保型形式の周期, 合同, L関数の特殊値および関連する話題

桂田英典　(室蘭工業大学大学院工学研究科)*

1. はじめに

この小文においては，Siegel保型形式の合同について解説する．ひとくちにSiegel保型形式の合同といっても様々なタイプの問題がある．そこで最初に，どのような合同を扱うのか，次の良く知られている例をもとに説明しよう．

$$G_k(z) = \frac{(-1)^{k/2}(k-1)!}{2(2\pi)^k} \sum_{(c,d)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} (cz+d)^{-k}$$

を重さ k の $SL_2(\mathbf{Z})$ に関するEisenstein級数とする．また，

$$\Delta(z) = \mathbf{e}(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathbf{e}(nz))^{24} \qquad \mathbf{e}(z) = \exp(2\pi i z)$$

をRamanujanのデルタ関数とする．このとき，$G_k(z)$ および $\Delta(z)$ は次のようなFourier展開をもつ．

$$G_k(z) = \frac{\zeta(1-k)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)\mathbf{e}(nz), \qquad \Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_\Delta(n)\mathbf{e}(nz).$$

ここで $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ である．このとき，次の合同式が知られている．

$$c_\Delta(n) \equiv \sigma_{11}(n) \bmod 691.$$

ここで, 691はRiemannのzeta関数 $\zeta(s)$ の -11 における値 $\zeta(-11)$ の分子 (あるいはBernoulli数 B_{12} の分子）であることに注意されたい．また，この2つの保型形式はHecke固有形式（すなわちHecke作用素の同時固有関数）であり，上の合同はHecke固有値（Hecke作用素の固有値）の間の合同を与えているという見方もできることにも注意しよう．$\Delta(z)$ と $G_{12}(z)$ はともに重さ12の $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する保型形式でありながら一方はcusp形式，他方はそうではないというように解析的性質が異なっており，それ故Fourier係数の大きさにも際立った違いがある．それにもかかわらず，上に述べたような合同があり，その合同を与える素数が由緒正しい L 関数（ここではRiemannのzeta関数）の特殊値に関係する．また，このタイプの合同は代数的整数論および数論幾何学においても重要な役割をはたす．筆者の最近の興味の1つはこのような現象をSiegel保型形式の中に多く見つけることにある．さて，このようなことをSiegel保型形式で考えるとき，Hecke固有値の合同を考える方が都合が良い場合がある[1]．それ故，この論説においては主としてある（固定された）Siegel保型形式の空間における性質の異なる2つのHecke固有形式の間のHecke固有値の間の合同を扱う．特に楕円保型形式 f

* e-mail: `hidenori@mmm.muroran-it.ac.jp`

[1] 例えば保型形式のGalois表現の合同を考える際この立場は本質的である．

の”lift”$\hat{f}$と”lift”からは得られない保型形式との合同がfに付随するL関数の値に関係すること，およびそのような合同がfと$\hat{f}$の周期(Petersson内積）関係から得られることを, 主としてDuke-IMamoglu-Ikeda liftと呼ばれるliftをとおして眺めてみたい.

本論説は２０１６年７月に行われた数理科学談話会における筆者の講演に基づいている．講演の機会を与えてくださった、室蘭工業大学数理科学ユニットの同僚に感謝します.

2. Siegel 保型形式

この節では次節以降に出てくるSiegel保型形式に関する基本的な言葉を復習する．$\mathbf{R}$の部分環Kに対して

$$GSp^+(n,K)=\{g\in GL_{2n}(K)\mid {}^tgJg=\nu(g)J,\ \exists\nu(g)>0\},$$

$$Sp(n,K)=\{g\in GL_{2n}(K)\mid {}^tgJg=J\}$$

と定義する．ここで$J=\begin{pmatrix}O_n & -1_n\\ 1_n & O_n\end{pmatrix}$とする．特に$\Gamma^{(n)}=Sp(n,\mathbf{Z})$とおく．$\mathbf{C}$の部分環$R$にたいして$Sym_n(R)$で$R$に成分をもつ$n$次対称行列からなる集合を表す．また，実対称行列$S$が正定値，半正定値のときそれぞれ$S>0,\ S\geq 0$と書く．$n$次Siegel上半空間$\mathbf{H}_n$を

