種々の非線形問題に対する変分解析

内免大輔 (室蘭工業大学 ひと文化系領域)

概要

我々の身の回りの様々な現象はその系に対応する適切な積分量「エネルギー」の最小値を達成する状態として理解される。シャボン玉はなぜ丸いか？という身近な問題も同様の定式化によって考えることのできる一つの例である。本講演では，幾何学，生物，物理現象に現れる種々の問題をこうした「変分問題」としていかに定式化し解析するかについて，その概要を紹介する。さらに後半では，より専門的な立場から，峠の定理に代表される「臨界点理論」について解説する。最後に，種々の非線形問題に対するその応用として，近年の私の研究を紹介する。

1 Introduction

1.1 色々な変分問題

我々の身の回りの自然現象を数理科学的に考察したとき，それらは各系に対応する「エネルギー」の最小値を達成する状態であるとして理解されることが多い。例えば，よく知られた「フェルマーの原理」がその一つである。フェルマーの原理の述べるところによると，光がある 2 点間を通過するとき，光はあらゆる経路のうちで通過時間が最短となる経路をとる。このことにより，一様媒質中ならば光は直進するという経験的に明らかな事実を説明するとともに，光が異なる媒質中を通過する際に現れる屈折や反射現象についての法則を導くことができる。一方で，次のような自然現象も変分問題として考えられる。針金の枠に張った石鹸膜に息を吹きかけると丸いシャボン玉ができる。これは誰しもが経験的に知っていることであろう。しかし，シャボン玉はなぜ丸いのであろうか？ある一定の体積（吹きかけた息）を囲む曲面は無数に存在するのにも関わらず，なぜ自然は球面を選ぶのであろうか。よく考えてみると不思議な現象である。この問いに対して数理科学的にはどのような回答が可能であろうか。

シャボン玉の材質である石鹸水は表面張力を持つ。実はこの表面張力がシャボン玉を形作っているのである。そして表面張力は石鹸膜の表面積を最小にしようとする性質を持

つ。つまり，シャボン玉は，与えられた一定の体積（吹きかけた息）に対し，その体積を囲む曲面のうちで表面積を最小とするものに他ならない。この問題に対する厳密な数学的定式化を行うと，シャボン玉は平均曲率一定曲面に他ならないということが分かる。

他にも最小作用の原理，等周問題，プラトー問題など様々な変分問題が存在し，様々な物理，生物現象が変分問題として理解できる。これらに共通する考え方として次のようにまとめられるであろう。

『あらゆる可能性 γ に対しエネルギー $E(\gamma)$ が定義され，その最小値を達成する γ が自然現象として達成される』

例えば，上述のフェルマーの原理の場合，可能性 γ は「光の経路」，シャボン玉の問題でそれは「与えられた体積を囲む曲面」にあたる。一方で，エネルギーと我々が呼ぶ $E(\gamma)$ はフェルマーの原理の場合は「通過時間」，シャボン玉の問題では「表面積」にあたる。このような定式化の下で，自然現象の理解は「どのような γ がエネルギー $E(\gamma)$ の最小値を達成するか」という問題に帰着される。つまり変分問題は「エネルギーの極値問題」ということができる。

1.2　エネルギーの極値問題

ここで，さらに議論を進める為に，いくつかの極値問題を思い出すことにする。例えば初等的な極値問題として

問１．$f(x) = x^2$ の極値を与える点を求めよ。

という問題を考えることにする。この場合は非常に容易である。極値を達成する点が満たすべき必要条件（臨界条件）$f'(x) = 0$ から方程式を解き，$f(x)$ は $x = 0$ で極値を達成すると答えることができる。この場合，$f(x)$ は極めて単純な初等関数であらわされた 1 変数関数のため，具体的な解を求めることができた。しかし，我々の考えるべき変分問題はしばしば無限次元空間上で定義された「汎関数」に対する極値問題となる。従って上述のような，方程式を具体的に解くという態度では対応しきれないことが多い。そこで，より汎用性の高い問題を考えることにする。

問２．$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする。このとき f がどのような条件を満たせば f は極値を持つか。

