} := dx - \boldsymbol{i}dy$$

とおくと, M の第 1 基本形式 I は

$$\mathrm{I} = g_{11}\left(dx^2 + dy^2\right) = g_{11}dzd\bar{z} \tag{9.1}$$

と表される.

次に $\mathbb{L}^3$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を複素双線形に拡張する. すなわち, ${}^t(z_1, z_2, z_3), {}^t(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$ に対して対称双線形関数 $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ を

$$\left\langle {}^t(z_1, z_2, z_3), {}^t(w_1, w_2, w_3) \right\rangle := z_1w_1 + z_2w_2 - z_3w_3 \in \mathbb{C}$$

で定める. すると (x, y) が等温座標系であることから

$$\begin{aligned}\langle f_z, f_z\rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(f_x - \boldsymbol{i}f_y), \frac{1}{2}(f_x - \boldsymbol{i}f_y)\right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\big(\langle f_x, f_x\rangle - \langle f_y, f_y\rangle - 2\boldsymbol{i}\langle f_x, f_y\rangle\big) = 0\end{aligned}$$

であり, 同様に $\langle f_{\bar{z}}, f_{\bar{z}}\rangle = 0$ である. また,

$$\langle f_z, f_{\bar{z}}\rangle = \left\langle \frac{1}{2}(f_x - \boldsymbol{i}f_y), \frac{1}{2}(f_x + \boldsymbol{i}f_y)\right\rangle = \frac{1}{4}\big(\langle f_x, f_x\rangle + \langle f_y, f_y\rangle\big) = \frac{1}{2}g_{11}$$

であるから, (9.1) により

$$\mathrm{I} = 2\langle f_z, f_{\bar{z}}\rangle\, dzd\bar{z} \tag{9.2}$$

が成り立つ.

問題 9.1. f の平均曲率について

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2g_{11}} = \frac{2\langle f_{z\bar{z}}, \nu\rangle}{g_{11}}$$

が成り立つことを確かめよ. ただし $\nu := (f_x \times f_y)/|f_x \times f_y|$ とする.

問題 9.2. f の第 2 基本形式について

$$\mathrm{I\!I} = \langle f_{zz}, \nu\rangle\, dz^2 + 2\,\langle f_{z\bar{z}}, \nu\rangle\, dzd\bar{z} + \langle f_{\bar{z}\bar{z}}, \nu\rangle\, d\bar{z}^2 \tag{9.3}$$

が成り立つことを証明せよ．さらに

$$Q := qdz^2, \qquad q := \langle f_{zz}, \nu\rangle = \frac{h_{11} - h_{22} - 2\boldsymbol{i}h_{12}}{4} \tag{9.4}$$

とおくと,

$$\mathrm{I\!I} = Q + \overline{Q} + H\mathrm{I} \tag{9.5}$$

が成り立つことを証明せよ．ただし H は f の平均曲率, I は M の第 1 基本形式である．(9.4) の Q を f の **Hopf 微分**と呼ぶ.

問題 9.3. 定義 2.14 に従って Gauss 曲率 K を計算し,

$$K = \frac{4}{g_{11}^2}|q|^2 - H^2 \tag{9.6}$$

が成り立つことを証明せよ．ただし H は f の平均曲率, q は (9.4) で定義した f の Hopf 微分 (の関数部分) である.

問題 9.4. 2 つの主曲率が一致する点を, 曲面 f の**臍点**という．$z \in M$ が f の臍点であることと z が q の零点であることは同値であることを証明せよ.

注意 9.5. 全ての点が臍点である曲面を**全臍的曲面**という．$\mathbb{R}^3$ の全臍的曲面は平面か二葉そう曲面 H^2 (の一部) であることが知られている．証明は, 例えば [UY, 命題 9.5] 等を参照のこと.

Gauss の公式 (2.1) および Weingarten の公式 (2.2) は次の 3 式に帰着される.

$$f_{zz} = \frac{(g_{11})_z}{g_{11}} f_z - q\nu \tag{9.7}$$

$$f_{z\bar{z}} = -\frac{g_{11}}{2} H\nu \tag{9.8}$$

$$\nu_z = -Hf_z - \frac{2}{g_{11}} q f_{\bar{z}} \tag{9.9}$$

ただし H は f の平均曲率, q は (9.4) で定義した f の Hopf 微分 (の関数部分) である．(9.7) および (9.8) を Gauss の公式, (9.9) を Weingarten の公式という．これら 3 式をまとめて **Gauss-Weingarten の公式**ということもある.

問題 9.6. 上の 3 式が成り立つことを証明せよ．また, 一般に複素数値関数 $\varphi : M \to \mathbb{C}$ に対して $\overline{(\varphi_z)} = \bar{\varphi}_{\bar{z}}$ が成り立つことと, f, ν, g_{11}, H が実数値 (または $\mathbb{L}^3$ 値) であることに注意して, (9.7), (9.9) がそれぞれ

$$f_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{(g_{11})_{\bar{z}}}{g_{11}} f_{\bar{z}} - \bar{q}\nu, \qquad \nu_{\bar{z}} = -\frac{2}{g_{11}}\bar{q} f_z - Hf_{\bar{z}}$$

と同値であることを確かめよ.

Gauss の方程式 (命題 2.20) および Codazzi の方程式 (命題 2.21) はそれぞれ

$$\frac{1}{4}\triangle \log g_{11} + \frac{2}{g_{11}}|q|^2 - \frac{g_{11}}{2}H^2 = 0 \tag{9.10}$$

$$q_{\bar{z}} = \frac{g_{11}}{2}H_z \tag{9.11}$$

となる．ただし $\triangle \log g_{11} = 4(\log g_{11})_{z\bar{z}}$ である．(9.10) を Gauss の方程式, (9.11) を Codazzi の方程式という．これら 2 式をまとめて **Gauss-Codazzi の方程式**ということもある．

問題 9.7. 上の 2 式が成り立つことを証明せよ (ヒント: $(f_{zz})_{\bar{z}}$ および $(f_{z\bar{z}})_z$ を Gauss-Weingarten の公式を用いて f_z, $f_{\bar{z}}$, ν の 1 次結合で表し, その各成分を比較する)．

Gauss の方程式 (9.10) および (9.6) から

$$K = -\frac{1}{2g_{11}}\triangle \log g_{11} \tag{9.12}$$

が成り立つ．これが Gauss の基本定理 (注意 (2.5)) である．

また, Codazzi の方程式 (9.11) から次の命題を得る．

命題 9.8. 空間的共形はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^3$ において, f の平均曲率が定数であることと f の Hopf 微分が正則であることは同値である．

問題 9.9. 空間的共形はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^3$ とその Gauss 曲率 K および単位法ベクトル場 $\nu = (f_x \times f_y)/|f_x \times f_y|$ において,

$$\nu_x \times \nu_y = -K f_x \times f_y \tag{9.13}$$

が成り立つことを証明せよ．

曲面論の基本定理 (定理 2.26) は次のように述べられる．

定理 9.10. M を単連結 Riemann 面とする．M 上の正値関数 g_{11}, M 上の実数値関数 H, M 上の複素数値関数 q とする．このとき, 第一基本形式を $g_{11}dzd\bar{z}$, 平均曲率を H, Hopf 微分を q とする空間的共形はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^3$ が存在するための必要十分条件は, g_{11}, H, q が Gauss-Codazzi の方程式 (9.10), (9.11) を満たすことである．さらにこのような f は (f の単位法ベクトル場が未来的または過去的と限定すると) $\mathbb{L}^3$ の合同変換を除いて一意に定まる．

10　Ricci 型定理

G. Ricci-Curbastro は与えられた 2 次元 Riemann 多様体 (M, I) が $\mathbb{R}^3$ の極小曲面として実現できるための必要十分条件を与えた．本節では, この定理の極大曲面版を I が (9.1) で与えられている場合に証明する．

定義 10.1. (M, I) を 2 次元 Riemann 多様体とする．I から定まる Gauss 曲率が恒等的に 0 となるとき, I を M 上の**平坦計量**という．

定理 10.2. M を単連結 Riemann 面, $\mathrm{I} = g_{11} dz d\bar{z}$ を M 上の Riemann 計量とする．M の各点で I から定まる Gauss 曲率 K は正であるとする．このとき, I を第一基本形式とする共形極大はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^3$ が存在するための必要十分条件は,

$$\tilde{\mathrm{I}} := \sqrt{K}\,\mathrm{I}$$

が M 上の平坦計量となることである．

証明. (必要性) I を第一基本形式とする共形極大はめ込み $f : M \to \mathbb{L}^3$ が存在したとする．$q dz^2$ を f の Hopf 微分とすると, (9.6) により

$$\tilde{\mathrm{I}} := \sqrt{K}\, g_{11} dz d\bar{z} = 2|q| dz d\bar{z}$$

であるから, $\tilde{\mathrm{I}}$ から定まる Gauss 曲率を $\tilde{K}$ とすると (9.12) により

$$\tilde{K} = -\frac{1}{4|q|} \triangle \log(2|q|)$$

となる．ここで

$$\triangle \log(2|q|) = \triangle \log 2 + \frac{1}{2} \triangle \log |q|^2 = \frac{1}{2} \triangle \log(q\bar{q}) = 2\big(\log(q\bar{q})\big)_{z\bar{z}}$$

であるから, q が正則であること (命題 9.8) に注意すると $\big(\log(q\bar{q})\big)_{z\bar{z}} = 0$ を得る．従って $\tilde{K} = 0$ が成り立つ．

(十分性) $\tilde{\mathrm{I}}$ が平坦計量であると仮定すると, (9.12) により $\triangle \log(\sqrt{K}\, g_{11}) = 0$ が成り立つ．すなわち $\log(\sqrt{K}\, g_{11})$ は M 上の調和関数である．よって $\log(\sqrt{K}\, g_{11})$ を実部とする M 上の正則関数 $\psi(z)$ が存在する (命題 A.2)．ここで

$$q(z) := \frac{1}{2} e^{\psi(z)} = \frac{1}{2} e^{\log(\sqrt{K}\, g_{11}) + \boldsymbol{i} \operatorname{Im} \psi(z)} = \frac{1}{2} \sqrt{K}\, g_{11}\, e^{\boldsymbol{i} \operatorname{Im} \psi(z)}$$

とおくと q も M 上の正則関数である．すなわち

$$q_{\bar{z}} = 0 \tag{10.1}$$

が成り立つ．また,

$$|q|^2 = \frac{1}{4} \left| \sqrt{K}\, g_{11}\, e^{\boldsymbol{i} \operatorname{Im} \psi(z)} \right|^2 = -\frac{1}{4} K g_{11}^2$$

が成り立つことと, (9.12) から $\triangle \log g_{11} = -2K g_{11}$ となることを用いると,

$$\frac{1}{4} \triangle \log g_{11} + \frac{2}{g_{11}} |q|^2 = 0 \tag{10.2}$$

を得る．(10.2), (10.1) はそれぞれ (9.10), (9.11) において $H \equiv 0$ としたものと同値であるから, 曲面論の基本定理 (定理 9.10) により, I を第一基本形式, $H (= 0)$ を平均曲率, $q dz^2$ を Hopf 微分とする共形はめ込み $f : M \to \mathbb{R}^3$ が存在する． □