$$\mathbf{H}_n=\{Z\in Sym_n(\mathbf{C})\mid \mathrm{Im}(Z)>0\}$$

で定義する．ここで$\mathrm{Im}(Z)$はZの虚部を表す．$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in GSp^+(n,\mathbf{R})$と$Z\in\mathbf{H}_n$に対して

$$M\langle Z\rangle=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$

および

$$j(M,Z)=\det(CZ+D)$$

とおく．$M\langle Z\rangle$は$\mathbf{H}_n$に属しこれにより$GSp^+(n,\mathbf{R})$の$\mathbf{H}_n$への作用が定まる．kを整数とする．$\mathbf{H}_n$上の関数Fに対して$F|_kM$を

$$(F|_kM)(Z)=\det(M)^{k/2}j(M,Z)^{-k}F(M\langle Z\rangle)$$

と定義する．$\mathbf{H}_n$上の関数Fが以下の条件をみたすとき重さkの$\Gamma^{(n)}$に関する(正則）保型形式であるという：

(i) Fは$\mathbf{H}_n$上の正則関数

(ii) $(F|_kM)(Z)=f(Z)$がすべての$M\in\Gamma^{(n)}$について成り立つ

(iii) もし$n=1$ならすべての$\alpha>0$に対して$F(Z)$は$\{x+iy\mid y\geq\alpha\}$上有界.

$F(Z)$をkの$\Gamma^{(n)}$に関する保型形式とするとき$F(Z)$は

$$F(Z)=\sum_{\substack{A\in\mathcal{L}_n\\ A\geq 0}}c_F(A)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(AZ))$$

と Fourier 展開される．ここで

$$\mathcal{L}_n = \{A = (a_{ij}) \in Sym_n(\mathbf{Q}) \mid a_{ji} = a_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbf{Z},\ a_{ii} \in \mathbf{Z}\}$$

であり，tr は行列の跡 (trace) を表す．このとき $F(Z)$ が cusp 形式であるとは次の条件をみたすときをいう：

(iv) A が正定値でなければ $c_F(A) = 0$.

特に $\Gamma^{(1)} = SL_2(\mathbf{Z})$ であり，$\Gamma^{(1)}$ に関する保型形式 $f(z)$ は，すべての $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$ にたいして

$$f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) = (cz+d)^k f(z)$$

をみたし，

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_f(m)\mathbf{e}(mz)$$

と Fourier 展開される $\mathbf{H}_1$ 上の正則関数である．

次に

$$\Gamma_0(4) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \bmod 4\}$$

とおくとき，重さ $k+1/2$ の $\Gamma_0(4)$ に関する保型形式, および cusp 形式が同様に定義される．実際は保型因子の定義等の問題がありまったく同じように定義できるわけではないが，ここでは詳細は省略する． $l = k$ または $k+1/2$ とし，Γ を $l = k$ のとき $\Gamma^{(n)}$, $l = k+1/2$ のとき $\Gamma = \Gamma_0(4)$ とおくとき，$M_l(\Gamma)$ で重さ l の Γ に関する重さ l の Γ に関する保型形式の空間を表す．また，$S_l(\Gamma)$ で重さ l の Γ に関する cusp 形式の空間を表す．

$F, G \in M_l^{\infty}(\Gamma)$ に対して積分

$$[\Gamma^{(n)} : \Gamma]^{-1} \int_{\Phi_\Gamma} F(Z)\overline{G}(Z)(\det(\mathrm{Im}(Z)))^l d\Phi$$

