小さい初期値に対する非線型波動方程式の解の最大存在時刻の評価について

若狭 恭平 *

1 序論と主結果

次の半線型波動方程式に対する初期値問題を考える:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^p & \text{in} \quad \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f(x), \ u_t(x,0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, $n \in \mathbf{N}$, $p > 1$, f, g は, コンパクト台をもつ滑らかな初期値であり, $\varepsilon > 0$ は "小さい" パラメータとする. (1.1) の解の最大存在時刻, ライフスパン $T(\varepsilon)$ を,

$$T(\varepsilon) := \sup\{t > 0 : \exists \text{ 適当に固定した } (f,g) \text{ に対して } (1.1) \text{ の解が存在 }\},$$

で定義する. ここで解は, $p \geq 2$ のときは古典解で, $1 < p < 2$ のときは (1.1) に対応する積分方程式の C^1 級の解とする.

$n = 1$ のときは, Kato [7] によって, すべての $p > 1$ に対して $T(\varepsilon) < \infty$ が示されている. $n \geq 2$ のときは, Strauss [13] による, 以下の Strauss 予想が知られている.

$$\begin{array}{lll} T(\varepsilon) = \infty & \text{if } p > p_0(n) \text{ かつ } \varepsilon \text{ は "十分小"} & \text{(時間大域解の存在)}, \\ T(\varepsilon) < \infty & \text{if } 1 < p \leq p_0(n) & \text{(解の有限時間内爆発)}, \end{array}$$

$p_0(n)$ は, Strauss 指数と呼ばれ, 2 次方程式 $\gamma(p,n) = 0$ の正根である. ここで,

$$\gamma(p,n) := 2 + (n+1)p - (n-1)p^2 \tag{1.2}$$

であり,

$$p_0(n) = \frac{n + 1 + \sqrt{n^2 + 10n - 7}}{2(n-1)}. \tag{1.3}$$

*email: wakasa@mmm.muroran-it.ac.jp

$p_0(n)$ は n に関して単調減少することがわかる．また, $p_0(2)=(3+\sqrt{17})/2$, $p_0(3)=1+\sqrt{2}$, $p_0(4)=2$, $1<p_0(n)<2$ $(n\geq 5)$ である．この予想は, 多くの研究者によって解決され, 最終的な結果は, 以下の表にまとめることができる.

	$p<p_0(n)$	$p=p_0(n)$	$p>p_0(n)$
$n=2$	Glassey [2]	Schaeffer [11]	Glassey [3]
$n=3$	John [6]	Schaeffer [11]	John [6]
$n\geq 4$	Sideris [12]	Yordanov & Zhang [16] Zhou [20], indep.	Georgiev & Lindblad & Sogge [1]

解の爆発が起こる場合, すなわち, $1<p\leq p_0(n)$ のとき, $T(\varepsilon)$ の評価も興味の対象となる．以下, c と C は ε に依らない正定数とする．$n=1$ のとき, すべての $p>1$ に対して, $T(\varepsilon)$ の評価が Zhou [17] によって得られた:

$$\begin{cases} c\varepsilon^{-(p-1)/2}\leq T(\varepsilon)\leq C\varepsilon^{-(p-1)/2} & \text{if} \quad \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx\neq 0, \\ c\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)}\leq T(\varepsilon)\leq C\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} & \text{if} \quad \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx=0. \end{cases} \tag{1.4}$$

更に, Lindblad [9] は $p=2$ のときに以下の詳細な評価を得た:

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{1/2}T(\varepsilon)>0 & \text{if} \quad \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx\neq 0, \\ \exists \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{2/3}T(\varepsilon)>0 & \text{if} \quad \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx=0. \end{cases} \tag{1.5}$$

同様に, Lindblad [9] は $(n,p)=(2,2)$ のときも詳細な評価を得た:

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{\varepsilon\to+0}a(\varepsilon)^{-1}T(\varepsilon)>0 & \text{if} \quad \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} g(x)dx\neq 0, \\ \exists \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon T(\varepsilon)>0 & \text{if} \quad \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} g(x)dx=0, \end{cases} \tag{1.6}$$

ここで $a=a(\varepsilon)$

$$a^2\varepsilon^2\log(1+a)=1 \tag{1.7}$$

をみたす量である.

