

半正定値計量の幾何学と等長実現問題*

本田 淳史 (横浜国立大学大学院工学研究院[†])

`honda-atsufumi-kp@ynu.jp`

1 イントロダクション

本講演では、2017年1月に開催された数理科学談話会と第6回室蘭連続講演会にてお話しさせていただいた内容のまとめである。出発点は特異点を許容する曲面のクラスである「波面」の幾何学であるが、波面の内在的な性質の一般化にあたる「接続接束」はリーマン多様体の特異点を許容する概念ととらえられる。本稿では、そのような接続接束に関する結果を紹介する。前半は、接続接束に空間型という概念を導入し、その球面への等長実現の分類を紹介する [9]。後半は、波面の第1基本形式をモデルとした半正定値計量のクラスである Kossowski 計量を紹介し、接続接束との関係を説明する。その応用として得られる Kossowski 計量に対するガウス・ボンネ型定理を紹介する [6]。

2 波面と接続接束

2.1 波面

向き付けられたリーマン多様体 (N^{n+1}, h) に対して、その単位接束を T_1N^{n+1} で表す。可微分多様体 M^n からの滑らかな写像

$$f : M^n \longrightarrow (N^{n+1}, h)$$

が**波面** (wave front, **フロント**) であるとは、各点 $p \in M^n$ に対して、その近傍 U で定義された f に沿う滑らかな N^{n+1} の単位ベクトル場 ν が存在して

$$L := (f, \nu) : U \longrightarrow T_1N^{n+1}$$

*本研究は科研費 (課題番号:16K17605) の助成を受けたものである。

[†]2017年1月時点での所属は都城工業高等専門学校。

が Legendre はめ込みとなるときをいう。ここで L が Legendre であることは、任意の $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ に対して $h(f_*X, \nu) = 0$ となることと同値である¹。このとき ν は単位法線ベクトル場と呼ばれる。また、 L が単に Legendre 写像である場合には f を波面的 (frontal, フロントラル) と呼ぶ。 f がはめ込み (超曲面) ならば波面となるが、波面ははめ込みでない点を許容する。 f が $p \in M^n$ においてはめ込みでないとき、 p を**特異点**と呼ぶ。

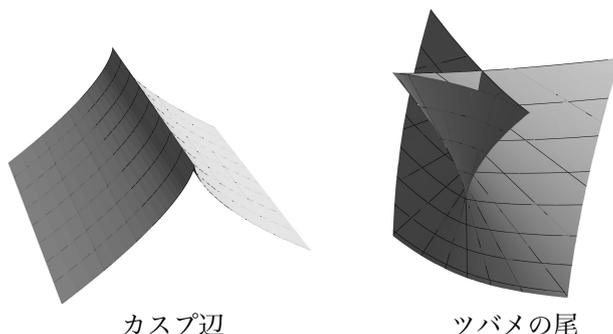


図 1: 波面に現れる特異点 ($n = 2$ の場合).

単位法線ベクトル場 ν が M^n 上で矛盾なく定義されるとき、 f は**余向き付け可能**と呼ばれ、 M^n が向き付け可能であるとき f を**向き付け可能**と呼ぶ。 f がはめ込みである場合は、余向き付け可能性と向き付け可能は同値であるが、一般にはそれらは独立である。

2.2 接続接束

Saji-Umehara-Yamada は波面の内在的な構造の定式化として、接続接束を導入した。

定義 1 (Saji-Umehara-Yamada [30, 33]). \mathcal{E} を n 次元可微分多様体 M^n 上の階数 n のベクトル束とする。また、 \mathcal{E} 上に計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 、それに両立する接続 D が与えられているとする。ベクトル束準同型 $\varphi: TM \rightarrow (\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle, D)$ は

$$D_X\varphi(Y) - D_Y\varphi(X) - \varphi([X, Y]) = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$$

を満たすとき、 $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi)$ を**接続接束**と呼ぶ。

ここで、リーマン多様体 (M, g) に対して、 $\mathcal{E} := TM^n$ 、 $\langle \cdot, \cdot \rangle := g$ 、 D を Levi-Civita 接続、 $\varphi := \text{Id}_{TM^n}$ と定めると $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi)$ は接続接束となる。つまり、接続接束はリーマン多様体の一般化にあたる概念である。さらに、波面、より一般にフロントラルは接続接束を自然に誘導する。

¹ $\mathfrak{X}(M^n)$ で M^n 上の滑らかなベクトル場全体を表す。

例 2 ([33, Example 2.4]). フロントル $f : M^n \rightarrow (N^{n+1}, h)$ に対し, \mathcal{E}_f を引き戻し束 f^*TN^{n+1} の ν の直交補空間で定る部分束, $\varphi_f : TM^n \rightarrow \mathcal{E}_f$ を $\varphi_f(X) := df(X)$ とし, D を N^{n+1} の Levi-Civita 接続の接成分, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を N^{n+1} から \mathcal{E}_f へ誘導される計量とする. このとき, $\mathcal{E}_f = (\mathcal{E}_f, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi_f)$ は接続接束である.