11 Gauss 写像

M を Riemann 面とする．空間的共形はめ込み $f: M \to \mathbb{L}^3$ を，局所等温座標系 $z = x + \boldsymbol{i}y$ を用いて

$$f(x,y) = {}^t\big(x_1(x,y),\, x_2(x,y),\, x_3(x,y)\big)$$

と表し,

$$\nu = \frac{f_x \times f_y}{|f_x \times f_y|} : M \to H^2 = \{{}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^3 \,;\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}$$

を f の Gauss 写像 (すなわち，f に沿う M 上の単位法ベクトル場) とする．G を ν と Lorentz 立体射影 $\sigma : H^2 \to (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{|z| = 1\}$

(11.1)

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + \boldsymbol{i}x_2}{1 - x_3} & {}^t(x_1, x_2, x_3) \neq {}^t(0,0,1), \\ \infty & {}^t(x_1, x_2, x_3) = {}^t(0,0,1), \end{cases} \qquad \sigma^{-1}(z) = \frac{1}{|z|^2 - 1}\begin{pmatrix} -2\,\mathrm{Re}\, z \\ -2\,\mathrm{Im}\, z \\ |z|^2 + 1 \end{pmatrix}$$

との合成とする．すなわち,

$$G := \sigma \circ \nu : M \to (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{|z| = 1\} \tag{11.2}$$

とする．立体射影によって H^2 と $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{|z| = 1\}$ とを同一視して，G も f の **Gauss 写像**と呼ぶことにする．本節ではこの Gauss 写像 G の性質を調べ，G が正則または反正則であるための必要十分条件を与える．

M 上の複素数値 $(1,0)$ 次微分形式 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を

$$\phi_\alpha := h_\alpha dz, \qquad h_\alpha := \frac{\partial x_\alpha}{\partial z} \qquad (\alpha = 1,2,3) \tag{11.3}$$

で定める．h_α は M 上の複素数値関数である．(M 上の関数 h と複素局所座標 z を用いて hdz と表される微分形式を $(1,0)$ **次微分形式**という．特に h が M 上の正則関数のときは hdz を**正則 1 次微分形式**という (**第 1 種 Abel 微分**ということもある)．また，$hd\bar{z}$ とと表される微分形式を $(0,1)$ **次微分形式**という.) ϕ_3 を f の**高さ微分**という．直接計算で次の 2 式が得られる．

$$\langle f_z, f_z \rangle = h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 \tag{11.4}$$

$$\langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle = |h_1|^2 + |h_2|^2 - |h_3|^2 \tag{11.5}$$

問題 11.1. (11.4), (11.5) が成り立つことを証明せよ．

命題 11.2. M を $\mathbb{C}$ の領域，$f = {}^t(x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{L}^3$ を空間的 C^∞ 写像とする．z を M の座標系とする．ϕ_α を (11.3) で定める．このとき次が成り立つ．

(i) $\alpha = 1,2,3$ に対して，x_α が調和関数であることと h_α が正則関数であることは同値である．

(ii) f が z を等温座標系とする空間的共形はめ込みであることと,

(C) $$h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 \equiv 0$$

かつ

(R) $$|h_1|^2 + |h_2|^2 - |h_3|^2 > 0$$

が成り立つことは同値である.

(C) を曲面の**共形条件**, (R) を曲面の**正則条件**という.

命題 11.2 の証明. (i) $(x_\alpha)_z = h_\alpha$ であるから, $(x_\alpha)_{z\bar{z}} = (h_\alpha)_{\bar{z}}$ が成り立つ. (A.2) により結論を得る.

(ii) $4\langle f_z, f_z\rangle = g_{11} - g_{22} - 2\boldsymbol{i}g_{12}$ であるから, (9.2) により, f が z を等温座標系とする空間的共形はめ込みであることと $\langle f_z, f_z\rangle = 0$ かつ $\langle f_z, f_{\bar{z}}\rangle > 0$ が成り立つことは同値である. よって (C), (R) から結論を得る.

□

問題 11.3. 次の (1), (2) が成り立つことを証明せよ.

(1) $(h_\alpha)_{\bar{z}}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ の共通零点と H の零点は一致する. 特に, h_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ が全て正則関数であるための必要十分条件は, H が恒等的に 0 となることである.

(2) $(h_\alpha/g_{11})_z$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ の共通零点と q の零点は一致する. 特に, h_α/g_{11} $(\alpha = 1, 2, 3)$ が全て反正則関数であるための必要十分条件は, q が恒等的に 0 となることである.

(ヒント: (1): (9.8) を用いよ. (2): (9.7) を用いよ.)

空間的共形はめ込み $f = {}^t(x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{L}^3$ が与えられたとき, 命題 11.2 により (11.3) の h_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ は共形条件 (C) および正則条件 (R) を満たす. $h_3 \equiv 0$ ならば実数値関数 x_3 は定数となり, f は平面になるので, 以下 h_3 は恒等的に 0 でないと仮定する. このとき, (C) により $h_1 + \boldsymbol{i}h_2$ および $h_1 - \boldsymbol{i}h_2$ も恒等的に 0 ではない. 実際, (C) は

(11.6) $$(h_1 + \boldsymbol{i}h_2)(h_1 - \boldsymbol{i}h_2) - h_3^2 \equiv 0$$

と同値であるから, $h_1 + \boldsymbol{i}h_2 \equiv 0$ または $h_1 + \boldsymbol{i}h_2 \equiv 0$ ならば ϕ_3 が恒等的に 0 でないことに矛盾する.

命題 11.4. $f = {}^t(x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{L}^3$ を x_3 が定数でない空間的共形はめ込み, $G : M \to (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{|z| = 1\}$ を f の Gauss 写像とする. このとき G は (11.3) の ϕ_α を用いて

(11.7) $$G = \frac{-\phi_3}{\phi_1 - \boldsymbol{i}\phi_2} = \frac{-h_3}{h_1 - \boldsymbol{i}h_2}$$

と表される.

証明. $f_z = {}^t\big(h_1,\, h_2,\, h_3\big),\ f_{\bar z} = \overline{(f_z)} = {}^t\big(\bar h_1,\, \bar h_2,\, \bar h_3\big)$ であるから

$$f_x = \quad f_z + f_{\bar z} \ = \begin{pmatrix} h_1 + \bar h_1 \\ h_2 + \bar h_2 \\ h_3 + \bar h_3 \end{pmatrix}, \qquad f_y = \boldsymbol{i}(f_z - f_{\bar z}) = \boldsymbol{i} \begin{pmatrix} h_1 - \bar h_1 \\ h_2 - \bar h_2 \\ h_3 - \bar h_3 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$f_x \times f_y = 2\boldsymbol{i} \begin{pmatrix} h_2 \bar h_3 - \bar h_2 h_3 \\ h_3 \bar h_1 - \bar h_3 h_1 \\ -(h_1 \bar h_2 - \bar h_1 h_2) \end{pmatrix}$$

を得る．また,

$$|f_x \times f_y| = \sqrt{-\langle f_x \times f_y, f_x \times f_y \rangle} = g_{11} = 2\langle f_z, f_{\bar z} \rangle = 2(h_1 \bar h_1 + h_2 \bar h_2 - h_3 \bar h_3)$$

であるから, $\nu = {}^t(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ とすると

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \frac{\boldsymbol{i}}{h_1 \bar h_1 + h_2 \bar h_2 - h_3 \bar h_3} \begin{pmatrix} h_2 \bar h_3 - \bar h_2 h_3 \\ h_3 \bar h_1 - \bar h_3 h_1 \\ -(h_1 \bar h_2 - \bar h_1 h_2) \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\text{(11.8)} \qquad G = \sigma(\nu) = \frac{\nu_1 + \boldsymbol{i}\nu_2}{1 - \nu_3} = \frac{\boldsymbol{i}(h_2 \bar h_3 - \bar h_2 h_3) - (h_3 \bar h_1 - \bar h_3 h_1)}{(h_1 \bar h_1 + h_2 \bar h_2 - h_3 \bar h_3) + \boldsymbol{i}(h_1 \bar h_2 - \bar h_1 h_2)}$$

となる．ここで (11.6) に注意すると (11.8) の右辺は

$$\begin{aligned}
(\text{分子}) &= (-\bar h_1 - \boldsymbol{i}\bar h_2)h_3 + (h_1 + \boldsymbol{i}h_2)\bar h_3 \\
&= -\overline{(h_1 - \boldsymbol{i}h_2)}h_3 + (h_1 + \boldsymbol{i}h_2)\bar h_3 \\
&= -\overline{(h_1 - \boldsymbol{i}h_2)}h_3 + \frac{h_3^2 \bar h_1}{h_1 - \boldsymbol{i}h_2} \\
&= \frac{h_3}{h_1 - \boldsymbol{i}h_2}\left(-|h_1 - \boldsymbol{i}h_2|^2 + |h_3|^2\right), \\
(\text{分母}) &= h_1(\bar h_1 + \boldsymbol{i}\bar h_2) + h_2(-\boldsymbol{i}\bar h_1 + \bar h_2) - |h_3|^2 \\
&= h_1(\bar h_1 + \boldsymbol{i}\bar h_2) - \boldsymbol{i}h_2(\bar h_1 + \boldsymbol{i}\bar h_2) - |h_3|^2 \\
&= (h_1 - \boldsymbol{i}h_2)(\bar h_1 + \boldsymbol{i}\bar h_2) - |h_3|^2 \\
&= |h_1 - \boldsymbol{i}h_2|^2 - |h_3|^2
\end{aligned}$$

となるので結論を得る． □

この命題を用いて, ϕ_1 および ϕ_2 を G と ϕ_3 の式で表す．

$$G^{-1}\phi_3 \left(= \frac{1}{G}\phi_3 \right) = -(\phi_1 - \boldsymbol{i}\phi_2),$$

であり, (11.6) により

$$G\phi_3 = Gh_3 dz = \frac{-h_3^2}{h_1 - \boldsymbol{i}h_2}dz = \frac{-(h_1 + \boldsymbol{i}h_2)(h_1 - \boldsymbol{i}h_2)}{h_1 - \boldsymbol{i}h_2}dz = -(h_1 + \boldsymbol{i}h_2)dz = -\phi_1 - \boldsymbol{i}\phi_2$$

であるから

$$\phi_1=-\frac{1}{2}\left(G^{-1}+G\right)\phi_3,\qquad \phi_2=-\frac{\boldsymbol{i}}{2}\left(G^{-1}-G\right)\phi_3, \tag{11.9}$$

すなわち

$$h_1=-\frac{1}{2}\left(G^{-1}+G\right)h_3,\qquad h_2=-\frac{\boldsymbol{i}}{2}\left(G^{-1}-G\right)h_3 \tag{11.10}$$

となる.