これに対する考え方として，例えば f が最小点を持つための必要条件から，

答 1. f が下に有界

であればよいのではないかと期待される。しかし，この答えは一般には正しくない。例えば $f(x) = e^{-x}$ を考えたとき，f は下に有界であるが極値を持たない。（このような状況を排除するために後に Palais-Smale 条件という条件を導入する。）一方で，このような答えを与えることもできるであろう。それは

答 2. ある実数 a, b が存在し，$0 < a < b$ かつ $f(a) > \max\{f(0), f(b)\}$ を満たす

というものである。実際 f がこの条件を満たせば中間値の定理より，f が極値を持つことが示される。 実はこの条件はのちに述べる「峠の定理」の条件に対応する最も簡単な例である。このようにエネルギーの極値問題を解く場合には，最小点を具体的に求めるというよりも，エネルギー汎関数のグラフの形状に関する部分的な情報から極値の存在を探るという態度が有用である。

2　非線形問題の変分解析

ここからは典型的な問題を解きながら，非線形問題に対する変分解析の概要を述べることにする。その前に変分学の簡単な歴史的な経緯を注意として与える。以下「」内は「変文学」（小松勇作 [6]）からの引用である。「微積分法の発生と殆ど頃を同じくして，変分法がこの世に現れた。ベルヌイ一家のヨハン（1667-1748）とヤコブ (1654-1705) ならびにオイレル (1707-1783) が変分法のいろいろな具体例をとり扱って以来，1760 年に至ってラグランジュ (1736-1813) が力学と関連して変分問題を一般的に処理する方法を導入した。いわゆるオイレルの微分方程式 — 時には彼の名を関してよばれる方程式 — がそこにはじめて明らさまにのべられたのである。しかしながら，ワイエルシュトラス (1815-1897) の時期に至るまでは，単に変分問題の必要条件としてのこの方程式が議論の中心におかれていた。方法的にもっぱら微積分法の域を出ていない限りでは，変分法は⋯（中略）⋯あまり独立な性格を示さなかった。」そして，ルジャンドル (1752-1833) やワイエルシュトラスの頃までに得られた結果の集積がいわゆる古典変分学とよばれるものの内容をなしており，これに対して 19 世紀末から 20 世紀のはじめにかけて「ヒルベルト，トネリ，クーラントなどによっていわゆる直接的方法が組織的に導入された。この方法は変分学の中だけでなく，ひろく解析学にわたって有力な手段を提供してきた。それによって，例えば微分方程式や積分方程式の問題が逆に変分問題に帰着され，豊かな成果がみちびき出され

る。（以下略）」

本講演では上述の 19 世紀以降の直接法の発展後にみられる解析方針をとる。つまり，ある微分方程式を解くための手段として変分法を用いる。ここでは次のような典型的な非線形偏微分方程式について考える。ただし簡単のため $N=2$ とし，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域，$p>1$，$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ を未知関数とする。

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = |u(x)|^{p-2}u(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

ここで，$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \partial^2/\partial x^2$ とする。一般に (P) のような非線形偏微分方程式を具体的に解き，初等関数を用いて解 u をあらわすことは非常に難しい。それではまず第一に何を考えるべきか。それは，そもそも (P) に解が存在するか否かである。これを調べるために，変分的手法が有効である。ここで，(P) に対応する「エネルギー汎関数」を以下のように定義する。

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx \ (u \in H_0^1(\Omega)).$$

ただし，$H_0^1(\Omega)$ は広義一階微分可能な二乗可積分関数のうち，その (広義) 導関数が 2 乗可積分でなおかつ境界上で 0(広義) となる関数からなる集合である。この定義によって $H_0^1(\Omega)$ は無限次元ヒルベルト空間となることが知られている。詳しいことは [3] などの入門書に譲る。この関数空間 $H_0^1(\Omega)$ 上で 1 階 Frèchet 微分 ([3] などを参照のこと) を計算し形式的に部分積分法を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle I'(u), h\rangle &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h dx - \int_\Omega |u|^{p-2}uh dx \\ &= \int_\Omega \left(-\Delta u - |u|^{p-2}u\right) h dx \quad (h \in H_0^1(\Omega)). \end{aligned}$$