が収束するならばこれを Petersson 内積といい $\langle F, G\rangle$ で表す．ここで Φ_Γ は $\mathbf{H}_n$ の Γ に関する基本領域を表し，$d\Phi$ は $\mathbf{H}_n$ 上定義された $GL_n(\mathbf{R})$-不変体積要素である．この積分は F かつ G が $M_l(\Gamma)$ に属しさらにそのどちらかが $S_l(\Gamma)$ に属するならば上の積分は収束する．特に F が cusp 形式のとき，$\langle F, F\rangle$ を f の周期と呼ぶ

S を $GSp^+(2n, \mathbf{Q})$ の部分半群とし，K を $\mathbf{C}$ の部分環とするとき，$\mathcal{R}_K(S, \Gamma^{(n)})$ で Hecke 対 $(S, \Gamma^{(n)})$ に付随した K 上の Hecke 環を表す．すなわち，$\mathcal{R}_K(S, \Gamma)$ は $M \in S$ の $\Gamma^{(n)}$ に関する両側剰余類 $\Gamma^{(n)}M\Gamma^{(n)}$ で生成される K 上の自由加群にしかるべき積を導入した環である．特に，$\mathbf{L}_n = \mathcal{R}_{\mathbf{Z}}(GSp^+(n, \mathbf{Q}) \cap M_{2n}(\mathbf{Z})), \Gamma^{(\mathbf{n})})$ とおく．k を正の整数とする．$\mathbf{L}_n$ の元 $T = \Gamma^{(n)}M\Gamma^{(n)}$ を

$$T = \cup_\gamma \Gamma^{(n)}\gamma$$

と剰余類分解し $F \in M_k(\Gamma^{(n)})$ に対して $F|_k T$ を

$$F|_k T = \det(M)^{k/2-(n+1)/2} \sum_\gamma f|_k \gamma$$

と定義するとこれにより $\mathbf{L}_n$ の $M_k(\Gamma^{(n)})$ への作用が定まる．これを Hecke 作用素という．すべての $T \in \mathbf{L}_n$ の同時固有関数を Hecke 固有形式という．F を $M_k(\Gamma^{(n)})$ の Hecke 固有形式とするとき，すべての $T \in \mathbf{L}_n$ に対して，

$$F|T = \lambda_F(T)F \ (\lambda_F(T) \in \mathbf{C})$$

と表される．すべての $\lambda_F(T)$ $(T \in \mathbf{L}_n)$ で $\mathbf{Q}$ 上生成される体を Hecke 体といい $\mathbf{Q}(F)$ で表す．$\mathbf{Q}(F)$ は有限次総実代数体である．k が半整数のときにも $M_k(\Gamma_0(4))$ 上の Hecke 作用素が定義され，Hecke 固有形式が定義される．

3. 保型形式に付随する L 関数

N を正の整数とする．$\chi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C}$ が以下の条件を満たす時, N を法とする Dirichlet 指標という:

(1) $a \equiv b \bmod N$ ならば $\chi(a) = \chi(b)$

(2) $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$

(3) $\chi(a) \neq 0$ であることと a と N が互いに素であることは同値.

$N = 1$ のときはすべての $a \in \mathbf{Z}$ にたいして $\chi(a) = 1$ となる．これを主指標という．Dirichlet 指標 χ に対して

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

を χ の Dirichlet L 関数という．χ が主指標のとき，これは Riemann の zeta 関数となる．Dirichlet 指標 χ と

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_f(m)\mathbf{e}(mz) \in S_k(\Gamma^{(1)})$$

にたいして

$$L(s,f,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_f(m)\chi(m)}{m^s}$$

を χ で捻った f の Hecke L 関数という．χ が主指標のときこれを単に $L(s,f)$ と書く．Hecke 固有形式 $f \in S_k(\Gamma^{(1)})$ が $a_f(n) = 1$ をみたすとき原始形式という．このとき，各素数 p にたいして

$$a_f(p) = p^{(k-1)/2}(\alpha_p + \alpha_p^{-1})$$

となる $\alpha_p \in \mathbf{C}^\times$ をとれば,

$$L(s,f,\chi) = \prod_p \{(1 - \alpha_p\chi(p)p^{-s+k/2-1/2})(1 - \alpha_p^{-1}\chi(p)p^{-s+k/2-1/2})\}^{-1}$$