注意 11.5. M が単連結ならば, (11.3), (11.9) および系 A.14 により共形はめ込み $f={}^t(x_1,x_2,x_3):M\to\mathbb{L}^3$ は f の Gauss 写像 G と高さ微分 ϕ_3 を用いて

$$f=-{}^t\left(\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}\left(\frac{1}{G}+G\right)\phi_3+c_1,\ \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{i}\left(\frac{1}{G}-G\right)\phi_3+c_2,\ -\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}2\phi_3+c_3\right) \tag{11.11}$$

と表すことができる. ただし積分は固定された 1 点 $z_0\in M$ を始点とし任意の点 $z\in M$ を終点とする M 内の曲線に沿う線積分であり, $c_\alpha\in\mathbb{R}$ $(\alpha=1,2,3)$ は定数である. ${}^t(c_1,c_2,c_3)$ の値を変えても曲面が平行移動するだけなので以後省略する. また, 積分の始点と終点も省略して, 以後 (11.11) を簡単に

$$f=-\operatorname{Re}\int{}^t\big(G^{-1}+G,\ \boldsymbol{i}(G^{-1}-G),\ -2\big)\phi_3 \tag{W}$$

と書くことにする.

次に, 空間的共形はめ込み $f:M\to\mathbb{L}^3$ の基本形式や曲率を, f の Gauss 写像 G と高さ微分 ϕ_3 を用いて表す. まず (9.2) と命題 11.2 (iii) により, $\phi_\alpha\bar{\phi}_\alpha=|h_\alpha|^2dzd\bar{z}$ に注意すると,

$$\mathrm{I}=2\left\langle f_z,f_{\bar z}\right\rangle dzd\bar{z}=2\left(\phi_1\bar{\phi}_1+\phi_2\bar{\phi}_2-\phi_3\bar{\phi}_3\right)=\left(|G|^{-1}-|G|\right)^2\phi_3\bar{\phi}_3 \tag{11.12}$$

となる. 第 2 基本形式 (9.5) を G と ϕ_3 で表すために, Hopf 微分 $Q=qdz^2$ と平均曲率 H を G と ϕ_3 で表す.

$$f_{zz}={}^t\big((h_1)_z,\,(h_2)_z,\,(h_3)_z\big),\qquad f_{z\bar z}={}^t\big((h_1)_{\bar z},\,(h_2)_{\bar z},\,(h_3)_{\bar z}\big)$$

に (11.10) を代入して

$$\nu={}^t\left(\frac{-2\operatorname{Re}G}{|G|^2-1},\ \frac{-2\operatorname{Im}G}{|G|^2-1},\ \frac{|G|^2+1}{|G|^2-1}\right) \tag{11.13}$$

との内積を計算すると,

$$\langle f_{zz},\nu\rangle=\frac{G_z}{G}h_3,\qquad \langle f_{z\bar z},\nu\rangle=\frac{G_{\bar z}}{G}h_3, \tag{11.14}$$

を得る. よって f の Hopf 微分は

$$Q=\langle f_{zz},\nu\rangle\,dz^2=\frac{G_zdz}{G}h_3dz=\frac{\phi_3\partial G}{G}, \tag{11.15}$$

平均曲率は

$$H = \frac{2}{g_{11}} \langle f_{z\bar{z}}, \nu \rangle = \frac{2\overline{G}G_{\bar{z}}}{(1-|G|^2)^2\bar{h}_3} = \frac{2\overline{G}\,\overline{\partial}G}{(1-|G|^2)^2\bar{\phi}_3} \tag{11.16}$$

と表される．ただし

$$\partial G := G_z dz, \qquad \overline{\partial}G := G_{\bar{z}} d\bar{z}$$

である ($dG = \partial G + \overline{\partial}G$ である).

注意 11.6. $\langle f_{z\bar{z}}, \nu \rangle$ が実数値であることに注意すると, (11.14) により $G^{-1}G_{\bar{z}}h_3 = \overline{G}\,\overline{G}_z\bar{h}_3$ が成り立つことが分かる．このことから, 平均曲率は

$$H = \frac{1}{(1-|G|^2)^2}\left(\frac{\overline{G}\,\overline{\partial}G}{\bar{\phi}_3} + \frac{G\partial\overline{G}}{\phi_3}\right) = \frac{2G\partial\overline{G}}{(1-|G|^2)^2\phi_3} \tag{11.17}$$

などと表すこともできる．

上で求めた Q, H を用いると f の第 2 基本形式は

$$\mathrm{I\!I} = Q + \overline{Q} + H\mathrm{I} = \frac{\phi_3 dG}{G}\frac{\bar{\phi}_3 d\overline{G}}{\overline{G}} \tag{11.18}$$

となる．また, M の Gauss 曲率 K は, (9.6) から

$$K = \frac{4}{g_{11}^2}|q|^2 - H^2 = \frac{4|G|^2\left(\partial G\overline{\partial G} - \overline{\partial}G\partial\overline{G}\right)}{(1-|G|^2)^4|\phi_3|^2} \tag{11.19}$$

となる．

問題 11.7. f の第 3 基本形式について

$$\mathrm{I\!I\!I} = \langle \nu_z, \nu_z \rangle dz^2 + 2\langle \nu_z, \nu_{\bar{z}} \rangle dzd\bar{z} + \langle \nu_{\bar{z}}, \nu_{\bar{z}} \rangle d\bar{z}^2$$

が成り立つことを証明せよ．さらに (11.13) を用いて

$$\mathrm{I\!I\!I} = \frac{4dGd\overline{G}}{(1-|G|^2)^2} \tag{11.20}$$

が成り立つことを証明せよ．

定理 11.8. $f = {}^t(x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{L}^3$ を x_3 が定数でない共形はめ込み, $z = x + \boldsymbol{i}y$ をその等温座標系, $G : M \to (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{|z| = 1\}$ を f の Gauss 写像とする．このとき次の (i), (ii) が成り立つ．

(i) $G_{\bar{z}}$ の零点と f の平均曲率が消える点は一致する．特に, $G_{\bar{z}}$ が恒等的に 0 であるための必要十分条件は, f が極大曲面となることである．

(ii) G_z の零点と f の臍点は一致する．特に, G_z が恒等的に 0 であるための必要十分条件は, f が全臍的曲面となることである (注意 9.5 参照).

証明. (i) 点 $p \in M$ において $H(p) = 0$ ならば問題 11.3 (1) により $(h_\alpha)_{\bar z} = 0$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ であるから,

$$G_{\bar z}(p) = \left(\frac{-h_3}{h_1 - \boldsymbol{i} h_2}\right)_{\bar z}(p) = 0$$

が成り立つ. 逆に, $G_{\bar z}(p) = 0$ ならば (11.16) により $H(p) = 0$ となる.

(ii) 点 $p \in M$ が f の臍点ならば問題 9.4 により $q(p) = 0$ となるので, 問題 11.3 (2) により $(h_\alpha/g_{11})_z(p) = 0$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ であるから,

$$G_z(p) = \left(\frac{-h_3}{h_1 - \boldsymbol{i} h_2}\right)_z = \left(\frac{-h_3/g_{11}}{(h_1 - \boldsymbol{i} h_2)/g_{11}}\right)_z(p) = 0$$

が成り立つ. 逆に, $G_z(p) = 0$ ならば (11.15) により $q(p) = 0$ となるので, 問題 9.4 により p は f の臍点である. □

本節の最後に, 次節で使う命題をいくつか証明しておく.

補題 11.9. G は次の Beltrami 方程式

$$qG_{\bar z} = \frac{g_{11}}{2} H G_z \tag{11.21}$$

を満たす.

証明. (9.4) および (11.14) の左の式から

$$q = \frac{G_z}{G} h_3 \tag{11.22}$$

が成り立つ. 一方, (11.16) の左の等号および (11.14) の右の式から

$$H = \frac{2}{g_{11}} \frac{G_{\bar z}}{G} h_3 \tag{11.23}$$

が成り立つ. 従って結論を得る. □

補題 11.10. ϕ_α の外微分について, 次が成り立つ.

$$d\phi_1 = \frac{-2\operatorname{Re} G}{|G|^2 - 1}\frac{\phi_3}{G} \wedge \overline{\partial} G, \quad d\phi_2 = \frac{-2\operatorname{Im} G}{|G|^2 - 1}\frac{\phi_3}{G} \wedge \overline{\partial} G, \quad d\phi_3 = \frac{|G|^2 + 1}{|G|^2 - 1}\frac{\phi_3}{G} \wedge \overline{\partial} G. \tag{11.24}$$

証明. $\phi_\alpha = h_\alpha dz$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ であるから, $d\phi_\alpha = -(h_\alpha)_{\bar z} dz \wedge d\bar z$ である. よって (11.13) に注意すると (11.24) を示すためには

$$-(h_\alpha)_{\bar z} = \nu_\alpha \frac{h_3}{G} G_{\bar z} \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{11.25}$$

を示せばよい. $f_z = {}^t(h_1, h_2, h_3)$ の両辺を $\bar z$ で微分すると $f_{z\bar z} = {}^t\big((h_1)_{\bar z}, (h_2)_{\bar z}, (h_3)_{\bar z}\big)$ であり, 一方 (9.8) および (11.23) により

$$f_{z\bar z} = -\frac{g_{11}}{2} H\nu = -\frac{h_3}{G} G_{\bar z} \nu$$

であるから (11.25) が成り立つ. □

命題 11.11. f の Gauss 写像 G と平均曲率 H は

$$H\left(G_{z\bar{z}}-\frac{2}{|G|^2-1}\overline{G}G_zG_{\bar{z}}\right)=H_zG_{\bar{z}} \tag{11.26}$$

を満たす.

証明. $H(p)=0$ となる点 $p\in M$ では定理 11.8 (i) により $G_{\bar{z}}(p)=0$ であるから (11.26) は成り立つ. よって $H(p)\neq 0$ となる点 $p\in M$ で (11.26) が成り立つことを示せばよい. このとき定理 11.8 (i) により $G_{\bar{z}}(p)\neq 0$ である. (11.24) から

$$-(h_3)_{\bar{z}}=\frac{|G|^2+1}{|G|^2-1}\frac{h_3}{G}G_{\bar{z}} \tag{11.27}$$

が成り立つことに注意する. (11.22) の両辺を $\bar{z}$ で微分すると

$$q_{\bar{z}}=\left(\frac{G_z}{G}\right)_{\bar{z}}h_3+\frac{G_z}{G}(h_3)_{\bar{z}}$$

となる. この $q_{\bar{z}}$ と $(h_3)_{\bar{z}}$ にそれぞれ (9.11), (11.27) を代入して整理すると

$$\frac{g_{11}}{2}H_z=\frac{h_3}{G}\left(G_{z\bar{z}}-\frac{2}{|G|^2-1}\overline{G}G_zG_{\bar{z}}\right)$$

となる. さらに右辺の h_3/G に (11.23) を代入して整理すると (11.26) を得る. $\square$

$\mathbb{R}^3$ の共形はめ込みに関して (11.26) と同様の式は剱持勝衛 [Ke1] によって 1979 年に得られた ([Ke2] も参照). この命題からただちに次の系が得られる.