$1<p<p_0(n)$ $(n\geq 3)$ または $2<p<p_0(2)$ $(n=2)$ のとき, 次の評価の予想が得られている:

$$c\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,n)}\leq T(\varepsilon)\leq C\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,n)}, \tag{1.8}$$

ここで, $\gamma(p,n)$ は (1.2) で定義される．これらの予想も以下のようにまとめられる:

	$T(\varepsilon)$ の下からの評価	$T(\varepsilon)$ の上からの評価
$n=2$	Zhou [19]	Zhou [19]
$n=3$	Lindblad [9]	Lindblad [9]
$n\geq 4$	Lai & Zhou [8]	Takamura [14]

この表において, $n=2,3$ の場合も

$$\exists \lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^{2p(p-1)/\gamma(p,n)}T(\varepsilon)>0$$

が得られている. $p=p_0(n)$ のときは, 次のライフスパンの評価の予想がある.

$$\exp\left(c\varepsilon^{-p(p-1)}\right)\leq T(\varepsilon)\leq \exp\left(C\varepsilon^{-p(p-1)}\right). \tag{1.9}$$

これらの評価も以下の表でまとめられている.

	$T(\varepsilon)$ の下からの評価	$T(\varepsilon)$ の上からの評価
$n=2$	Zhou [19]	Zhou [19]
$n=3$	Zhou [18]	Zhou [18]
$n\geq 4$	Lindblad & Sogge [10] : $n\leq 8$ or radially symm. sol.	Takamura & Wakasa [15]

本研究では, 未解決の場合である, $n=2$ かつ $1<p<2$ の場合のライフスパンの評価を導出することが目的である. Takamura [14] の Remark 4.1 によれば, 次の評価が成立することが予想されている.

$$\begin{cases} \exists \lim_{\varepsilon\to+0} T(\varepsilon)\varepsilon^{(p-1)/(3-p)}>0 & \text{if} \quad \int_{\mathbf{R}^2} g(x)dx\neq 0, \\ \exists \lim_{\varepsilon\to+0} T(\varepsilon)\varepsilon^{2p(p-1)/\gamma(p,2)}>0 & \text{if} \quad \int_{\mathbf{R}^2} g(x)dx=0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Takamura [14] の, Theorem 3.2 と Theorem 4.1 では, (1.10) の部分的な結果である, $T(\varepsilon)$ の 上からの評価が得られている. 我々は, (1.10) の形を導出するための第一段階として, 下からの評価を得た.

Theorem 1.1 (Imai, Kato, Takamura and Wakasa [5]) *$n=2$, $1<p<2$ とし, $(f,g)\in C_0^3(\mathbf{R}^2)\times C_0^2(\mathbf{R}^2)$ を仮定する. このときある正定数 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(f,g,p,k)$ が存在して, $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ に対して, (1.1) の解のライフスパン $T(\varepsilon)$ は, 以下をみたす:*

$$\begin{cases} T(\varepsilon)\geq c\varepsilon^{-(p-1)/(3-p)} & \text{if} \quad \int_{\mathbf{R}^2} g(x)dx\neq 0, \\ T(\varepsilon)\geq c\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,2)} & \text{if} \quad \int_{\mathbf{R}^2} g(x)dx=0, \end{cases} \tag{1.11}$$

ここで c は ε に依らない正定数である.