このような \mathcal{E}_f を **誘導接続接束** と呼ぶ. 接続接束が余向き付け可能であるとは, \mathcal{E} がベクトル束として向き付け可能なときをいう. 誘導接続接束 \mathcal{E}_f が余向き付け可能であることと, フロントル f が余向き付け可能であることは同値である.

以後, (N^{n+1}, h) を断面曲率が一定値 c である単連結な空間形 $\Sigma^{n+1}(c)$ とする. つまり, $c = 1$ の場合は単位球面 $\Sigma^{n+1}(1) = S^{n+1}$, $c = 0$ の場合はユークリッド空間 $\Sigma^{n+1}(0) = \mathbf{R}^{n+1}$, $c = -1$ の場合は双曲空間 $\Sigma^{n+1}(-1) = H^{n+1}$ を表す.

事実 3 ([32, Proposition 2.4]). フロントル $f : M^n \rightarrow \Sigma^{n+1}(c)$ に沿う単位法線ベクトル場を ν とする. f の誘導接続接束を $(\mathcal{E}_f, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi_f)$ とするとき,

$$\begin{aligned} \langle R^D(X, Y)\xi, \zeta \rangle = c \det \begin{pmatrix} \langle \varphi_f(Y), \xi \rangle & \langle \varphi_f(Y), \zeta \rangle \\ \langle \varphi_f(X), \xi \rangle & \langle \varphi_f(X), \zeta \rangle \end{pmatrix} \\ + \det \begin{pmatrix} \langle d\nu(Y), \xi \rangle & \langle d\nu(Y), \zeta \rangle \\ \langle d\nu(X), \xi \rangle & \langle d\nu(X), \zeta \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ (*Gauss* 方程式と呼ばれる). ただし, $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$, ξ, ζ は \mathcal{E}_f の滑らかな切断で, R^D は接続 D の曲率テンソル

$$R^D(X, Y)\xi := D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X, Y]}\xi$$

とする.

3 空間形タイプの接続接束

可微分多様体 M^n 上の接続接束 $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi)$ に対し, $g_\varphi := \varphi^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ は半正定値計量となる. 接続接束が**完備**であるとは, M^n 上の対称 $(0, 2)$ -テンソル T で, コンパクトな台を持ち, $g_\varphi + T$ が完備なリーマン計量を与えるようなものが存在するときをいう². さらに, 定曲率リーマン多様体のリーマン曲率テンソルの形を参考にして, 次のように接続接束に定曲率性を導入する.

定義 4 ([9]). 実数 k に対し, 接続接束 $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi)$ が**定曲率 k を持つ**とは,

$$R^D(X, Y)\xi = k(\langle \varphi(X), \xi \rangle \varphi(Y) - \langle \varphi(Y), \xi \rangle \varphi(X))$$

が成り立つときをいう (ただし, $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$, ξ は \mathcal{E} の切断). 定曲率 k を持つ完備な接続接束を**空間型タイプ**と呼ぶ.

² フロントル, より一般に可微分写像 $f : M^n \rightarrow (N^{n+1}, h)$ の完備性も第 1 基本形式 $ds^2 := f^*h$ に対する同様の条件を用いて定義される. このような完備性は, ミンコフスキー空間の極大曲面 [12, 35], 平坦波面 (H^3 の場合 [13], \mathbf{R}^3 の場合 [24]) に用いられている.

線形写像 $\varphi_p : T_p M^n \rightarrow \mathcal{E}_p$ が単射でないとき, $p \in M^n$ を特異点と呼ぶ. 特異点集合 S_φ が空の場合には, 空間型タイプの接続接束はリーマン多様体としての空間形とみなすことができる. しかし, $S_\varphi \neq \emptyset$ の場合には球面上に平坦³な接続接束構造が入る.

例 5 ([9]). 写像 $f_E : S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を

$$f_E(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := (x_1, \dots, x_n, 0)$$

とする. ただし, $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ としている (cf. 図 2). f_E の特異点集合 S_{f_E} は赤道 $S_{f_E} = \{\mathbf{x} \in S^n; x_{n+1} = 0\}$ で与えられる. 定値写像 $\nu := (0, \dots, 0, 1)$ は f_E に沿う単位法線ベクトル場を与えるため, f_E は余向き付け可能なフロントルである (波面ではない). 例 2 のように定まる誘導接続接束 $\mathcal{E}_{f_E} = (\mathcal{E}_{f_E}, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi_{f_E})$ は, 完備かつ平坦となる. 平坦性は Gauss 方程式から確かめられる (cf. 補題 6).

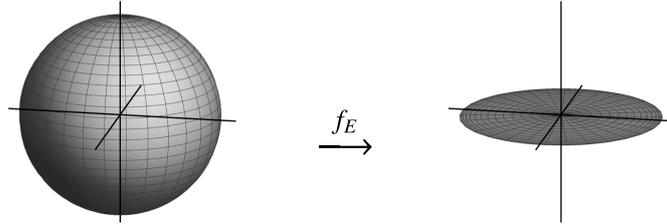


図 2: フロントル f_E の像 (cf. 例 5). S^n 上の誘導接続接束 \mathcal{E}_{f_E} は平坦である.