系 11.12. f が平均曲率一定 $(\neq 0)$ 曲面ならば, f の Gauss 写像は

$$G_{z\bar{z}}-\frac{2}{|G|^2-1}\overline{G}G_zG_{\bar{z}}=0 \tag{11.28}$$

を満たす.

注意 11.13. f が極大曲面ならば, (11.26) は自明な式である.

問題 11.14. f の Gauss 写像 G と Hopf 微分 $Q=qdz^2$ は

$$q\left(G_{z\bar{z}}-\frac{2}{|G|^2-1}\overline{G}G_zG_{\bar{z}}\right)=q_{\bar{z}}G_z \tag{11.29}$$

を満たすことを証明せよ (ヒント: (11.26) に (9.11) と (11.21) を代入する).

12 表現公式

定理 12.1 (Gauss 写像と高さ微分による曲面の表現公式)**.** M を単連結 Riemann 面とする. M 上の関数 $G:M\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ と M 上の $(1,0)$ 次微分形式 $\phi_3=h_3dz$ (ただし z は M の局所複素座標系) が M の各点で次の 3 つの条件を満たすとする.

(i) $\dfrac{\bar{\partial} G}{G}\phi_3 = \overline{\left(\dfrac{\bar{\partial} G}{G}\phi_3\right)}$,

(ii) 微分方程式 (11.27),

(iii) $0 < \left(|G|^{-1} - |G|\right)|h_3| < \infty$.

このとき (W) の f は M から $\mathbb{R}^3$ への共形はめ込みを定め, G, ϕ_3 はそれぞれ f の Gauss 写像, 高さ微分になる.

逆に, 単連結 Riemann 面 M から $\mathbb{R}^3$ への共形はめ込み $f : M \to \mathbb{R}^3$ が与えられたとき, その高さ微分 ϕ_3 が恒等的に 0 でなければ, ϕ_3 と f の Gauss 写像 G は M の各点で上の 3 つの条件を満たし, f は (W) を満たす.

証明. 定理の後半は前節で証明しているから前半のみを示す. 最初に $\phi_3 + \bar{\phi}_3$ が閉形式, すなわち $d(\phi_3 + \bar{\phi}_3) = 0$ であることを示す.

$$d(\phi_3 + \bar{\phi}_3) = -2\boldsymbol{i}\,\mathrm{Im}(h_3)_{\bar{z}}\,dz \wedge d\bar{z}$$

であるから, $\phi_3 + \bar{\phi}_3$ が閉形式であることと $(h_3)_{\bar{z}}$ が実数値関数であることは同値である. 一方条件 (i), (ii) により $(h_3)_{\bar{z}}$ は実数値関数であるから $\phi_3 + \bar{\phi}_3$ は閉形式である. 次に, ϕ_1, ϕ_2 を (11.9) で定める. 条件 (ii) に注意すると, 直接計算で (11.24) の左の式と中央の式が成り立つことが確かめられる. よって条件 (i) により $\phi_1 + \bar{\phi}_1$, $\phi_2 + \bar{\phi}_2$ はともに閉形式である. よって Poincaré の補題により M 上の関数 x_α が存在して

$$dx_\alpha = \phi_\alpha + \bar{\phi}_\alpha$$

が成り立つ. M 上の固定された 1 点 z_0 に対して $x_\alpha(z_0) = c_\alpha \in \mathbb{R}$ となるように x_α を選べば

$$x_\alpha = \int_{z_0}^{z} \left(\phi_\alpha + \bar{\phi}_\alpha\right) + c_\alpha = 2\,\mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \phi_\alpha + c_\alpha$$

となるから x_α は M 上の実数値関数である (系 A.14 参照). よって

$$f := {}^t(x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{L}^3$$

とおくと (W) が成り立つ. 直接計算により

$$\langle f_z, f_z\rangle = \langle f_{\bar{z}}, f_{\bar{z}}\rangle = 0, \quad \langle f_z, f_{\bar{z}}\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|G|} - |G|\right)^2 |h_3|^2$$

が得られるので, 条件 (iii) により f は空間的共形はめ込みであって, ϕ_3 は f の高さ微分になる. さらに直接計算により

$$\frac{-\phi_3}{\phi_1 - \boldsymbol{i}\phi_2} = G$$

が確かめられるから, 命題 11.4 により G は f の Gauss 写像である. □

注意 12.2. この定理の $f: M \to \mathbb{R}^L$ に対して, その第 1 基本形式 I, 第 2 基本形式 II, 第 3 基本形式 III, Gauss 曲率 K, 平均曲率 H, Hopf 微分 Q はそれぞれ (11.12), (11.18), (11.20), (11.19), (11.16) (または (11.17)), (11.15) で与えられる.

曲面が与えられるとその Gauss 写像と高さ微分が定まるが, この曲面を $\mathbb{L}^3$ の合同変換で動かすと Gauss 写像および高さ微分もそれぞれ変化する. このことに関して次の命題が成り立つ.

命題 12.3. $f: M \to \mathbb{L}^3$, $\hat{f}: M \to \mathbb{L}^3$ を曲面, G, ϕ_3, $\hat{G}$, $\hat{\phi}_3$ をそれぞれの Gauss 写像および高さ微分とする. ある定数行列 $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ とある定ベクトル $b \in \mathbb{L}^3$ が存在して

$$\hat{f} = Af + b \tag{12.1}$$

が成り立つための必要十分条件は, ある定数 $p, q \in \mathbb{C}$ が存在して $|p|^2 - |q|^2 = 1$ かつ

$$\hat{G} = \frac{pG+q}{\bar{q}G+\bar{p}}, \qquad \hat{\phi}_3 = \frac{(pG+q)(\bar{q}G+\bar{p})}{G}\phi_3 \tag{12.2}$$

が成り立つことである.

証明. f を (W) で定義された曲面とする. f 定ベクトル $b \in \mathbb{L}^3$ を加えると曲面は平行移動するが, これは線積分の初期値を取り替えることに対応するので G, ϕ_3 は変わらない. 任意の $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ に対して

$$\hat{f} := Af$$

とおき, $\hat{G}$, $\hat{\phi}_3$ を $\hat{f}$ の Gauss 写像および高さ微分とする. このとき f の単位法ベクトル場 ν も $\hat{\nu} := A\nu$ に変化する. $G = \sigma(\nu)$, $\hat{G} = \sigma(\hat{\nu})$ (ただし σ は (11.1) で定義される Lorentz 立体射影) であるから, 命題 A.19 により $F \in \mathrm{Ad}^{-1}(A)$ を用いると

$$\hat{G} = \sigma(\hat{\nu}) = \sigma(A\nu) = F \star \sigma(\nu) = F \star G$$

が成り立つ. よって F を (A.14) で定めると (12.2) の左の等式が成り立つ. また, このとき $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ は (A.15) で与えられ, かつ $\hat{f}$ の第 3 成分は $2\,\mathrm{Re}\int\hat{\phi}_3$ であるから,

$$2\,\mathrm{Re}\int\hat{\phi}_3 = 2\,\mathrm{Re}\int\frac{(pG+q)(\bar{q}G+\bar{p})}{G}\phi_3$$

が成り立つことが $\hat{f} = Af$ の第 3 成分を直接計算するとで得られる. 従って (12.2) の右の等式が成り立つ.

逆に $(\hat{G}, \hat{\phi}_3)$ が (12.2) で与えられたとき, $p, q \in \mathbb{C}$ が $|p|^2 - |q|^2 = 1$ を満たす定数であることに注意すると

$$\left(|\hat{G}|^{-1} - |\hat{G}|\right)^2 \hat{\phi}_3\bar{\hat{\phi}}_3 = \left(|G|^{-1} - |G|\right)^2 \phi_3\bar{\phi}_3, \qquad \frac{\hat{\phi}_3 d\hat{G}}{\hat{G}} = \frac{\phi_3 dG}{G}$$

が成り立つことが直接計算により確かめられる. よって G, ϕ_3 から定まる曲面と $\hat{G}$, $\hat{\phi}_3$ から定まる曲面は第 1 基本形式と第 2 基本形式が一致するので, ある行列式が 1 の定数行列 $A \in \mathrm{O}(2,1)$ とあ

る定ベクトル $b \in \mathbb{L}^3$ が存在して (12.1) を満たす．さらに $|p|^2 - |q|^2 = 1$ から

$$|pG + q|^2 - |\bar{q}G + \bar{p}|^2 = |G|^2 - 1$$

が成り立つことが直接計算で分かるので, $|\hat{G}| \gtreqless 1$ であることと $|G| \gtreqless 1$ であることは同値である (不等号の向き同順). 従って Lorentz 立体射影 (11.1) の定義から f の単位法ベクトル場 ν の第 3 成分の符号と $\hat{f}$ の単位法ベクトル場 $\hat{\nu}$ の第 3 成分の符号は一致するので, A の (3,3) 成分は正である．よって $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ である． □

この表現公式 (W) は Gauss 写像と高さ微分から曲面を与えるが, f の平均曲率 $H : M \to \mathbb{R}$ が M の各点で 0 にならない曲面を考えると, 命題 11.8 (i) により $G_{\bar{z}}$ も 0 にならない．そして (11.17) により

$$\phi_3 = \frac{2G\partial\overline{G}}{(1-|G|^2)^2 H}$$

が成り立つから, 曲面を Gauss 写像 G と平均曲率 H で

$$f = \mathrm{Re}\int {}^t\!\left(G^{-1} + G,\ \boldsymbol{i}(G^{-1} - G),\ -2\right)\frac{-2G\partial\overline{G}}{(1-|G|^2)^2 H} \tag{12.3}$$

と表すことができる．

また, f の Hopf 微分 $Q = q dz^2$ の $q : M \to \mathbb{C}$ が M の各点で 0 にならない曲面を考えると, 命題 11.8 (ii) により G_z も 0 にならない．そして (11.15) により

$$\phi_3 = G\frac{Q}{\partial G}$$

が成り立つから, 曲面を Gauss 写像 G と Hopf 微分 Q で

$$f = -\,\mathrm{Re}\int {}^t\!\left(G^{-1} + G,\ \boldsymbol{i}(G^{-1} - G),\ -2\right)G\frac{Q}{\partial G}, \qquad Q = q dz^2 \tag{12.4}$$

と表すことができる．(12.3) は**剱持型の表現公式**と呼ばれている ([Ke1], [AN]).

13 Weierstrass 型表現公式

前節 (第 12 節) の表現公式において, 特に $f : M \to \mathbb{L}^3$ の平均曲率 H が恒等的に消えている場合, すなわち f が空間的極大はめ込みの場合, 定理 12.1 の条件 (i), (ii) は自動的に成り立つ．さらに問題 11.3 (1) により ϕ_3 は M 上の正則 1 次微分形式, 定理 11.8 (i) により G は M 上の有理型関数である．従って次の定理を得る．

定理 13.1 (Weierstrass 型表現公式). M を単連結 Riemann 面, $f : M \to \mathbb{L}^3$ を空間的共形極大はめ込みとする．このとき, 定理 12.1 の条件 (iii) を満たす M 上の有理型関数 G と M 上の正則 1 次微分形式 $\phi_3 = h_3 dz$ が存在して, (W) が成り立つ．逆に, 定理 12.1 の条件 (iii) を満たす M 上の有理型関数 G と M 上の正則 1 次微分形式 $\phi_3 = h_3 dz$ に対して, (W) は空間的共形極大はめ込みを定める．(G, ϕ_3) を f の **Weierstrass data** という．

注意 13.2. この公式 (と同値な式) は小林治によって 1983 年に得られた ([Kob]) ので現在**小林治の表現公式**と呼ばれている. L. McNertney ([Mc]) も同様の公式を導いている.