2 鍵となる補題

以下, $(f,g) \in C_0^3(\mathbf{R}^2) \times C_0^2(\mathbf{R}^2)$ は

$$\text{supp }(f,g) \subset \{x \in \mathbf{R}^2 \ : \ |x| \le k\}, \ k > 1 \tag{2.1}$$

をみたすと仮定する.

$$\begin{aligned} u_L(x,t) &:= \frac{\partial}{\partial t} R(f|x,t) + R(g|x,t), \\ R(\phi|x,t) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y|\le t} \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy = \frac{t}{2\pi} \int_{|\xi|\le 1} \frac{\phi(x+t\xi)}{\sqrt{1-|\xi|^2}} d\xi. \end{aligned} \tag{2.2}$$

とおく. このとき, u_L は

$$\begin{cases} (u_L)_{tt} - \Delta u_L = 0 & \text{in } \mathbf{R}^2 \times [0,\infty), \\ u_L(x,0) = f(x), \ (u_L)_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbf{R}^2 \end{cases}$$

の古典解となり, 有限伝播性

$$\text{supp } u_L \subset \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 \times [0,\infty) \ : \ |x| \le t + k\}. \tag{2.3}$$

をみたす. Theorem 1.1 で鍵となるのは, 次の補題である.

Lemma 2.1 (Lindblad [9]) *u_L を (2.2) で定義されるものとする. このときある正定数 $C_0 = C_0(\|f\|_{W^{3,1}(\mathbf{R}^2)}, \|g\|_{W^{2,1}(\mathbf{R}^2)}, k)$, $\widetilde{C_0} = \widetilde{C_0}(k)$ が存在して, u_L は $\mathbf{R}^2 \times [0,\infty)$ において以下をみたす:*

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|\le 1} |\nabla_x^\alpha u_L(x,t)| \le & \left| \int_{\mathbf{R}^2} g(x) dx \right| \cdot \frac{\widetilde{C_0}}{(t+|x|+2k)^{1/2}(t-|x|+2k)^{1/2}} \\ & + \frac{C_0}{(t+|x|+2k)^{1/2}(t-|x|+2k)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Lindblad [9] では, (2.4) の形で述べられていなかった. 我々は, [9] の証明を詳細にし, 具体的な評価式で書くことにより, g の積分量によるライフスパンの評価の違いを明らかにした. 証明は, [5] の Lemma 2.1 を参照のこと.

以下では次の積分方程式を考察する:

$$u(x,t) = u^0(x,t) + L(F)(x,t) \quad \text{for } (x,t) \in \mathbf{R}^2 \times [0,\infty), \tag{2.5}$$

ここで, $u^0 := \varepsilon u_L$ であり, $F \in C(\mathbf{R}^2 \times [0,\infty))$ に対して

$$L(F)(x,t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^t (t-\tau) \int_{|\xi|\le 1} \frac{F(x+(t-\tau)\xi, \tau)}{\sqrt{1-|\xi|^2}} d\xi d\tau \tag{2.6}$$

である. 特に, $F \in C^2(\mathbf{R}^2 \times [0,\infty))$ に対して, (2.5) は

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = F & \text{in } \mathbf{R}^2 \times [0,\infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f(x),\ u_t(x,0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R}^2 \end{cases}$$

をみたす.

最後に, 解の構成で重要なアプリオリ評価について述べる. 解は, (2.5) で形式的に $F = |u|^p$ とおいた積分方程式を, John [6] の, ある重み付き L^∞ ノルムを持つ空間における逐次近似法により構成する. そのために, 重み付き L^∞ ノルムを定義する.

$r, t \geq 0$ に対して, 重み関数を定義する:

$$w_1(r,t) := \tau_+(r,t)^{1/2}\tau_-(r,t)^{1/2}, \tag{2.7}$$

$$w_2(r,t) := \tau_+(r,t)^{1/2}\tau_-(r,t)^{3/2}, \tag{2.8}$$

$$w_3(r,t) := \tau_+(r,t)^{p/2-1}, \tag{2.9}$$

ここで,

$$\tau_+(r,t) := \frac{t+r+2k}{k}, \quad \tau_-(r,t) := \frac{t-r+2k}{k}.$$

これらの重み関数に対して, V の重み付き L^∞ ノルムを以下で定義する:

$$\|V\|_i := \sup_{(x,t)\in\mathbf{R}^2\times[0,T]} \{w_i(|x|,t)|V(x,t)|\}, \tag{2.10}$$

ここで, $i = 1, 2, 3$.