ここで，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $H_0^1(\Omega)$ の双対空間 $H^{-1}(\Omega)$ の要素と $H_0^1(\Omega)$ の要素の対を表す。上式において $I'(u)=0$ つまり u が I の臨界点であると仮定すると，変分法の基本補題により，

$$-\Delta u - |u|^{p-2}u = 0 \text{ in } \Omega,$$

でなければならない。これは u が (P) の解であることを示唆している。つまり，上述のような定式化により，(P) の解の存在を調べるためには，汎関数 I の臨界点の存在を調べればよいことになった。これは非線形偏微分方程式そのものを直接解析するよりもはるかに解析がしやすい。（厳密には I の臨界点 $u \in H_0^1(\Omega)$ が方程式の解として十分な滑らかさを持つかどうかを議論する必要があるが，ここでは詳しいことは述べず，議論を先に進

めることにする（専門書 [4] などを参照のこと)）。それでは，当然次のような問題を考えることが重要であろう。

問 3. 一般にエネルギー汎関数はどのような場合に臨界点を持つか。

この問いに対し，回答を与えるのが次章で述べる臨界点理論である。

3 臨界点理論

第 1 章の問 2 に対し与えた答 1，2 に対応する 2 つの定理を紹介する。定理の証明などは入門書 [14] などに譲る。まずは答 1 に対応するものとしてエネルギー汎関数 I が下に有界な場合を考える。ただし第 1 章で述べたように，エネルギー汎関数 I が下に有界であるからといって必ずしも I が臨界点を持つわけではない。反例は先に述べたとおりである。そのような都合の悪い状況を排除するために，Palais-Smale 条件を導入する。まず，Palais-Smale 列を定義する。以下 H をヒルベルト空間，そのノルムを $\|\cdot\|_H$，I は H 上で定義された 1 階連続 Frèchet 微分可能な汎関数とする。

Definition 3.1 (Palais-Smale 列)**.** 点列 $(u_n) \subset H$ が以下の *(i)(ii)* を満たすとき (u_n) は I の *Palais-Smale* 列であるという。

(i) $|I(u_n)|$ は有界.
(ii) $I'(u_n) \to 0$ *as* $n \to \infty$ *in* H^{-1}. ただし，H^{-1} は H の双対空間とする。

以上の定義のもと，Palais-Smale 条件を定義する。

Definition 3.2. I の任意の *Palais-Smale* 列が H の中で強収束をする部分列を持つとき，I は *Palais-Smale* 条件を満たすという。

明らかに，先に与えた反例 $f(x) = e^{-x}$ は $x_n \to \infty$ となるような Palais-Smale 列 $(x_n) \subset \mathbb{R}$ を持つ。これがまさに Palais-Smale 条件を満たさない汎関数の例であった。今後，簡単のため Palais-Smale 列を単に PS 列，Palais-Smale 条件を PS 条件と呼ぶ。下に有界な汎関数が臨界点を有するための十分条件を与えるのが以下の定理である。

定理 3.3. I は下に有界，つまり

$$c_0 := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u) > -\infty$$

を満たすとする。さらに I が *PS* 条件を満たせば，c_0 は I の臨界値である。つまり，

$I(u) = c_0$ となるような I の臨界点 $u \in H$ が存在する。

続いて，答 2 に対応する「峠の定理」を与える。

定理 3.4. *I は以下の (i)-(iii) を満たすものとする。*

(i) $I(0) = 0.$

(ii) ある定数 $a, \rho > 0$ が存在し

$$I(u) \geq a \ for \ \forall u \in H : \|u\|_H > \rho.$$

(iii) ある関数 $e_0 \in H$ が存在し，$\|e_0\|_H > \rho$ かつ $I(e_0) \leq 0.$

このとき，

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) \mid \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e_0\},$$

及び

$$d_0 := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} I(u)$$

と定義すると，$d_0 \geq a$ である。さらに，I が PS 条件を満たせば，d_0 は I の臨界値となる。

上述の 2 つの定理を念頭に置き，我々のエネルギー汎関数の形状を観察することにする。このために，Fibering map[2] を導入すると良い。任意の $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ に対し，

$$f_u(t) := I(tu)$$

と定義する。すると，定義より

$$f_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{t^p}{p} \int_\Omega |u|^p dx$$