注意 13.3. (W) において $\eta = -\phi_3/G$ とおき, さらに $g = G$ とすると

$$f = \mathrm{Re} \int {}^t\big(1+g^2,\ \boldsymbol{i}(1-g^2),\ -2g\big)\eta \tag{13.1}$$

と書くことができる. また, (13.1) において $\eta = (1+\hat{g})^2\hat{\eta}/2$, $g = (1-\hat{g})/(1+\hat{g})$ とおくと

$$f = \mathrm{Re} \int {}^t\big(\hat{g}^2+1,\ 2\boldsymbol{i}\hat{g},\ \hat{g}^2-1\big)\hat{\eta} \tag{13.2}$$

と書くこともできる. (13.1), (13.2) をそれぞれ**小林治の第 1 種表現公式**, **第 2 種表現公式**という.

注意 13.4. M が単連結でない場合, (W) の線積分の値は一般に積分経路に依存する.

$$\mathrm{Per}(f) = \left\{ -\mathrm{Re} \oint_{\ell} {}^t\big(G^{-1}+G,\ \boldsymbol{i}(G^{-1}-G),\ -2\big)\phi_3\ ;\ \ell \in H_1(M, \mathbb{Z}) \right\} \tag{P}$$

とおく. f が M 上一価になるための必要十分条件は $\mathrm{Per}(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つことである. (P) を極大曲面の**周期条件**という.

例 13.5. (13.1) の g, η に以下のデータを代入すると得られる.

(1) 第 1 種 Enneper 曲面: $M = \mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\}$, $g = z$, $\eta = dz$.
(2) 第 1 種懸垂面: $M = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{|z| = 1\})$, $g = z$, $\eta = z^{-2}dz$.
(3) 常螺旋面: $M = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{|z| = 1\})$, $g = z$, $\eta = \boldsymbol{i}z^{-2}dz$.
(4) 第 1 種 Scherk 曲面: $M = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{|z| = 1\}$, $g = z$, $\eta = (z^4-1)^{-1}dz$.

例 13.6. (13.2) の $\hat{g}$, $\hat{\eta}$ に以下のデータを代入すると得られる.

(1) 第 2 種 Enneper 曲面: $M = \mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\}$, $\hat{g} = z$, $\hat{\eta} = dz$.
(2) 第 2 種 Enneper 曲面の共役曲面: $M = \mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\}$, $\hat{g} = z$, $\hat{\eta} = \boldsymbol{i}dz$ (共役曲面の定義は第 14 節参照).
(3) 第 2 種懸垂面: $M = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{|z| = 1\})$, $\hat{g} = z$, $\hat{\eta} = z^{-2}dz$.
(4) 第 2 種常螺旋面: $M = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{|z| = 1\})$, $\hat{g} = z$, $\hat{\eta} = \boldsymbol{i}z^{-2}dz$.

注意 13.7. 例 13.5 (3) および例 13.6 (3) の $\mathrm{Per}(f)$ はそれぞれ

$$\mathrm{Per}(f) = \left\{ {}^t(0, 0, 4n\pi)\ ;\ n \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \mathrm{Per}(f) = \left\{ {}^t(0, 4n\pi, 0)\ ;\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

であるから, 例 13.5 (3) は x_3 軸方向, 例 13.6 (3) は x_2 軸方向にそれぞれ周期的である. それ以外の 6 つの例はいずれも $\mathrm{Per}(f) = \{\mathbf{0}\}$ であるから f は M 上一価である.

例 13.8. $M = \mathbb{C}$ (または $\mathbb{C}$ の領域) とする．φ, ψ を M 上の正則関数で, 任意の $z \in M$ で $|\varphi| \neq |\psi(z)|$ を満たすとする．このとき,

$$G(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}, \qquad \phi_3 = -\varphi(z)\psi(z)dz$$

とおくと, (G, ϕ_3) は 定理 12.1 の条件 (iii) を満たす．このとき (W) は

$$f = \mathrm{Re}\int \left(\varphi^2 + \psi^2,\, \boldsymbol{i}\left(\varphi^2 - \psi^2\right),\, -2\varphi\psi\right) dz \tag{13.3}$$

となる．(13.3) は極大曲面の**スピン表現**と呼ばれる表現公式と関係がある．

(W) で与えられる極小曲面の基本形式と Gauss 曲率を計算する．極小曲面の Gauss 写像 G が M 上の有理型関数である (すなわち $\partial G = dG$ かつ $\overline{\partial} G = 0$ が成り立つ) ことに注意して第 11 節で与えた結果を用いる．まず M の第 1 基本形式は (11.12) で与えられる．f の第 2 基本形式は (11.15), (11.18) から

$$\mathrm{I\!I} = -Q - \overline{Q}, \qquad Q = \frac{\phi_3 dG}{G} \tag{13.4}$$

となる．f の第 3 基本形式は (11.20) で与えられる．M の Gauss 曲率 K は (11.19) から

$$K = \frac{4dGd\overline{G}}{(|G|^{-1} - |G|)^4 |G|^2 \phi_3 \bar{\phi}_3}\ (\geq 0) \tag{13.5}$$

で与えられる．

(13.5) から, K を第 1 基本形式 I と Hopf 微分 Q を用いて

$$\sqrt{K}\,\mathrm{I} = 2|Q|$$

と表すこともできる．f の臍点は Q の零点に対応していたから, 次の命題を得る．

命題 13.9. 極大曲面において, Gauss 曲率が 0 になる点と臍点は一致し, 平面以外の極大曲面ではそれらは孤立点である．

注意 13.10. (11.20) により, $\mathrm{I\!I\!I}$ が退化する点と K の零点と dG の零点は一致する．

$F : M \to \mathbb{C}^3$ を正則写像とする．F がはめ込みであるための必要十分条件は, 任意の $z \in M$ に対して

$$\left\langle F'(z), \overline{F'(z)} \right\rangle \neq 0$$

が成り立つことである．また, 任意の $z \in M$ に対して

$$\langle F'(z), F'(z) \rangle = 0$$

が成り立つとき F は**等方的** (または**零的**) であるという．極大曲面 $f : M \to \mathbb{L}^3$ が (W) で与えられているとき, $F : M \to \mathbb{C}$ を

$$F := -\int \left(G^{-1} + G,\, \boldsymbol{i}(G^{-1} - G),\, -2\right) \phi_3 \tag{13.6}$$

で定めると, (C), (R) により F は正則等方的はめ込みであり, かつ $f = \mathrm{Re}\, F$ を満たす. (13.6) の F を (W) で与えられた極小曲面 f の**正則等方的持ち上げ**という.

14 随伴極大曲面, 共役極大曲面

(G, ϕ_3) が定理 12.1 の条件 (iii) を満たすとする. このとき, $(G, e^{i\theta}\phi_3)$ $(\theta \in [0, 2\pi))$ も定理 12.1 の条件 (iii) を満たすから, ここから (W) によって得られる曲面 (ϕ_3 のところに $e^{i\theta}\phi_3$ を代入) も極大曲面を定める. これらの極大曲面の族を, 元の極大曲面の**随伴極大曲面族**という. 特に $\theta = \pi/2$ に対応する極大曲面を, 元の極大曲面の**共役極大曲面**という. 共役という名前は, $\theta = \pi/2$ に対応する極大曲面の各座標関数 (調和関数) が元の極大曲面の座標関数 (調和関数) の共役調和関数 (命題 A.2) になっていることに由来する.

任意の $\theta \in [0, 2\pi)$ に対して

$$\left(|G|^{-1} - |G|\right)^2 (e^{i\theta}\phi_3)\overline{(e^{i\theta}\phi_3)} = \left(|G|^{-1} - |G|\right)^2 \phi_3\bar{\phi}_3$$

であるから, 全ての随伴極大曲面は**等長的**である.

逆に次の命題が成り立つことが知られている.

命題 14.1. Weierstrass data (G, ϕ_3) から定まる単連結な極大曲面と等長的な極大曲面は, $\mathbb{L}^3$ の合同変換をすることにより, $(G, e^{i\theta}\phi_3)$ $(\theta \in [0, 2\pi))$ から定まる極大曲面の 1 つに一致する.

証明. M を単連結 Riemann 面, $f : M \to \mathbb{L}^3$ を極大曲面, (G, ϕ_3) を f の Weierstrass data, $\nu : M \to H^2$ を f の単位法ベクトル場とする. $\hat{f} : \hat{M} \to \mathbb{L}^3$ を f と等長的な極大曲面とする. このときある等長写像 $\varphi : M \to \hat{M}$ が存在するから, $\hat{f} \circ \varphi$ を改めて $\hat{f}$ とおくことで $\hat{f}$ を M から $\mathbb{L}^3$ への写像と仮定してよい. $(\hat{G}, \hat{\phi}_3)$ を $\hat{f}$ の Weierstrass data, $\hat{\nu} : M \to H^2$ を $\hat{f}$ の単位法ベクトル場とする. 必要ならば f, $\hat{f}$ の代わりに $-f$, $-\hat{f}$ を考えることで, ν, $\hat{\nu}$ は共に未来的であるとしてよい.

f の Gauss 曲率 K が恒等的に 0 ならば, 命題 8.2 により ν, $\hat{\nu}$ は共に定ベクトルとなるので (注意 2.25 により K は第 1 基本形式のみに依存することに注意), 1 点 $p \in M$ で $\nu(p) = \hat{\nu}(p)$ となるように, $\hat{f}$ に適当な $\mathrm{SO}^+(2,1)$ の元を左から作用させると M 上 $\nu = \hat{\nu}$ が成り立つ.