と表される．また，adjoint L 関数 $L(s,f,\mathrm{Ad})$ を

$$L(s,f,\mathrm{Ad}) = \prod_p \{(1-\alpha_p^2 p^{-s})(1-\alpha_p^{-2}p^{-s})(1-p^{-s})\}^{-1}$$

と定義する．Hecke 固有形式 $F \in S_k(\Gamma^{(n)})$ にたいして standard L 関数 $L(s,F,\underline{\mathrm{St}})$ が定義される．定義の詳細は省略するが，F が重さ k の $\Gamma^{(1)}$ に関する原始形式のとき，これは adjoint L 関数に一致することに注意しておく．

4. Duke-Imamoglu- Ikeda lift および Hermitian-Ikefa lift の周期

一般に， 整数または半整数重さの 1 変数 Hecke 固有形式 f に対して Siegel Hecke 固有形式 $\hat{f}$ でその standard L 関数が f に付随する L 関数（Hecke L 関数等) で表されるとき，$\hat{f}$ を f の lift という．

n, k を正の偶数とする．Fourier 展開が

$$\sum_{(-1)^{k-n/2}m\equiv 0,1 \bmod 4} c_g(m)\mathbf{e}(mz)$$

となる cusp 形式全体からなる $S_{k-n/2+1/2}(\Gamma_0(4))$ の部分空間を Kohnen の plus 空間といい，$S^+_{k-n/2+1/2}(\Gamma_0(4))$ で表す．$g(z)$ を Kohnen の plus 空間 $S^+_{k-n/2+1/2}(\Gamma_0(4))$ における Hecke 固有形式とするとき，$S_{2k-n}(\Gamma^{(1)})$ における原始形式 $S(h)$ がしかるべき方法で一意的に定めることができる．この対応を Shimura 対応という．

さて，$S^+_{k-n/2+1/2}(\Gamma_0(4))$ における Hecke 固有形式 $g(z)$ にたいして，$f(z)$ を $S_{2k-n}(\Gamma^{(1)})$ における原始形式で， Shimura 対応により g に対応しているものとする．このとき，Ikeda [3] は次を示した.

$S_k(\Gamma^{(n)})$ における Hecke 固有形式 $I_n(g)$ でその standard L 関数 $L(s, I_n(g), \underline{\mathrm{St}})$ が $\zeta(s)\prod_{i=1}^{n} L(s+k-i, f)$ となるものが存在する．

上における $I_n(g)$ を g の (あるいは f の)Duke-Imamoglu-Ikeda lift と呼ぶ．$I_2(g)$ は f の Saito-Kurokawa lift と呼ばれる．$I_n(g)$ の Fourier 係数 $c_{I_n(g)}(A)$ は $a_f(m)$ と $c_g(m)$ を用いて明示的に表される．特に，$I_n(g)$ は g により一意的に定まる．

さて，Duke-Imamoglu-Ikeda lift の周期に関する主結果を述べるためにいくつかの定義をする．まず，

$$\Gamma_{\mathbf{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$$

とし，

$$\widetilde{\xi}(s,\chi) = \frac{\Gamma_{\mathbf{C}}(s)L(s,\chi)}{\tau(\chi)},$$

$$\Lambda(s,f,\chi) = \frac{\Gamma_{\mathbf{C}}(s)L(s,f,\chi)}{\tau(\chi)},$$

$$\widetilde{\Lambda}(s,\, f, \mathrm{Ad}) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s)\Gamma_{\mathbf{C}}(s+2k-n-1)L(s,\, f, \mathrm{Ad})$$

とおく．ここで，$\tau(\chi)$ は χ の Gauss 和である．特に χ が主指標のとき，$\widetilde{\xi}(s),\ \Lambda(s,f,\chi)$ をそれぞれ $\widetilde{\xi}(s),\ \Lambda(s,f)$ とおく．このとき，次が成り立つ．