より一般に, フロントルに対する Gauss 方程式から次がわかる:

補題 6 ([9]). フロントル $f : M^n \rightarrow \Sigma^{n+1}(c)$ に対し, ν を単位法線ベクトル場とする. このとき, f の誘導接続接束 \mathcal{E}_f が定曲率 c を持つことと, $\text{rank}(d\nu) \leq 1$ が M^n 上で成り立つことは同値である.

4 波面としての空間形の等長はめ込み

定曲率 c の単連結な n 次元空間型 $\Sigma^n(c)$ の $\Sigma^{n+1}(c)$ への等長はめ込みを考える. そのような等長はめ込みは

- $c = 0$ の場合, 完備な平面曲線上の柱面 (Hartman-Nirenberg の定理 [4]),
- $c > 0$ の場合, 全測地的 (O'Neill-Stiel の定理 [28])

³定曲率 $k = 0$, つまり $R^D = 0$ のこと.

に限る⁴. とくに $n = 2, c = 0$ の場合, \mathbf{R}^2 の \mathbf{R}^3 への等長はめ込みは \mathbf{R}^3 の完備な平坦曲面と同値である. つまり, 完備かつ平坦な正則曲面は柱面となるが, 特異点を許容すると非自明な例が豊富に存在する. Murata-Umehara は \mathbf{R}^3 の完備な**平坦波面**の分類を与え, 向き付け可能性と余向き付け可能を示した. さらに, 埋め込まれたエンドを持つものは4頂点定理に類する性質を持つことを示した [24].

事実 7 ([24]). 連結な2次元多様体 M^2 に対し, $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を完備な平坦波面で, 特異点集合が空でないものとする. このとき, f は臍点を持たず向き付け可能であり, かつ余向き付け可能である. また, ある変曲点を持たない正則閉曲線 $\xi : S^1 \rightarrow S^2$ と S^1 上の1次微分形式 $\alpha = a(t) dt$ で $\int_{S^1} \xi \alpha = 0$ を満たすものが存在して, f は

$$f_{\alpha, \xi}(t, v) := v \xi(t) + \sigma(t) \quad \left(\sigma(t) := \int_0^t a(t) \xi(t) dt \right)$$

で定まる写像 $f_{\alpha, \xi} : S^1 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ と合同である. 逆に, このような f は特異点集合が空でない完備な平坦波面を与える. さらに, f の全てのエンドが埋め込みであるならば, f のカस्प辺でない特異点は少なくとも4つ存在する.

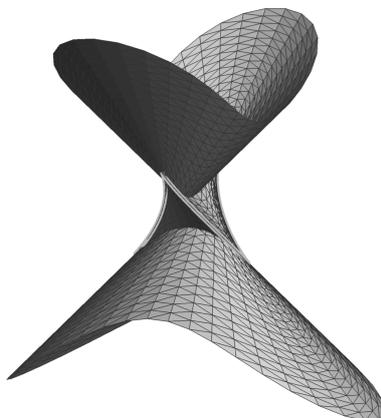


図 3: \mathbf{R}^3 の埋め込まれたエンドを持つ完備な平坦波面. カस्प辺でない特異点は全てツバメの尾であり, その個数は4つである. したがって, 事実 7 にある評価は最良である.

これらの結果を通して, 平坦でない場合や一般次元の場合には何が起こるのかという自然な疑問が生じる. 講演者は論文 [9] において, O'Neill-Stiel の定理 [28] の波面の枠組みでの一般化を与えた. つまり, 正曲率の空間形タイプの接続接束の球面への等長実現を分類した:

⁴ $c < 0$ の場合, 非自明な例が豊富に存在する [27, 3]. 分類については Abe-Mori-Takahashi [1] を参照 (cf. [7]).

定理 8 ([9]). 正定曲率 $c > 0$ の球面を $S^{n+1}(c)$, M^n を連結な n 次元可微分多様体, $f: M^n \rightarrow S^{n+1}(c)$ を波面とする. もし誘導連接接束 \mathcal{E}_f が定曲率 c の空間型タイプならば, f は全測地的もしくは $S^{n+1}(c)$ の正則閉曲線の半径 $\pi/(2\sqrt{c})$ のチューブである. とくに, M^n は S^n もしくは $S^1 \times S^{n-1}$ と微分同相であり, 向き付け可能である.

定理 8 において相似変換により $c = 1$ として一般性を失わず, 定理 8 は単位球面 S^{n+1} の全測地的でない定曲率 1 の完備な波面は正則閉曲線の半径 $\pi/2$ のチューブであることを主張する. Murata-Umehara の結果により $n = 2, c = 0$ の場合は余向き付け可能性も成り立つが, 定理 8 からは $n = 2, c = 1$ の場合は余向き付け可能かどうかは不明である. 実際, そのような波面で余向き付け不可能な例が存在し (図 4 参照), 余向き付け不可能である必要十分条件は中心曲線が半周期的であることもわかる [9]. また, 完備性を外すと向き付け不可能な例も存在する (図 5, Naokawa [26] を参照).