K が恒等的に 0 でないならば, 命題 13.9 により K の零点は孤立している. $K(p) \neq 0$ となる任意の $p \in M$ をとると, p のある近傍 $U(\subset M)$ が存在して, 任意の $q \in U$ に対して $K(q) \neq 0$ が成り立つ. 今 f の第 1 基本形式と $\hat{f}$ の第 1 基本形式が一致しており, K は第 1 基本形式のみに依存する量であるから, (2.3) により M 上

$$\mathrm{I\!I\!I}_f = \mathrm{I\!I\!I}_{\hat{f}}$$

が成り立つ. ただし $\mathrm{I\!I\!I}_f, \mathrm{I\!I\!I}_{\hat{f}}$ はそれぞれ f, $\hat{f}$ の第 3 基本形式とする. ここで (11.20) (と注意 13.10) により $\mathrm{I\!I\!I}_f (= \mathrm{I\!I\!I}_{\hat{f}})$ は U 上正定値計量を定める. また, 定義から $\mathrm{I\!I\!I}_f$, $\mathrm{I\!I\!I}_{\hat{f}}$ はそれぞれ ν, $\hat{\nu}$ の第 1 基本形式である. すなわち,

$$\mathrm{I\!I\!I}_f = \mathrm{I}_\nu, \qquad \mathrm{I\!I\!I}_{\hat{f}} = \mathrm{I}_{\hat{\nu}}$$

が成り立つ．ただし I_ν, $\mathrm{I}_{\hat{\nu}}$ はそれぞれ ν, $\hat{\nu}$ の第 1 基本形式とする．よって $\nu|_U$, $\hat{\nu}|_U : U \to H^2(\subset \mathbb{L}^3)$ は U 上はめ込みで, U 上

$$\mathrm{I}_\nu = \mathrm{I}_{\hat{\nu}} \tag{14.1}$$

を満たす (すなわち ν と $\hat{\nu}$ は等長的なはめ込みである)．また, $\nu|_U$ が全臍的 ($\nu(U) \subset H^2$) なはめ込みで, その単位法ベクトル場 $(\nu_x \times \nu_y)/|\nu_x \times \nu_y|$ が $-\nu$ に一致すること (これは f の Gauss 曲率が負であることによる．(9.13) 参照) に注意すると, $\mathrm{II}_\nu = \mathrm{I}_\nu$ (同様に $\mathrm{II}_{\hat{\nu}} = \mathrm{I}_{\hat{\nu}}$) が成り立つことがわかる．ただし II_f, $\mathrm{II}_{\hat{f}}$ はそれぞれ f, $\hat{f}$ の第 2 基本形式とする．実際,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\langle \nu_{xx}, -\nu\rangle & \langle \nu_{xy}, -\nu\rangle \\ \langle \nu_{yx}, -\nu\rangle & \langle \nu_{yy}, -\nu\rangle\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\langle \nu_x, -\nu\rangle_x - \langle \nu_x, -\nu_x\rangle & \langle \nu_x, -\nu\rangle_y - \langle \nu_x, -\nu_y\rangle \\ \langle \nu_y, -\nu\rangle_x - \langle \nu_y, -\nu_x\rangle & \langle \nu_y, -\nu\rangle_y - \langle \nu_y, -\nu_y\rangle\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\langle \nu_x, \nu_x\rangle & \langle \nu_x, \nu_y\rangle \\ \langle \nu_y, \nu_x\rangle & \langle \nu_y, \nu_y\rangle\end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから $\mathrm{II}_\nu = \mathrm{I}_\nu$ が成り立ち, 同様に $\mathrm{II}_{\hat{\nu}} = \mathrm{I}_{\hat{\nu}}$ が成り立つ．よって

$$\mathrm{II}_\nu = \mathrm{II}_{\hat{\nu}} \tag{14.2}$$

が U 上成り立つ．従って (14.1), (14.2) と曲面論の基本定理 (定理 2.26) により, $\hat{\nu}$ に適当な $\mathrm{SO}^+(2,1)$ の元を左から作用させることで (すなわち $\hat{f}$ に適当な $\mathrm{SO}^+(2,1)$ の元を左から作用させることで), U 上の各点で $\nu = \hat{\nu}$ が成り立つ．この $\mathrm{SO}^+(2,1)$ の元を作用させた後の $\hat{f}$ を改めて $\hat{f}$ と書くことにし, その Weierstrass data を $(\hat{G}, \hat{\phi}_3)$ とすると, (11.2) により $G = \hat{G}$ が U 上成り立つ．G, $\hat{G}$ は M 上の有理型関数だから, 一致の定理により M 上 $G = \hat{G}$ が成り立つ．

従って, K が恒等的に 0 の場合もそうでない場合も, $\hat{f}$ に適当な $\mathrm{SO}^+(2,1)$ の元を左から作用させることで M 上

$$G = \hat{G}$$

が成り立つ．よって (11.12) により, M 上 $|h_3| = |\hat{h}_3|$ が成り立つ．ただし $\phi_3 = h_3 dz$, $\hat{\phi}_3 = \hat{h}_3 dz$ とおいた．ここで $h := \hat{h}_3/h_3$ とおくと, h は M 上 $|h| = 1$ を満たす正則関数であるから, 最大値の原理により h は定数関数である．すなわちある定数 $\theta \in [0, 2\pi)$ が存在して $h = e^{\boldsymbol{i}\theta}$ が成り立つ．従って M 上

$$\hat{\phi}_3 = e^{\boldsymbol{i}\theta}\phi_3$$

が成り立つ． $\square$

注意 14.2. この命題は $\mathbb{R}^3$ の極小曲面の場合に H. A. Schwarz によって証明されている ([Sc, p.175])．ここで紹介した証明は, [Sp] をもとにしている．

A　補遺

A.1　調和関数

領域 D 上の C^2 級実数値 2 変数関数 $u(x,y)$ が D 上 Laplace の微分方程式

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

を満たすとき, D で**調和**であるといい, u を D 上の**調和関数**という.

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad f_{\bar z} = \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{A.1}$$

を用いると

$$\triangle u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \bar z \partial z} \tag{A.2}$$

であるから, u は調和関数であることは $u_{z\bar z} = 0$ が成り立つことと同値である.

命題 A.1. D 上の正則関数の実部と虚部はともに D 上の調和関数である.

命題 A.2. 単連結領域 D 上の調和関数 $u(x,y)$ に対して, u を実部とする D 上の正則関数 $f(z)$ ($z = x + \boldsymbol{i}y$) が存在する. この正則関数 f の虚部を u の**共役調和関数**という.

注意 A.3. 命題 A.2 において, $u = \operatorname{Re} f$ を満たす正則関数 f は具体的に

$$f(z) = 2\int_{z_0}^{z} \phi(\zeta)d\zeta - c_0, \qquad \phi(\zeta) := u_z(\xi,\eta), \qquad \zeta = \xi + \boldsymbol{i}\eta, \qquad c_0 \in \mathbb{R}$$

と表される. ただしこの式の積分は, D 内の定点 z_0 から $z \in D$ への線積分で, z を変数とする関数と見ている. この積分を単に

$$f = 2\int u_z dz$$

と表すこともある.

系 A.4. 調和関数は実解析的関数である.

$I \subset \mathbb{R}$ を区間とする. また, $D \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の単連結領域とする.

A.2　行列値関数

$\mathbb{K}$ を実数全体の集合 $\mathbb{R}$ または複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ とする. $\mathbb{K}$ の元を成分とする m 次の正方行列全体を $\mathfrak{gl}(m;\mathbb{K})$ で表す. また,

$$\mathrm{GL}(m;\mathbb{K}) := \{A \in \mathfrak{gl}(m;\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$$

とおく．行列に値をとる関数, すなわち各成分が関数であるような行列を**行列値関数**という．特にベクトル (m 行 1 列の行列) に値をとる関数を**ベクトル値関数**という．

命題 A.5. $A(t)$, $B(t)$ $(t \in I)$ を I 上の行列値関数とする．このとき, 次が成り立つ．

(1) $(A(t) + B(t))' = A(t)' + B(t)'$.
(2) $c : I \to \mathbb{R}$ とすると, $(c(t)A(t))' = c(t)'A(t) + c(t)A(t)'$.
(3) $(A(t)B(t))' = A(t)'B(t) + A(t)B(t)'$.
(4) $A : I \to \mathrm{GL}(m; \mathbb{R})$ ならば, $(A(t)^{-1})' = -A(t)^{-1}A(t)'A(t)^{-1}$.

ただし $' := d/dt$ とする．

問題 A.6. この命題の (4) を証明せよ．

A.3 線形微分方程式系の解の存在と一意性

定理 A.7 (線形常微分方程式系の解の存在と一意性)**.** 任意の $t_0 \in I$ をとり固定する．任意の $F_0 \in \mathrm{GL}(m; \mathbb{R})$ と $A : I \to \mathfrak{gl}(m; \mathbb{R})$ に対して, 次の線形常微分方程式系の初期値問題

$$\begin{cases} F'(t) = F(t)A(t) \quad (t \in I), \\ F(t_0) = F_0, \end{cases} \tag{A.3}$$

の解 $F : I \to \mathrm{GL}(m; \mathbb{R})$ が一意に存在する．

定理 A.7 の証明で, 解 $F : I \to \mathfrak{gl}(m; \mathbb{R})$ が一意に存在することは常微分方程式の教科書を参照のこと．また, 初期条件から $t_0 \in I$ の十分近くで $F(t) \in \mathrm{GL}(m; \mathbb{R})$ となることは分かるが, 任意の $t \in I$ に対して $F(t) \in \mathrm{GL}(m; \mathbb{R})$ となることは次の定理の (2) による．

定理 A.8. 任意の $t_0 \in I$ をとり固定する．任意の $F_0 \in \mathrm{GL}(m; \mathbb{R})$ と $A : I \to \mathfrak{gl}(m; \mathbb{R})$ に対して, $F : I \to \mathrm{GL}(m; \mathbb{R})$ が

$$F'(t) = F(t)A(t), \qquad F(t_0) = F_0$$

を満たすとする．このとき次が成り立つ．

(1) $(\det F(t))' = \det F(t) \operatorname{tr} A(t)$.
(2) $\det F(t) = \det F_0 \exp \displaystyle\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau) d\tau$.

A.4 微分形式と Stokes の定理

M を n 次元多様体とする (局所的な話なので, M は 1 つの局所座標系 $(u^1, \ldots, u^n)$ で覆われているものとする)．M 上の r 次微分形式 $(0 \leq r \leq n)$ 全体を $\Lambda^r(M)$ で表す．局所座標系を用いる

と, $\Lambda^1(M)$ の元 ω は n 個の関数 $\omega_i : M \to \mathbb{R}$ $(i_1 < \cdots < i_r)$ を用いて

$$\omega = \omega_i du^i = \omega_1 du^1 + \cdots + \omega_n du^n \tag{A.4}$$

と表され, $\Lambda^r(M)$ の元 ω は ${}_nC_r$ 個の関数 $\omega_{i_1 \ldots i_r} : M \to \mathbb{R}$ $(i_1 < \cdots < i_r)$ を用いて

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \omega_{i_1 \ldots i_r} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r} \tag{A.5}$$

と表される．ここで $du^1, \ldots, du^n$ のウェッジ積は外積代数の関係式

$$du^i \wedge du^j = -du^j \wedge du^i$$

を満たす.

定義 A.9. $\omega \in \Lambda^r(M)$ が局所座標系を用いて (A.5) と表されているとする．このとき, **外微分作用素** $d : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$ を

$$d\omega := \sum_{i_1 < \cdots < i_r} d\omega_{i_1 \ldots i_r} \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}$$

で定める．ただし $r = n$ のときは $d\omega = 0$ と定める．$d\omega$ を ω の**外微分**という.

命題 A.10. 外微分作用素 $d : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$ は次をみたす.

(1) d は線形写像である．すなわち, 任意の $\omega, \eta \in \Lambda^r(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$d(a\omega + b\eta) = ad\omega + bd\eta$$

が成り立つ.

(2) $\omega \in \Lambda^r(M)$, $\eta \in \Lambda^q(M)$ に対して

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta$$

が成り立つ.