定理 4.1. ([17]) 上の条件の下で，

$$\frac{\langle I_n(g),\, I_n(g)\rangle}{\langle g,\, g\rangle} = 2^{\alpha(n,k)}\Lambda(k,\, f)\widetilde{\xi}(n)\prod_{i=1}^{n/2-1}\widetilde{\Lambda}(2i+1,\, f,\, \mathrm{Ad})\,\widetilde{\xi}(2i)$$

が成り立つ．ここで $\alpha(n,\, k)$ はある整数である．

これは Ikeda[4] によって予想されていた. $n=2$ のとき, 上の定理は Kohnen と Skoruppa により示されている．

定理 4.1 の証明は以下の方針で行う (cf. [14], [17]):

(1) $I_n(g)$ および g の周期がその留数に現れるいくつかの Dirichlet 級数を考え，その明示公式を求める．

(2) (1) の留数を比較する．

いずれの場合にも局所体上の精密な 2 次形式論が必要となる (cf. [6], [7],[8], [10], [15],[16]).

Ikeda は [5] において 1 変数保型形式から Hermitian 保型形式の lift(Hermitian Ikeda lift) を構成し，定理 4.1 と同様な周期予想を提示した．これは，修正および拡張された形で証明されている (cf. [12], [13]).

さて，K を $S_{2k-n}(\Gamma^{(1)})$ におけるすべての原始形式の Hecke 体を含む有限次代数体とする．A を K の整数環とし，$\mathfrak{P}$ を A の素イデアルとする．このとき $S_{2k-n}(\Gamma^{(1)})$ における原始形式 f に対して，適当な条件の下で，Eichler-Shimura 同型を通して f の規準周期 (canonical period) と呼ばれる 2 つの複素数 $\Omega_f^{(\pm)}$ が定義される． $A_{\mathfrak{P}}$ を A の K 内での $\mathfrak{P}$ における局所化とすると，$\Omega_f^{(\pm)}$ は各々 $A_{\mathfrak{P}}$ の単数倍を除いて一意的に決まる．また

$$\frac{\langle f, f\rangle}{\Omega(f)^{(+)}\Omega(f)^{(-)}}$$

は $A_{\mathfrak{P}}$ に属する．このとき，$0 < m \leq 2k-n-1$ に対して $j = \chi(-1)(-1)^{m-1}$ とおき，

$$\mathbf{L}(m, f, \chi) = \frac{\Gamma(m)L(m, f, \chi)}{\tau(\chi)(2\pi\sqrt{-1})^m\Omega_f^{(j)}}$$

と定める．ここで，$\tau(\chi)$ は χ の Gauss 和である．このとき $\mathbf{L}(m, f, \chi)$ は K 上 χ の値によって生成される体 $K(\chi)$ に属することが知られている．また，

$$\mathbf{L}(m,\, f,\, \mathrm{Ad}) = \frac{\widetilde{\Lambda}(m,\, f,\, \mathrm{Ad})}{\langle f, f\rangle}$$

とおくと，$1 \leq m \leq k-1, m \equiv 1 \bmod 2$ ならば，$\mathbf{L}(m,\, f,\, \mathrm{Ad}) \in K$ であることも知られている． さて，定理 1.1 と Kohnen と Zagier の結果により次を示すことができる．

定理 4.2. f と g を上のとおりとする．このとき，任意の基本判別式 D に対して

$$\frac{c_g(|D|)^2\langle f,\, f\rangle^{n/2}}{\langle I_n(g),\, I_n(g)\rangle} = \frac{a_{n,k}|D|^{k-n/2}\mathbf{L}(k-n/2, f, \chi_D)}{\widetilde{\xi}(n)\mathbf{L}(k,\, f)\prod_{i=1}^{n/2-1}\mathbf{L}(2i+1,\, f,\, \mathrm{Ad})\widetilde{\xi}(2i)}$$

が成り立つ．ここで $a_{n,k}$ はその分母，分子が $2k-1$ より大きい素数で割れないある有理数であり，χ_D は D に付随する *Kronecker* 指標である.