次が最も重要なアプリオリ評価である. 証明は, [5] の Lemma 3.1 を参照のこと.

Lemma 2.2 L は (2.6) で定義されるものとする. $V \in C(\mathbf{R}^2 \times [0,T])$ は supp $V \subset \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 \times [0,T] : |x| \leq t + k\}$ と $\|V\|_i < \infty$ $(i = 1, 3)$ を仮定する. このとき, k と T に依らないある正定数 C_1 が存在して次が成立する.

$$\|L(|V|^p)\|_1 \leq C_1 k^2 \|V\|_1^p D_1(T), \tag{2.11}$$

$$\|L(|V|^p)\|_3 \leq C_1 k^2 \|V\|_3^p D_2(T), \tag{2.12}$$

ここで, $D_i(T)$ $(i = 1, 2)$ は

$$D_1(T) := \left(\frac{2T+3k}{k}\right)^{3-p}, \tag{2.13}$$

$$D_2(T) := \left(\frac{2T+3k}{k}\right)^{\gamma(p,2)/2}, \tag{2.14}$$

で定義される.

$\square$

References

[1] V.Georgiev, H.Lindblad and C.D.Sogge, *Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations*, Amer. J. Math., **119**(1997), 1291-1319.

[2] R.Glassey, *Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations*, Math. Z., **177**(1981), 323-340.

[3] R.Glassey, *Existence in the large for* $\Box u = f(u)$ *in two space dimensions*, Math. Z, **178**(1981), 233-261.

[4] L.Hörmander, "Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations", Mathématiques & Applications 26, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.

[5] T.Imai, M.Kato, H.Takamura and K.Wakasa, *The sharp lower bound of the lifespan of solutions to semilinear wave equations with low powers in two space dimensions*, to appear in Proceeding of the international conference "Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave equations" of a volume in Advanced Study of Pure Mathematics, (arXiv.1610.05913).

[6] F.John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math., **28**(1979), 235-268.

[7] T.Kato, *Blow up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math, **33**(1980), 501-505.

[8] N.-A.Lai and Y.Zhou, *An elementary proof of Strauss conjecture*, J. Functional Analysis., **267**(2014), 1364-1381.

[9] H.Lindblad, *Blow-up for solutions of* $\Box u = |u|^p$ *with small initial data*, Comm. Partial Differential Equations, **15(6)**(1990), 757-821.

[10] H.Lindblad and C.D.Sogge, *Long-time existence for small amplitude semilinear wave equations*, Amer. J. Math., **118**(1996), 1047-1135.

[11] J.Schaeffer, *The equation* $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ *for the critical value of* p, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **101A**(1985), 31-44.

[12] T.C.Sideris, *Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions*, J. Differential Equations, **52**(1984), 378-406.

[13] W.A.Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*, J. Funct. Anal., **41**(1981), 110-133.

[14] H.Takamura, *Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equations*, Nonlinear Analysis TMA **125** (2015), 227-240.

[15] H.Takamura and K.Wakasa, *The sharp upper bound of the lifespan of solutions to critical semilinear wave equations in high dimensions*, J. Differential Equations **251** (2011), 1157-1171.

[16] B.Yordanov and Q.S.Zhang, *Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions*, J. Funct. Anal., **231**(2006), 361-374.

[17] Y.Zhou, *Life span of classical solutions to* $u_{tt}-u_{xx}=|u|^{1+\alpha}$, Chin. Ann. Math. Ser.B, **13**(1992), 230-243.

[18] Y.Zhou, *Blow up of classical solutions to* $\Box u=|u|^{1+\alpha}$ *in three space dimensions*, J. Partial Differential Equations, **5**(1992), 21-32.

[19] Y.Zhou, *Life span of classical solutions to* $\Box u=|u|^p$ *in two space dimensions*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **14**(1993), 225-236.

[20] Y.Zhou, *Blow up of solutions to semilinear wave equations with critical exponent in high dimensions*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **28**(2007), 205-212.