(3) 任意の $\omega \in \Lambda^r(M)$ に対して

$$d(d\omega) = 0$$

が成り立つ.

定義 A.11. $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ を写像とする．このとき $dx^\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^{n+1})$ $(1 \leq \alpha \leq n+1)$ に対して $f^* dx^\alpha \in \Lambda^1(M)$ を

$$f^* dx^\alpha := \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i} du^i \tag{A.6}$$

で定める．$f^* dx^\alpha$ を dx^α の f による**引き戻し**という.

注意 A.12. M のある点における接ベクトル全体と 1 次微分形式全体が互いに双対なベクトル空間であることを踏まえて, f^*dx^α を $f^*dx^\alpha(v) := dx^\alpha(f_*v)$ (v は M の考えている点における任意の接ベクトル) で定めると, f^*dx^α は (A.6) を満たすことが確かめられる. しかしここでは接ベクトルと 1 次微分形式の関係を何も説明していないので, (5.10) を引き戻しの定義とする.

M を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合で, その内部 $M - \partial M$ が $\mathbb{R}^n$ の領域であるとする. M 上の n 次微分形式 $\eta = \hat{\eta}\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^n$ (ただし $\hat{\eta}$ は M 上の関数) に対して, その M での積分を

$$\int_M \eta := \int_M \hat{\eta}\, du^1 \dots du^n$$

で定める.

また, N を $\mathbb{R}^r$ $(1 \le r \le n-1)$ のコンパクト集合で, その内部 $N - \partial N$ が $\mathbb{R}^r$ の領域であるとし,

$$\iota : N \ni (v^1, \dots, v^r) \mapsto \big(\iota^1(v^1, \dots, v^r), \dots, \iota^n(v^1, \dots, v^r)\big) \in M$$

を埋め込みとする. M 上の r 次微分形式 $\omega = \hat{\omega}\, du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}$ に対して, その $\iota(N)$ での積分を

$$\int_{\iota(N)} \omega := \int_N \iota^*\omega := \int_N (\hat{\omega} \circ \iota) \det \frac{\partial(\iota^{i_1}, \dots, \iota^{i_r})}{\partial(v^1, \dots, v^r)}\, dv^1 \dots dv^r$$

で定める.

定理 A.13 (Stokes の定理). M をコンパクトで向き付け可能な n 次元多様体とする (M として $\mathbb{R}^n$ の有界領域の閉包を考えてもよい). このとき任意の $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$ に対して

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{A.7}$$

が成り立つ. ただし ∂M は M の境界で, ∂M には M の向きから定まる向きが与えられているとする.

とくに M が $\mathbb{R}^2$ (または $\mathbb{C}$) の有界閉領域のときは, Stokes の定理ではなく **Green の定理**と呼ばれることが多い. Green の定理から次の系が得られる.

系 A.14. D を $\mathbb{R}^2$ の単連結領域とする (対応 $(x, y) \leftrightarrow z = x + \boldsymbol{i}y$ によって $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ を同一視し, D を $\mathbb{C}$ の単連結領域と見なすこともある). $\varphi(x, y)$ を D 上の実数値関数とする. D 上の 1 点 (x_0, y_0) をとり固定する ($z_0 := x_0 + \boldsymbol{i}y_0$ とおく). $c_0 := \varphi(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ とおく. このとき任意の $(x, y) \in D$ ($z := x + \boldsymbol{i}y$) に対して,

$$\varphi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (\varphi_x dx + \varphi_y dy) + c_0 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \varphi_z dz + c_0 \tag{A.8}$$

が成り立つ. ただし積分は (x_0, y_0) を始点とし (x, y) を終点とする D 内の曲線に沿う線積分とする.

証明. 最初に線積分

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\varphi_x dx + \varphi_y dy)$$

の値が経路に依存しないことに注意する．実際, D 内の任意の単純閉曲線 C に対して D' を C で囲まれる有界閉領域とすると, Green の定理により

$$\oint_C (\varphi_x dx + \varphi_y dy) = \pm \int_{D'} (-\varphi_{xy} + \varphi_{yx})\, dxdy = 0$$

となるからである (上式の $\pm$ は C が D に対して正の向きか負の向きかによって変わる).

(A.8) の左側の等号が成り立つことを示す．任意の $(x_1, y_1) \in D$ をとり固定する．(x_0, y_0) を始点とし, (x_1, y_1) を終点とする D 内の曲線を

$$\gamma : [a, b] \ni t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$$

で表す．$\gamma(a) = (x_0, y_0)$, $\gamma(b) = (x_1, y_1)$ である．すると

$$\begin{aligned}\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\varphi_x dx + \varphi_y dy) &= \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} (\varphi_x dx + \varphi_y dy) = \int_a^b \left(\varphi_x \frac{dx}{dt} + \varphi_y \frac{dy}{dt}\right) dt = \int_a^b \left(\frac{d}{dt}\varphi \circ \gamma\right) dt \\ &= (\varphi \circ \gamma)(b) - (\varphi \circ \gamma)(a) = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0) = \varphi(x_1, y_1) - c_0\end{aligned}$$

となる．よって (A.8) の左側の等号が成り立つ.

次に (A.8) の右側の等号が成り立つことを示す．φ が実数値関数であることと $\varphi_x dx + \varphi_y dy = \varphi_z dz + \varphi_{\bar{z}} d\bar{z}$ が成り立つことに注意すると,

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\varphi_x dx + \varphi_y dy) = \int_{z_0}^{z} (\varphi_z dz + \varphi_{\bar{z}} d\bar{z}) = \int_{z_0}^{z} \big(\varphi_z dz + \overline{\varphi_z dz}\big) = 2\,\mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \varphi_z dz$$

となる．よって (A.8) の右側の等号が成り立つ. □

A.5 PSU(1,1) と SO$^+(2,1)$ との同型対応

群 SU(1,1) は

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix} \ ;\ p, q \in \mathbb{C},\ |p|^2 - |q|^2 = 1 \right\}$$

で定義される．$F \in \mathrm{SU}(1,1)$ と $G \in \mathrm{SU}(1,1)$ に対して $F \sim G$ を $F = \pm G$ であることと定め, この同値類で割った商集合 $\mathrm{SU}(1,1)/\sim$ を PSU(1,1) で表す．すなわち,

$$\mathrm{PSU}(1,1) := \mathrm{SU}(1,1)/\{\pm\,\mathrm{id}\}$$

とおく．本節では Lorentz 立体射影 (11.1) を通して PSU(1,1) と固有 Lorentz 群 SO$^+(2,1)$ (第 1 節参照) の群としての同型対応を与える.

まず $\mathrm{SO}^+(2,1)$ の元を具体的に書き表す．$A \in \mathfrak{gl}(3;\mathbb{R})$ を $A = (a_1, a_2, a_3)$ と 3 つの列ベクトル $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ を用いて表すと, $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ であることと, a_1, a_2, a_3 が Lorentz 正規直交基底で, かつ

$$\det(a_1, a_2, a_3) = 1, \quad \text{かつ} \quad (a_3\text{の第 3 成分}) > 0$$

を満たすことは同値である．そこでまず $\langle a_1, a_1 \rangle = 1$ を満たす a_1 をとる．a_1 は

(A.9) $$a_1 = {}^t(\cos u \cosh v,\ \sin u \cosh v,\ \sinh v), \qquad (u, v) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

と表すことができる．次に $\langle a_1, a_1 \rangle = 1$ の両辺を u, v で微分することで, a_1 の u, v での偏微分 $(a_1)_u$, $(a_1)_v$ は共に a_1 に直交することが分かる．さらに直接計算により $\langle (a_1)_u, (a_1)_u \rangle = \cosh^2 v$, $\langle (a_1)_u, (a_1)_v \rangle = 0$, $\langle (a_1)_v, (a_1)_v \rangle = -1$ が分かるので

(A.10)
$$\hat{a}_2 := \frac{(a_1)_u}{\cosh v} = {}^t(-\sin u,\ \cos u,\ 0), \qquad \hat{a}_3 := (a_1)_v = {}^t(\cos u \sinh v,\ \sin u \sinh v,\ \cosh v)$$

とおくと $\{a_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3\}$ は $\mathbb{L}^3$ の Lorentz 正規直交基底をなす．また $\hat{a}_3$ の第 3 成分は正である．さらに $\det(a_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) = 1$ であることも直接計算により確かめられる．よってこの $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ を用いて $a_2, a_3 \in S^2$ を

(A.11) $$a_2 := \cosh w \cdot \hat{a}_2 + \sinh w \cdot \hat{a}_3, \qquad a_3 := \sinh w \cdot \hat{a}_2 + \cosh w \cdot \hat{a}_3, \qquad w \in \mathbb{R}$$

で定めると, $\mathrm{SO}^+(2,1)$ の任意の元は $A = (a_1, a_2, a_3)$ で表される．(A.9), (A.10), (A.11) を用いて A を具体的に書き下すと

(A.12)
$$A = \begin{pmatrix} \cos u \cosh v & -\sin u \cosh w + \cos u \sinh v \sinh w & -\sin u \sinh w + \cos u \sinh v \cosh w \\ \sin u \cosh v & \cos u \cosh w + \sin u \sinh v \sinh w & \cos u \sinh w + \sin u \sinh v \cosh w \\ \sinh v & \cosh v \sinh w & \cosh v \cosh w \end{pmatrix}$$

となる．ただし u, v, w は (A.9), (A.11) で定めた範囲を動く．ここで次の補題が成り立つことが直接計算により分かる．

補題 A.15. $A_1(u), A_2(v), A_3(w) \in \mathrm{SO}(3)$ を

$$A_1(u) := \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2(v) := \begin{pmatrix} \cosh v & 0 & \sinh v \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh v & 0 & \cosh v \end{pmatrix},$$
$$A_3(w) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh w & \sinh w \\ 0 & \sinh w & \cosh w \end{pmatrix}$$

で定めると, (A.12) の A は

(A.13) $$A = A_1(u) A_2(v) A_3(w)$$

を満たす.

問題 A.16. (A.13) が成り立つことを確かめよ.

次に SU(1,1) から $\mathrm{SO}^+(2,1)$ への写像を定義する. 任意の $\nu = {}^t(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in H^2 \subset \mathbb{L}^3$ をとる. 任意の

$$F = \begin{pmatrix} p & q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1) \qquad (p, q \in \mathbb{C},\ \ |p|^2 - |q|^2 = 1) \tag{A.14}$$

に対して

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(p^2 - q^2) & -\mathrm{Im}(p^2 + q^2) & -2\,\mathrm{Im}(pq) \\ \mathrm{Im}(p^2 - q^2) & \mathrm{Re}(p^2 + q^2) & 2\,\mathrm{Re}(pq) \\ 2\,\mathrm{Im}(p\bar{q}) & 2\,\mathrm{Re}(p\bar{q}) & |p|^2 + |q|^2 \end{pmatrix} \tag{A.15}$$

とおくと, $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ であり, かつ

$$\sigma^{-1}\Big(F \star \big(\sigma(\nu)\big)\Big) = A\nu \tag{A.16}$$

が成り立つ. ただし $F \star \big(\sigma(\nu)\big)$ は複素数 $\sigma(\nu)$ の F による Möbius 変換である. すなわち (A.14) の F に対して

$$F \star \big(\sigma(\nu)\big) = \frac{p\sigma(\nu) + q}{\bar{q}\sigma(\nu) + \bar{p}}$$

である.