を得る。直感的には $f_u(t)$ は関数空間 $H_0^1(\Omega)$ 上の各動径方向に対するエネルギー汎関数のグラフの形状を表しているといえる。明らかに，$1 < p < 2$ のとき $f_u(t)$ は下に有界，$p > 2$ のとき，$f_u(t)$ は極大点をただ一つ持つ。これらから期待されるように実際に，$1 < p < 2$ のときは I が下に有界で PS 条件を満たすことを示すことができる。従って，定理 3.3 より I は最小値を達成する臨界点を持つ。一方で，$p > 2$ のときは I は定理 3.4 の条件 (i)-(iii) 及び PS 条件を満たし，峠点としての臨界点を持つことが分かる。厳密な証明のためには Sobolev 空間の埋め込み定理とその compact 性に関する結果（[3] 等）を用いた解析が必要であるが，ここでは立ち入らないことにする。

4 私の研究-Sobolev 臨界指数を持つ非線形楕円型方程式の変分解析-

最後に私の研究に関して述べる。私は上述のような臨界点理論を用いた非線形偏微分方程式の変分解析を行っている。特に，Sobolev 臨界問題と呼ばれる，非線形項がある種の臨界性を持つ場合に関心を持っている。例えば (P) において $N \geq 3$ かつ $2^* = 2N/(N-2)$ と置いた場合がそれにあたる。一般に非線形楕円型方程式を変分的に解析する際には第 3 章で述べたように無限次元空間上で定義されたエネルギー汎関数に対し臨界点理論を適用することになる。実はこの場合，PS 条件を確かめることが非常に重要かつ興味深い問題となる。なぜならば，無限次元空間では Bolzano-Weierstrass の定理が成立しないからである。つまり，収束部分列を持たない有界列が存在する。このことから PS 列がたとえ有界列であったとしても，直ちに PS 列の収束性を保証することができないのである。実際に，Sobolev の臨界指数を持つ問題においては，収束部分列を持たない PS 列が存在することが知られている。実はこのとき，PS 列は集中現象と呼ばれる，非線形問題特有の興味深い現象を起こしていることが知られている [7][13]。私はこのような状況下において非線形楕円型方程式の解の存在性はどうなるのか，または解が存在するならばどのような解であるのかという問題に関心を持ち研究を行っている。特に近年は「Sobolev の臨界指数を持つ Kirchhoff 型方程式」の変分解析を進めている。この方程式は「伸びる」弦の自由振動を記述する波動方程式 [5][1] として知られている。その定常問題が第 2 章で述べたような変分問題としての構造を持つことから，近年その解析が非常に盛んに行われている。特に方程式の持つ非局所性の影響で解の多重性が誘起されるなど新しい現象が観察されており，興味深い研究対象である。最後にこれに対する私の最近の研究論文を挙げてこの講演録を終える [8]-[12]。

参考文献

[1] A. Arosio, Averaged evolution equations. The Kirchhoff string and its treatment in scales of Banach spaces. Functional analytic methods in complex analysis and applications to partial differential equations (Trieste, 1993), 220–254, World Sci. Publ., River Edge, NJ, (1995).

[2] P. Drábek and S.I. Pohozaev, Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 127, 703—726 (1997).

[3] L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society.

[4] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Third Printing, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001.

[5] G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik, Teubner, Leipzig, (1876).

[6] 小松勇作，「変分学」（数学全書１０），第一版，森北出版 (1975).

[7] P.L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. Part 1., Rev, Mat. Iberoamericana, 1, 145–201 (1985).

[8] D. Naimen, Positive solutions of Kirchhoff type elliptic equations involving a critical Sobolev exponent, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 21, 885–914 (2014).

[9] D. Naimen, On the Brezis-Nirenberg problem with a Kirchhoff type perturbation, Adv. Nonlinear Stud. 15, 135–156 (2015).

[10] D. Naimen, The critical problem of Kirchhoff type elliptic equations in dimension four, J. Differential Equations 257, 1168–1193 (2014).

[11] D. Naimen, A note on a nonlinear elliptic problem with a nonlocal coefficient, J. Math. Anal. Appl. 435 (2016) 1710—1737.

[12] D. Naimen and M. Shibata, Two positive solutions for the Kirchhoff type elliptic problem with critical nonlinearity in high dimension, preprint.

[13] M. Struwe, A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities, Math. Z. 187, 511–517 (1984).

[14] 田中和永，非線形問題２ 変分問題入門 (岩波講座 現代数学の展開１０)，岩波書店, (2000)