定理 4.2 と f の L 関数の特殊値の代数性により，次が成り立つ．

定理 4.3. 上の仮定に加えて，$k > n$ とし，さらに g の *Fourier* 係数はすべて代数的数であるとする．このとき $\dfrac{\langle I_n(g),\, I_n(g)\rangle}{\langle f,\, f\rangle^{n/2}}$ は代数的数である.

これは $n = 2$ のときは Furusawa, 一般のときは Choie-Kohnen によってすでに示されている．

5. Duke-Imamoglu-Ikeda lift と non-Duke-Imamoglu-Ikeda lift の合同

前節で $\dfrac{\langle I_n(g),\, I_n(g)\rangle}{\langle f,\, f\rangle^{n/2}}$ が代数的数で f の Hecke L 関数および adjoint L 関数の特殊値で表されることを見た．それではこの値がどのような整数論的意義を持つのであろう

か．この問いに答えるために，Duke-Imamoglu-Ikeda lift とそうでないものとの間の合同を考える．K を $S_k(\Gamma^{(n)})$ のすべての Hecke 固有形式の Hecke 体の合成体とする．このとき K は $S_{2k-n}(\Gamma^{(1)})$ におけるすべての原始形式の Hecke 体を含む．以下 $k \geq n+1$ と仮定する．このとき $\lambda_F(T)$ は K の整数環に属する．$\mathfrak{P}$ を K の素イデアルとする．2 つの $S_k(\Gamma^{(n)})$ における Hecke 固有形式 F と G が $\mathfrak{P}$ を法として合同であるとは，

$$\lambda_G(T) \equiv \lambda_F(T) \bmod \mathfrak{P}$$

がすべての $T \in \mathbf{L}_n$ に対して成り立つときをいう．$S_k(\Gamma^{(n)})^*$ をすべての Hecke 固有形式 $g \in S^+_{k-n/2+1}(\Gamma_0(4))$ の Ikeda lift $I_n(g)$ によって生成される $S_k(\Gamma^{(n)})$ の部分空間とする．さて，定理 4.2 において周期の比の分母に $\mathbf{L}(k,\, f)\prod_{i=1}^{n/2-1}\mathbf{L}(2i+1,\, f,\, \mathrm{Ad})$ が現れることに注意する．この事実と [9] における Siegel 尖点形式の合同に関する一般的結果より次が成り立つ (cf. [11])．

定理 5.1. $k \geq 2n+4$ とし $f, K, \mathfrak{P}$ を上のとおりとする．次を仮定する．
(1) $\mathfrak{P}$ は $\mathbf{L}(k,f)\prod_{i=1}^{n/2-1}\mathbf{L}(2i+1,f,\mathrm{Ad})$ を割る．
(2) ある整数 $1 \leq m \leq k/2-n/2-1$ とある M を法とする原始指標 χ とある基本判別式 D に対して $\mathfrak{P}$ は $MD((2k-1)!$ を割らず
$\tilde{\xi}(2m+\delta_\chi,\chi)\prod_{i=1}^{n}\mathbf{L}(2m+\delta_\chi+k-i,f,\chi)\mathbf{L}(k-n/2,f,\chi_D)$ を割らない．ここで $\delta_\chi = (1+\chi(-1))/2$ とする．
(3) $\mathfrak{P}$ は $a_f(p)C_{k,n}\dfrac{\langle f,f\rangle}{\Omega(f)^{(+)}\Omega(f)^{(-)}}$ を割らない．ここで p は $\mathfrak{P}$ で割り切れる素数であり，$n=2$ またはそうでないかに応じて $C_{k,n}=1$ または
$\prod_{q\leq(2k-n)/12}(1+q+\cdots+q^{n-1})$ である．
このとき $S_k(\Gamma^{(n)})^*$ に属さないある Hecke 固有形式 G が存在して G と $I_n(g)$ は $\mathfrak{P}$ を法として合同である．