問題 A.17. (A.15) の A が $\mathrm{SO}^+(2,1)$ の元であること, および (A.16) が成り立つことを直接計算により確かめよ.

$$\begin{array}{ccc} H^2 & \xrightarrow{A \in \mathrm{SO}^+(2,1)} & H^2 \\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus C & \xrightarrow{F \in \mathrm{SU}(1,1)} & (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus C \end{array} \qquad (C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\})$$

(A.14) の $F \in \mathrm{SU}(1,1)$ に (A.15) の $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ を対応させる写像を Ad で表す:

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SO}^+(2,1)$$

この Ad が全射準同型で, かつ $\mathrm{Ad}(F) = \mathrm{Ad}(G)$ ならば $F = \pm G$ が成り立つならば, Ad は PSU(1,1) から $\mathrm{SO}^+(2,1)$ への同型写像を引き起こすことが分かる. これを証明するために補題を 1 つ用意する.

補題 A.18. $F_1(u), F_2(v), F_3(w) \in \mathrm{SU}(1,1)$ を

$$F_1(u) := \begin{pmatrix} e^{\boldsymbol{i}u/2} & 0 \\ 0 & e^{-\boldsymbol{i}u/2} \end{pmatrix}, \qquad F_2(v) := \begin{pmatrix} \cosh(v/2) & -\boldsymbol{i}\sinh(v/2) \\ \boldsymbol{i}\sinh(v/2) & \cosh(v/2) \end{pmatrix},$$
$$F_3(w) := \begin{pmatrix} \cosh(w/2) & \sinh(w/2) \\ \sinh(w/2) & \cosh(w/2) \end{pmatrix}$$

で定めると,

$$\text{(A.17)} \qquad \mathrm{Ad}(F_1(u)) = A_1(u), \qquad \mathrm{Ad}(F_2(v)) = A_2(v), \qquad \mathrm{Ad}(F_3(w)) = A_3(w)$$

が成り立つ．ただし $A_1(u)$, $A_2(v)$, $A_3(w)$ は補題 A.15 で定めた $\mathrm{SO}^+(2,1)$ の行列である．

証明. (A.14) において $p = e^{\boldsymbol{i}u/2}$, $q = 0$ として (A.15) に代入すると $\mathrm{Ad}(F_1(u)) = A_1(u)$ を得る．同様に $p = \cosh(v/2)$, $q = -\boldsymbol{i}\sinh(v/2)$ とすると $\mathrm{Ad}(F_2(v)) = A_2(v)$, $p = \cosh(w/2)$, $q = \sinh(w/2)$ とすると $\mathrm{Ad}(F_3(w)) = A_3(w)$ を得る． $\square$

命題 A.19. $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SO}^+(2,1)$ は全射準同型写像であり, かつ $\mathrm{Ad}(F) = \mathrm{Ad}(G)$ ならば $F = \pm G$ が成り立つ．

証明. 最初に Ad が準同型写像であることを証明する．任意の $F, G \in \mathrm{SU}(1,1)$ をとり, $\mathrm{Ad}(F) = A$, $\mathrm{Ad}(G) = B$ とおくと, Ad の定義から任意の $\nu \in H^2 \subset \mathbb{L}^3$ に対して

$$F \star \big(\sigma(\nu)\big) = \sigma(A\nu), \qquad G \star \big(\sigma(\nu)\big) = \sigma(B\nu)$$

が成り立つ．このことと Möbius 変換の結合法則 $G \star (F \star z) = (GF) \star z$ および行列の結合法則に注意すると

$$(FG) \star \big(\sigma(\nu)\big) = F \star \Big(G \star \big(\sigma(\nu)\big)\Big) = F \star \big(\sigma(B\nu)\big) = \sigma\big(A(B\nu)\big) = \sigma\big((AB)(\nu)\big)$$

が成り立つ．よって

$$\mathrm{Ad}(FG) = AB = \mathrm{Ad}(F)\,\mathrm{Ad}(G)$$

が成り立つので Ad は準同型写像である．

次に Ad が全射であることを証明する．任意の $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ をとる．A は (A.12) のように表すことができる．ここで補題 A.18 で定義した $F_1(u)$, $F_2(v)$, $F_3(w)$ を用いて

$$F := F_1(u)F_2(v)F_3(w) \in \mathrm{SU}(1,1)$$

とおくと, Ad が準同型であることと, (A.13), (A.17) により

$$\mathrm{Ad}(F) = \mathrm{Ad}(F_1F_2F_3) = \mathrm{Ad}(F_1)\,\mathrm{Ad}(F_2)\,\mathrm{Ad}(F_3) = A_1A_2A_3 = A$$

となるので Ad は全射である．

最後に $\mathrm{Ad}(F) = \mathrm{Ad}(G)$ ならば $F = \pm G$ が成り立つことを証明する．id_2, id_3 でそれぞれ 2 次, 3 次の単位行列を表す．(A.14) の $F \in \mathrm{SU}(1,1)$ に対して $\mathrm{Ad}(F) = \mathrm{id}_3$ が成り立つと仮定すると, $|p|^2 - |q|^2 = 1$ であることと (A.15) の 3 行 3 列成分が 1 であることから $|p| = 1$, $q = 0$ が得られ, さらに (A.15) の 1 行 1 列成分が 1 であることと 2 行 1 列成分が 0 であることから $p = \pm 1$ を得る．よって $\mathrm{Ad}(F) = \mathrm{id}_3$ ならば $F = \pm\,\mathrm{id}_2$ が成り立つ．従って $F, G \in \mathrm{SU}(1,1)$ が $\mathrm{Ad}(F) = \mathrm{Ad}(G)$ を満たすならば, Ad が準同型であることから

$$\mathrm{id}_3 = \mathrm{Ad}(F)\,\mathrm{Ad}(G)^{-1} = \mathrm{Ad}(F)\,\mathrm{Ad}(G^{-1}) = \mathrm{Ad}(FG^{-1})$$

が成り立つ．よって $FG^{-1} = \pm\,\mathrm{id}_2$ が成り立つから $F = \pm G$ を得る． $\square$

注意 A.20 (写像 Ad について)**.** (群の) 表現論では, $F \in \mathrm{SU}(1,1)$ を 1 つ固定したとき, $X \in \mathfrak{su}(2)$ に $FXF^{-1} \in \mathfrak{su}(1,1)$ を対応させる写像を $\mathrm{Ad}(F)$ で表す:

$$\mathrm{Ad}(F) : \mathfrak{su}(1,1) \ni X \mapsto \mathrm{Ad}(F)X := FXF^{-1} \in \mathfrak{su}(1,1).$$

ただし

$$\mathfrak{su}(1,1) := \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}x_3 & -x_1 - \boldsymbol{i}x_2 \\ -x_1 + \boldsymbol{i}x_2 & -\boldsymbol{i}x_3 \end{pmatrix} \ ; \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

である．Ad を $\mathrm{SU}(1,1)$ の $\mathfrak{su}(1,1)$ への**随伴表現**という．Ad は全射準同型であることと $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \{\pm \mathrm{id}_2\}$ であることが証明できる．ここで $\mathfrak{su}(1,1)$ の任意の元 X は $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ を用いて

$$X = \boldsymbol{i} \begin{pmatrix} x_3 & -x_2 + \boldsymbol{i}x_1 \\ x_2 + \boldsymbol{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

と表すことができるので, この $X \in \mathfrak{su}(1,1)$ に $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^3$ を対応させることで $\mathfrak{su}(1,1)$ と $\mathbb{L}^3$ を同一視すると, (A.14) の $F \in \mathrm{SU}(1,1)$ に対して (A.15) の $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ を用いて $\mathrm{Ad}(F)X \in \mathfrak{su}(1,1)$ と $Ax \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ が同一視されることが直接計算により確かめられる．このことから $\mathrm{Ad}(F)$ と A を同一視できるので, Ad は群 $\mathrm{SU}(1,1)$ から群 $\mathrm{SO}^+(2,1)$ への 2 対 1 全射準同型を引き起こし, 群同型

$$\mathrm{PSU}(1,1) \cong \mathrm{SO}^+(2,1)$$

を誘導する．この事実をふまえて, 本節では (A.14) の $F \in \mathrm{SU}(1,1)$ に (A.15) の $A \in \mathrm{SO}^+(2,1)$ を対応させる写像を Ad で表した.

なお, (A.18) の $X \in \mathfrak{su}(1,1)$ は **Pauli のスピン行列**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

を用いると $X = -x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + \boldsymbol{i}x_3\sigma_3$ と表すことができる (上の σ_1, σ_2, σ_3 に $\sigma_0 := \mathrm{id}_2$ を加えた 4 つの行列の組を Pauli のスピン行列と呼ぶこともある).

群の表現については, Lie 群や Lie 環 (Lie 代数), 表現論などの教科書を参照のこと．やさしい入門書に [Ku] などがある.

参考文献

[AN] K. Akutagawa and S. Nishikawa, *The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space*, Tohoku Math. J. **42** (1990), 67–82.

[G] E. Giusti, Minimal surfaces and functions of bounded variation, Birkhäuser. (1984).

[Ke1] K. Kenmotsu, *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann. **245** (1979), 89–99.

[Ke2] 剱持勝衛, 曲面論講義, 培風館 (2000).

[Kob] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the* 3*-dimensional Minkowski space* L^3, Tokyo J. Math., **6** (1983), 297–309.

[KP] S. G. Krantz and H. R. Parks, A Primer of Real Analytic Functions, 2nd ed., Birkhäuser (2002).

[Ku] 熊原啓作, 行列 · 群 · 等質空間, 日本評論社 (2001).

[L] H. B. Lawson, Lectures on minimal submanifolds I, Publish or Perish, Inc. (1980).

[Mc] L. McNertney, *One-parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz 3-space*, Ph.D. Thesis. Brown Univ. (1980).

[Nom] 野水克己, 現代微分幾何入門, 裳華房 (1981).

[Nis] 西川青季, 等長地図はなぜないの?, 数学セミナー (2011 年 10 月号から 2012 年 9 月号まで連載).

[Nit2] J. C. C. Nitsche, Lectures on Minimal Surfaces: Vol. 1, Cambridge University Press (1989).

[ON] N. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press (1983).

[Sc] H. A. Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen Vol. 1. Springer, Berlin (1890).

[SC] 塩濱勝博, 成慶明, 曲面の微分幾何学, 局所理論から大域理論へ, 日本評論社 (2006).

[Sp] M. Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, Vol IV, Publish or perish Inc. (1970).

[Ta] 田崎博之, 曲線 · 曲面の微分幾何, 共立出版 (2015).

[UY] 梅原雅顕, 山田光太郎, 曲線と曲面, 微分幾何学的アプローチ, 裳華房 (2002).