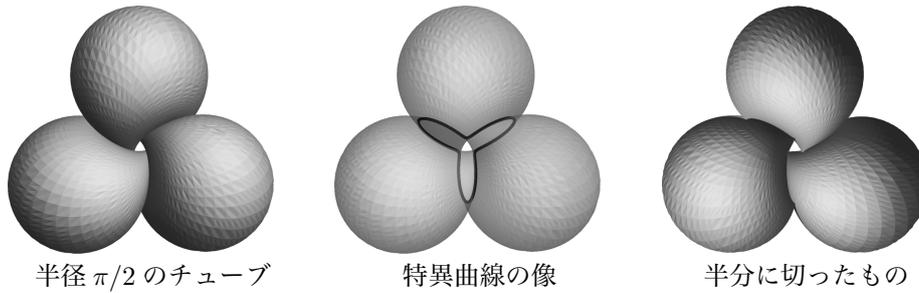


図 4: S^3 の余向き付け不可能な定曲率 1 の完備な波面. 中心曲線は曲率 $\kappa = 4/3$, 振率 $\tau = 5/3$ の常螺旋であり, 半周期的となる. 特異曲線の像も常螺旋となり, 特異点は全てカスプ辺である.



図 5: S^3 の向き付け不可能な定曲率 1 の波面 (cf. [38, 22, 25]).

完備な正則曲線 $\gamma(s): \mathbf{R} \rightarrow S^{n+1}$ (s は弧長パラメータ) に対し, その半径 $\pi/2$ のチューブ $T(\gamma) := \{p \in S^{n+1}; \text{dist}_{S^{n+1}}(p, \gamma) = \pi/2\}$ は次の写像で計数付けられる:

$$f(s, \mathbf{x}) := x_1 \mathbf{e}_1(s) + \cdots + x_n \mathbf{e}_n(s).$$

ここで、 $s \in \mathbf{R}$ で、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ 、さらに、 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は $\gamma(s)$ の法束の正規直交フレーム、つまり $\{\gamma, \gamma', \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ が $\gamma(s)$ に沿う $\text{SO}(n+2)$ の正規直交フレームとなるように定める。 $T(\gamma) = T(-\gamma)$ から、 $\gamma(s)$ もしくは $-\gamma(s)$ のことを中心曲線と呼ぶ。 Bishop フレーム [2] をとることで、各 $s \in \mathbf{R}$ に対してある $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ が存在して $p = (s, \mathbf{x})$ が f の特異点となることを示すことができる。これを用いると以下が成り立つ。

命題 9 ([9]). 完備な正則曲線 $\gamma(s) : \mathbf{R} \rightarrow S^{n+1}$ の半径 $\pi/2$ のチューブは、臍点を持たない弱完備⁵ な定曲率 1 の波面となる。もし、 f が完備ならば中心曲線は閉曲線となり、余向き付け不可能ならば半周期的⁶ となる。

実際、 $\nu := \gamma(s)$ は f の単位法線ベクトル場を与え、 $\gamma(s)$ の正則性から $\text{rank}(d\nu) = 1$ となる。補題 6 により f は定曲率 1 となることがわかる。

以下、定理 8 の証明の概略を紹介する。補題 6 により、単位球面 S^{n+1} の全測地的でない $\text{rank}(d\nu) \leq 1$ を満たす完備な波面が正則閉曲線の半径 $\pi/2$ のチューブであることを示せばよい。以後、 $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$ を全測地的でない完備かつ余向き付け可能な波面で $\text{rank}(d\nu) \leq 1$ を満たすものとする。

波面 f の臍点 $p \in M^n$ とは、ある同時に 0 にならない実数の組 (δ_1, δ_2) が存在し、 $\delta_1(df)_p = \delta_2(d\nu)_p$ となるときをいう。もし特異点 p が臍点ならば、 $(df)_p = 0$ となる。一方、 $\text{rank}(d\nu) \leq 1$ が成り立つことから、点 p が臍点である必要十分条件は $(d\nu)_p = 0$ となる。したがってこの場合、全測地的であることと全臍的であることは同値である。つまり、次がわかる。

補題 10. S^{n+1} の定曲率 1 の波面の臍点は正則点である。

いま、 $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$ は全測地的、つまり全臍的でないので、臍点集合を \mathcal{U}_f とするとき、非臍点集合 $M^n \setminus \mathcal{U}_f$ は空でない。

補題 11. 各非臍点 $q \in M^n \setminus \mathcal{U}_f$ に対して、その座標近傍 $(U; u_1, \dots, u_n)$ と滑らかな関数 $\rho : U \rightarrow \mathbf{R}$ が存在して

$$-\rho \nu_{u_1} = f_{u_1}, \quad \nu_{u_1} \neq 0, \quad \nu_{u_j} = 0, \quad \langle \nu_{u_1}, f_{u_j} \rangle = 0$$