6. その他の lift の周期と合同

Ikeda は [4] において Duke-Imamoglu-Ikeda lift の周期予想 (定理 4.1) を含む一般的な周期の予想を与えている．特に 2 つの楕円尖点形式 f,g の Ikeda-Miyawaki lift と呼ばれる Siegel 尖点形式の周期について同様の予想を与えている．この予想を仮定すれば Ikeda-Miyawaki lift と non-Ikeda-Miyawaki lift との合同について定理 5.1 と同様の結果が得られる (cf. [2])．また，Kim-Ramakrishnan-Shahidi lift と呼ばれる $\Gamma^{(2)}$ に関する vector 値保型形式への lift に関して周期予想およびそれに基づく合同に関して予想が提出されており，いくつかの場合にそれを支持する数値例が得られている (cf. [18])．

参考文献

[1] G. Harder, A congruence between a Siegel and an elliptic modular form, manuscript 2003, reproduced in The 1-2-3 of Modular Forms (K. Ranestad, ed.), 247-262, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2008.

[2] T. Ibukiyama, H. Katsurada, C. Poor, and D. S. Yuen, Cogruences to Ikeda-Miyawaki lifts and triple L-values of elliptic modular forms, J. Number Theory 134(2014)142-180.

[3] T. Ikeda, On the lifting of elliptic modular forms to Siegel cusp forms of degree $2n$, Ann. of Math. 154(2001), 641-681.

[4] T. Ikeda, Pullback of lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's conjecture, Duke Math. J. 131 (2006), 469-497.

[5] T. Ikeda, On the lifting of hermitian modular forms, Compositio Math. 1144(2008) 1107-1154.

[6] T. Ikeda and H. Katsurada, On the Gross-Keating invariant of a quadratic form over a non-archimedian local field, To appear in Amer. J. Math.

[7] T. Ikeda and H. Katsurada, An explicit formula for the Siegel series of a half-integral matrix over the ring of integers in a non-archimedean local field, Preprint 2017

[8] H. Katsurada, An explicit formula for the Siegel series. Amer. J. Math. 121(1999), 415-452.

[9] H. Katsurada, Congruence of Siegel modular forms and special values of their standard zeta functions, Math. Z. 259(2008) 97-111.

[10] H. Katsurada, An explicit formula for the twisted Koecher Maass series of the Duke-Imamoglu-Ikeda lift and its application, Math. Z. 276(2014)1049-1075.

[11] H. Katsurada, Congruence between Duke-Imamoglu-Ikeda lifts and non-Duke-Imamoglu-Ikeda lifts, Comment. Math. St. Pauli, 64(2015)109-129.

[12] H. Katsurada, Period the Ikeda lift for $U(m, m)$, Math. Z. 286(2017) 141-178.

[13] H. Katsurada, Period of the adelic Ikeda lift for $U(m, m)$, To appear in Abhand. Math. Sem. Univ. Hamburg.

[14] H. Katsurada and H. Kawamura, A certain Dirichlet series of Rankin-Selberg type associated with the Ikeda lifting, J. Number Theory 128(2008) 2025-2052.

[15] H. Katsurada and H. Kawamura, On the Andrianov identity for a power series attached to Jacobi forms and its application, Acta Arithmetica, 145(2010), 233-265.

[16] H. Katsurada and H. Kawamura, Koecher-Maass series of a certain half-integral weight modular form related with the Duke-Imamoglu-Ikeda lift, Acta. Arith. (2014)1-42.

[17] H. Katsurada and H. Kawamura, On Ikeda's conjecture on the period of the Duke-Imamoglu-Ikeda lift, Proc. London Math. Soc. 111(2015) 445-483.

[18] H. Katsurada and S. Takemori, Congruence primes of the Kim-Ramakrishnan-Shahidi lift, Experiment. Math. 25(2016) 332-346.