が各 $j = 2, \dots, n$ に対して成り立つ。

これにより、臍点のない定曲率 1 波面は $(n-1)$ 次元の大球面による葉層構造を持つことがわかり、したがって f は臍点のないところでは半径 $\pi/2$ のチューブと

⁵波面 $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$ に対して、その Legendre リフト L による誘導計量 $ds_{\#}^2 := ds^2 + \langle d\nu, d\nu \rangle$ は Riemann 計量となる。 $ds_{\#}^2$ が完備のとき、 f を弱完備と呼ぶ。完備な波面は弱完備であることが知られている (Murata-Umehara [24])。

⁶ 周期 $L > 0$ の閉曲線 γ が半周期的であるとは、 $\gamma(s+L/2) = -\gamma(s)$ が全ての s に対して成り立つときをいう。

なることがわかる. さらに, f の正則点集合上での主曲率は $1/\rho, 0, \dots, 0$ となることもわかる. ρ は曲率半径関数と呼ばれる.

正則曲線 $\sigma(t) : \mathbf{R} \supset I \rightarrow M^n$ は, $d\nu(\sigma'(t)) = 0$ となるとき, 漸近線と呼ばれる. 波面であることから $d\nu(\sigma'(t)) \neq 0$ となるため, t を弧長パラメータに取り替えることができる. 補題 11 を用いると, 次が成り立つ.

補題 12. 各非臍点 $q \in M^n \setminus \mathcal{U}_f$ を通る漸近線 $\sigma(t) : I \rightarrow M^n$ に対して, $\rho''(t) = -\rho(t)$ ($\rho(t) := \rho|_{\sigma(t)}$) が成り立つ. さらに, $\sigma(t)$ は \mathcal{U}_f には集積しない.

補題 12 により, 各漸近線上で曲率半径関数 ρ はある定数 $a, b \in \mathbf{R}$ を用いて $\rho(t) = a \cos t + b \sin t$ と表すことができる. ここで, 各漸近線はリフト計量 $ds_{\#}^2$ の測地線であることがわかり, (弱)完備性から $\sigma(t)$ は全ての $t \in \mathbf{R}$ に対して定義される. したがってとくに, $\rho(t_0) = 0$ となる t_0 が存在することがわかる.

補題 13. f は臍点を持たない.

この補題を示すことができれば, 定理 8 はほぼ証明される. 補題 13 の証明の概略を紹介する. 臍点を持つと仮定する. $\mathcal{U}_f \neq \emptyset$ かつ \mathcal{U}_f が閉集合であることから $q \in \partial\mathcal{U}_f$ をとることができる. このとき, 非臍点集合内の点列 $\{q_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$ となるものがとれる. $\sigma_n(t)$ を各 q_n を通る漸近線とする. 補題 12 により, 各 $\sigma_n(t)$ 上で $\rho(\sigma_n(t_n)) = 0$ となる t_n がとれる. つまり, $Q_n := \sigma_n(t_n)$ は特異点である. $\{Q_n\}$ の適当な部分列をとることで, $Q_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \in \partial\mathcal{U}_f$ となるが, Q_∞ は特異点かつ臍点となり, 補題 10 に矛盾する. したがって, f は臍点を持たないことがわかる.

定理 8 の系として, 完備な定曲率 c の波面の焦面の性質を調べることができる. ここで焦面とは, 平行波面の特異点の軌跡として与えられる.

定理 14 ([9]). M^n を連結な n 次元可微分多様体, $f : M^n \rightarrow S^{n+1}(c)$ を全測地的でない完備な定曲率 c の波面とする. このとき, f の焦面 C_f も全測地的でない連結かつ完備な定曲率 c の波面となる. さらに, f が余向き付け可能ならば, C_f もそうである.

一般には, 連結な波面の焦面は連結になるとは限らないが, 今回の場合は焦面をとる操作で連結性や完備性, 余向き付け可能性が保たれることがわかる.

5 連接接束と Kossowski 計量

連接接束は波面の内在的な構造を抽出したものとみなすことができる. 一方で, 波面の誘導計量をモデルとした半正定値のクラスが Kossowski [17] により導入された. ここでは, 長谷川大氏, 直川耕祐氏, 佐治健太郎氏, 梅原雅顕氏, 山田光

太郎氏との共同研究 [6] において得られた結果を紹介する。以下、 $n = 2$ の場合を考える⁷。

5.1 カस्प辺とツバメの尾の判定法

2つの滑らかな写像芽 $f_1, f_2 : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ に対して、 f_1 と f_2 が右左同値 (または \mathcal{A} -同値) であるとは、 $(\mathbf{R}^2, 0)$ と $(\mathbf{R}^3, 0)$ の微分同相写像芽 ϕ, Φ が存在し、 $f_2 = \Phi \circ f_1 \circ \phi^{-1}$ となるをいい、 $f_1 \sim_{\mathcal{A}} f_2$ で表す。写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ が $f \sim_{\mathcal{A}} f_C$ (resp. $f \sim_{\mathcal{A}} f_S$) を満たすとき、カस्प辺 (resp. ツバメの尾) と呼ぶ。ただし、 $f_C, f_S : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ は

$$f_C(u, v) := (u^2, u^3, v), \quad f_S(u, v) := (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$$

とする (図 1 参照)。

\mathbf{R}^2 の領域 U 上で定義された (余向き付け可能な) フロント $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ を 1 つ固定する。 (u, v) を U の座標系とすると、符号付き面積密度関数 $\lambda(u, v) := \det(f_u, f_v, \nu)$ は特異点の識別子である。つまり、 $p \in U$ が特異点である必要十分条件は $\lambda(p) = 0$ で与えられる。特異点 p が**非退化**であるとは $d\lambda(p) \neq 0$ となるをいう。このとき、陰関数定理より U 内の正則曲線 $\gamma(t)$ ($|t| < \varepsilon$) で $p = \gamma(0)$ かつ γ が特異点集合を計数付けるようなものが存在する。また、 $\gamma(t)$ に沿う 0 でないベクトル場 η で $df(\eta(t)) = 0$ となるものが存在する。 $\gamma(t)$ を特異曲線、 $\eta(t)$ を null ベクトル場と呼ぶ。

事実 15 (Kokubu-Rossmann-Saji-Umehara-Yamada [15]). $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面、 $p \in U$ を非退化な特異点とする。 $\gamma(t)$ を特異曲線 ($\gamma(0) = p$)、 $\eta(t)$ を null ベクトル場とする。このとき、 f が p でカस्प辺である必要十分条件は、 $\gamma'(0)$ と $\eta(0)$ が 1 次独立となることである。また、 f が p でツバメの尾である必要十分条件は、 $\gamma'(0)$ と $\eta(0)$ が 1 次従属であり

$$(5.1) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(\gamma'(t), \eta(t)) \neq 0$$

が成り立つことである。

ここで、 $\gamma'(0)$ と $\eta(0)$ が 1 次独立であることは特異曲線の像 $\hat{\gamma}(t) := f(\gamma(t))$ が $t = 0$ の近傍で正則曲線となることと同値である。フロントであるが波面でない特異点でその条件を満たすようなものは豊富に存在する (例えばカस्प状交差帽子など。図 6 参照)。そのようなフロントの特異点を第 1 種特異点と呼ぶ。

⁷一般次元の場合は Saji-Umehara-Yamada [34] を参照。

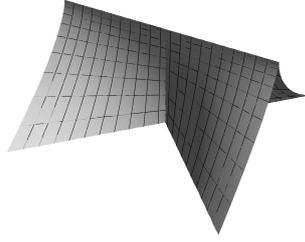


図 6: カスプ状交差帽子. フロントルだが波面ではない第 1 種特異点.

5.2 Kossowski 計量に付随する接続接束, Gauss-Bonnet 型定理

2次元可微分多様体 M^2 に対し, $d\sigma^2$ を M^2 上の半正定値計量とする. 写像 $\Gamma : \mathfrak{X}(M^2) \times \mathfrak{X}(M^2) \times \mathfrak{X}(M^2) \rightarrow C^\infty(M^2)$ を

$$\Gamma(X, Y, Z) := \frac{1}{2} \left(X \langle Y, Z \rangle + Y \langle X, Z \rangle - Z \langle X, Y \rangle \right. \\ \left. + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle \right)$$

と定める ($X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^2)$). ただし, $\langle X, Y \rangle := d\sigma^2(X, Y)$ とする. 点 $p \in M^2$ が $d\sigma^2$ の**特異点**であるとは, $(d\sigma^2)_p$ が正定値でないときをいう. 特異点がないとき, つまり $d\sigma^2$ がリーマン計量の場合は $\Gamma(X, Y, Z) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle$ となる (∇ は Levi-Civita 接続). 特異点 $p \in M^2$ において, $\langle \eta_p, v \rangle = 0$ ($v \in T_p M^2$) を満たす $\eta_p \in T_p M^2$ を null ベクトルと呼ぶ. $\mathcal{N}_p \subset T_p M^2$ で null ベクトル全体, $\mathcal{N} := \cup_{p \in M^2} \mathcal{N}_p$ とおく. このとき, 制限 $\hat{\Gamma} := \Gamma|_{\mathfrak{X}(M^2) \times \mathfrak{X}(M^2) \times \mathcal{N}}$ はテンソルとなる [17]. したがって, 多重線形写像 $\hat{\Gamma}_p : T_p M^2 \times T_p M^2 \times \mathcal{N}_p \rightarrow \mathbf{R}$ が誘導される.

定義 16. 全ての特異点 $p \in M^2$ で $\hat{\Gamma}_p = 0$ となるとき, $d\sigma^2$ を**許容的**という.

例えば, フロントル $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ の第 1 基本形式は許容的である⁸. これは, $\Gamma(X, Y, Z) = D_X df(Y) \cdot df(Z)$ となることからわかる.

局所座標近傍 $(U; u, v)$ において, $d\sigma^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ と表す.

定義 17. 許容的な半正定値計量 $d\sigma^2$ は, 任意の局所座標近傍 $(U; u, v)$ に対して, U 上の滑らかな関数 λ が存在して

$$EG - F^2 = \lambda^2$$

となるとき, **フロントル計量**と呼ばれる.

特異点 $p \in M^2$ は λ の零点として特徴付けられる. 波面の場合と同様に, $d\lambda(p) \neq 0$ を満たす特異点 p を**非退化**という. また, 符号付き面積要素 $d\hat{A} := \lambda du \wedge dv$ が M^2 上 well-defined であるとき, $d\sigma^2$ を余向き付け可能という.

⁸より一般に, 滑らかな写像 $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ の第 1 基本形式は M^2 上の許容的な半正定値計量を与える.

定義 18. 全ての特異点が非退化であるようなフロントル計量を **Kossowski 計量** と呼ぶ.

全ての特異点が非退化な接続接束 $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi)$ に対し, その誘導計量は Kossowski 計量を定める. 逆に次がなりたつ.

定理 19 ([6]). *Kossowski 計量 $d\sigma^2$ に対し, 誘導計量が $d\sigma^2$ となるような接続接束 $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi)$ が存在する.*

一般次元の場合にも Kossowski 計量が定義され, Saji-Umehara-Yamada [34] により定理 19 の高次元版が示されている.

定理 19 の応用として, Gauss-Bonnet 型定理が得られる. 接続接束に対する Gauss-Bonnet 型定理が Saji-Umehara-Yamada [31] により得られた. Kossowski 計量に対し, その付随する接続接束 (定理 19 参照) へ Saji-Umehara-Yamada [31] の結果を適用することで, Kossowski 計量に対する Gauss-Bonnet 型定理が導かれることを紹介する.

波面の場合と同様に, Kossowski 計量の特異点 $p \in M^2$ に対し, 特異曲線 $\gamma(t)$ と null ベクトル場 $\eta(t)$ が定まる. 特異点 $p \in M^2$ が A_2 -点であるとは, $\gamma'(0)$ と $\eta(0)$ が 1 次独立となるときをいう. A_2 -点でない特異点が (5.1) を満たすとき, A_3 -点と呼ぶ.

A_2 -点 $p \in M^2$ に対し, その局所座標近傍 $(U; u, v)$ で

$$d\sigma^2 = E du^2 + \frac{\lambda^2}{E} dv^2, \quad E_v(u, 0) = \lambda(u, 0) = 0$$

となるものが存在する. 特異曲線は $\gamma(u) = (u, 0)$ で与えられる. このとき $\kappa_s(u) := -E_{vv}/(2\sqrt{E}\lambda_v)|_{v=0}$ を特異曲率と呼ぶ. 面積要素 $dA := |\lambda| du \wedge dv$ に対して $M_{\pm}^2 := \{p \in M^2; d\hat{A}_p = \pm dA_p\}$ と定める. また, A_3 -点が正 (resp. 負) であるとは, M_{\pm}^2 (resp. M_{\mp}^2) の p での内角が 2π のときをいう⁹. $d\sigma^2$ の特異点集合を $S_{d\sigma^2}$ とする. Gauss 曲率 K は正則点集合 $M^2 \setminus S_{d\sigma^2}$ 上で定義されるが, Kossowski [17] は $d\sigma^2$ が余向き付け可能であるとき, $K d\hat{A}$ は M^2 上の滑らかな 2-形式 Ω に延長されることを示した. このとき, 次が成り立つ.

定理 20 ([6]). 2次元可微分多様体 M^2 はコンパクトで境界を持たず, さらに向き付け可能であるとする. $d\sigma^2$ を Kossowski 計量で, 高々 A_2 -点と A_3 -点しか持たないものとする. このとき,

$$(5.2) \quad 2\pi\chi(M^2) = \int_{M^2} K dA + 2 \int_{S_{d\sigma^2}} \kappa_s d\tau$$

⁹このとき, M_{\pm}^2 (resp. M_{\mp}^2) の p での内角は 0 となる

が成り立つ。ただし、 τ は特異曲線の弧長パラメータとする。さらに、 $d\sigma^2$ が余向き付け可能ならば

$$(5.3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} \Omega = \chi(M_+^2) - \chi(M_-^2) + \#S_+ - \#S_-$$

が成り立つ。ただし、 $\#S_+$ (resp. $\#S_-$) は、正 (resp. 負) の A_3 -点の個数とする。¹⁰

参考文献

- [1] K. Abe, H. Mori and H. Takahashi, *A parametrization of isometric immersions between hyperbolic spaces*, *Geom. Dedicata* **65** (1997), 31–46.
- [2] R.L. Bishop, *There is more than one way to frame a curve*, *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), 246–251.
- [3] D. Ferus, *On isometric immersions between hyperbolic spaces*, *Math. Ann.* **205** (1973), 193–200.
- [4] P. Hartman and L. Nirenberg, *On spherical image maps whose Jacobians do not change sign*, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 901–920.
- [5] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps*, *Selecta Mathematica* **20** (2014), 769–785.
- [6] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, *Internat. J. Math.* **26** (2015), 1540008, 34 pp.
- [7] A. Honda, *Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space*, *Tohoku Math. J. (2)* **64** (2012), 171–193.
- [8] A. Honda, *Weakly complete wave fronts with one principal curvature constant*, *Kyushu J. Math.* **70** (2016) 217–226.
- [9] A. Honda, *Isometric immersions with singularities between space forms of the same positive curvature*, *J. Geom. Anal.* **27** (2017), 2400–2417.
- [10] S. Izumiya, T. Nagai and K. Saji, *Great circular surfaces in the three-sphere*, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), 409–425.

¹⁰ \mathbf{R}^3 の閉波面に対しては、Kossowski [18] は (5.2) を示しており、Langevin-Levitt-Rosenberg [19] が (5.3) を示している。ただし、[18] では特異曲率 κ_s は定義されておらず、 $\kappa_s d\tau$ を微分形式として扱っている。

- [11] Y. Kitagawa and M. Umehara, *Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3* , *Geom. Dedicata* **155** (2011), 105–140.
- [12] O. Kobayashi, *Maximal surfaces with conelike singularities*, *J. Math. Soc. Japan* **36** (1984), 609–617.
- [13] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *An elementary proof of Small’s formula for null curves in $PSL(2, C)$ and an analogue for Legendrian curves in $PSL(2, C)$* , *Osaka J. Math.* **40** (2003), 697–715.
- [14] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics*, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 265–299.
- [15] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, *Pacific J. Math.* **221** (2005), 303–351.
- [16] N.H. Kuiper, *Stable surfaces in Euclidean three space*, *Math. Scand* **36** (1975), 83–96.
- [17] M. Kossowski, *Realizing a singular first fundamental form as a nonimmersed surface in Euclidean 3-space*, *J. Geom.* **81** (2004) 101–113.
- [18] M. Kossowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, *Ann. Global Anal. Geom.* **21** (2002), 19–29.
- [19] R. Langevin, G. Levitt and H. Rosenberg, *Classes d’homotopie de surfaces avec rebroussements et queues d’aronde dans R^3* , *Canad. J. Math.* **47** (1995), 544–572.
- [20] L. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, *Geometry and Topology of Manifolds*, 247–281, Springer Proc. Math. Stat., 154, Springer, Shanghai, 2016.
- [21] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, *Tohoku Math. J. (2)* **68** (2016), 73–90.
- [22] Y. Kurono and M. Umehara, *Flat Möbius strips of given isotopy type in \mathbf{R}^3 whose centerlines are geodesics or lines of curvature*, *Geom. Dedicata* **134** (2008), 109–130.
- [23] William S. Massey, *Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space*, *Tôhoku Math. J. (2)* **14** (1962), 73–79.

- [24] S. Murata and M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, J. Differential Geom. **82** (2009), 279–316.
- [25] K. Naokawa, *Singularities of the asymptotic completion of developable Möbius strips*, Osaka J. Math. **50**, 425–437 (2013).
- [26] K. Naokawa, *Extrinsically flat Möbius strips on given knots in 3-dimensional spaceforms*, Tohoku Math. J. (2) **65** (2013), 341–356.
- [27] K. Nomizu, *Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space*, Math. Ann. **205** (1973), 181–192.
- [28] B. O’Neill and E. Stiel, *Isometric immersions of constant curvature manifolds*, Michigan Math. J. **10** (1963), 335–339.
- [29] P. Roitman, *Flat surfaces in hyperbolic space as normal surfaces to a congruence of geodesics*, Tohoku Math. J. (2) **59** (2007), 21–37.
- [30] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), 491–529.
- [31] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of corank one singular points on wave fronts*, Kyushu J. Math. **62** (2008), 259–280.
- [32] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A_2 -singularities of hypersurfaces with non-negative sectional curvature in Euclidean space*, Kodai Math. J. **34** (2011), 390–409.
- [33] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts*, J. Geom. Anal. **22** (2012), 383–409.
- [34] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *An index formula for a bundle homomorphism of the tangent bundle into a vector bundle of the same rank, and its applications*, J. Math. Soc. Japan **69** (2017), 417–457.
- [35] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.
- [36] J. West, *The differential geometry of the cross-cap*, Ph. D. thesis, Liverpool Univ. 1995.
- [37] H. Whitney, *The general type of singularity of a set of $2n-1$ smooth functions of n variables*, Duke Math. J. **10** (1943), 161–172.
- [38] W. Wunderlich, *Über ein abwickelbares Möbiusband*, Monatsh. Math. **66** (1962), 276–289.