

量子ループ代数の組合せ論的表現論

石井 基裕^{*†}

Motohiro Ishii

群馬大学 教育学部 数学教育講座[‡]

Mathematics Education, Faculty of Education, Gunma University

概要

本稿の前半では数理科学談話会でお話しさせて頂いた内容のまとめとして柏原-中島による特殊線型 Lie 環に付随する量子群の表現の結晶基底に対する半標準盤を用いた実現について述べる。後半では談話会ではあまり触れることのできなかつた柏原-中島の結果のある意味での一般化として量子ループ代数の端ウェイト加群の結晶基底に対する組合せ論的な実現に関する研究結果について紹介する。

本稿を通して基礎体を複素数体 \mathbb{C} とする。

1 Lie 環の包絡代数と量子群

Lie 環 \mathfrak{g} の表現論を研究する上で**包絡代数**と呼ばれる結合的な (Hopf) 代数 $U(\mathfrak{g})$ に着目することは有用である。一般に結合的な代数 A が与えられると、

$$[a, b] := ab - ba \quad (a, b \in A)$$

を Lie 積として A は Lie 環になる; この Lie 環を A_{Lie} と書くことにする。すなわち代数の圏 Alg から Lie 環の圏 Lie への関手 $(-)_{\text{Lie}} : \text{Alg} \rightarrow \text{Lie}$ が定まる。このとき包絡代数を与える関手 $U(-) : \text{Lie} \rightarrow \text{Alg}$ は関手 $(-)_{\text{Lie}}$ の左随伴関手として定義される。すなわち、次の自然な同型が成り立つ。

$$\text{Hom}_{\text{Lie}}(\mathfrak{g}, A_{\text{Lie}}) \cong \text{Hom}_{\text{Alg}}(U(\mathfrak{g}), A) \quad (\mathfrak{g} \in \text{Lie}, A \in \text{Alg}).$$

特に V をベクトル空間とすれば、

$$\text{Hom}_{\text{Lie}}(\mathfrak{g}, \text{End}(V)_{\text{Lie}}) \cong \text{Hom}_{\text{Alg}}(U(\mathfrak{g}), \text{End}(V))$$

が成り立つ。これは Lie 環 \mathfrak{g} の V 上への表現と代数 $U(\mathfrak{g})$ の V 上への表現とが 1 対 1 に対応することを意味する。このようにして積が結合的でない Lie 環の表現論を結合的な積を持つ代数の表現論に帰着させることが出来る。

^{*}本研究は科学研究費補助金「研究活動スタート支援」(26887002)の補助を受けました。

[†]e-mail: m.ishii[at]gunma-u.ac.jp

[‡]談話会が行われた 2016 年 1 月 20 日時点での所属は東京電機大学情報環境学部である。

Lie 環 \mathfrak{g} に付随する包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ は次のように \mathfrak{g} のテンソル代数 $T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{g}^{\otimes n}$ の商代数として明示的に構成することができる.

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) / \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g} \rangle_{\text{両側イデアル}}.$$

例 1.1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}f,$

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

は $[x, y] := xy - yx$ ($x, y \in \mathfrak{g}$) を Lie 積として Lie 環となり,

$$[e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f$$

を満たす. このとき \mathfrak{g} に付随する包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ は文字 e, h, f で生成され, 次の基本関係式によって定義される単位元 1 を持つ結合的な代数である.

$$ef - fe = h, \quad he - eh = 2e, \quad hf - fh = -2f.$$

1 のべき根でない $q \in \mathbb{C}^\times$ を 1 つ固定する. 特殊線型 Lie 環 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ やより一般に対称化可能な Kac-Moody Lie 環 \mathfrak{g} に付随する量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ とは, $U(\mathfrak{g})$ の Hopf 代数としての構造を変形して得られる非可換かつ非余可換な Hopf 代数であり, Drinfeld と神保によって独立に導入されたものである (量子群の定義については例えば [K95] を参照せよ).

例 1.2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ に付随する量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ は文字 $E, F, q^{\pm h}$ で生成され, 次の基本関係式によって定義される単位元 1 を持つ結合的な代数である:

$$q^h q^{-h} = q^{-h} q^h = 1, \quad EF - FE = \frac{q^h - q^{-h}}{q - q^{-1}}, \quad q^h E q^{-h} = q^2 E, \quad q^h F q^{-h} = q^{-2} F.$$

注意 1.3. 例 1.2 の基本関係式において, 形式的に $q = \exp(\hbar)$ とおいて極限 $\hbar \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 1$) を考えると, 例 1.1 の基本関係式が復元されることが分かる. 従って $U_q(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})$ の q -類似であると考えることができる.

2 結晶基底

$U_q(\mathfrak{g})$ と $U(\mathfrak{g})$ (従って \mathfrak{g}) の表現論はパラメータ $q \in \mathbb{C}^\times$ が 1 のべき根でない限りは非常に似ており, $U(\mathfrak{g})$ の表現論で知られている多くの結果はそのままの形で $U_q(\mathfrak{g})$ の場合にまで拡張されている. しかし $U(\mathfrak{g})$ は Hopf 代数として余可換であるのに対して $U_q(\mathfrak{g})$ は非余可換であることから, $U_q(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})$ よりも本質的に多くの情報を持っていると考えることができる. 実際, この非余可換性 (と準三角性) により Yang-Baxter 方程式の解 (R 行列) の系統的な構成が与えられる (これが Drinfeld と神保による量子群の導入の動機であった).

量子群の非余可換性の表現論への応用として柏原 (と Lusztig) による**結晶基底**の理論がある. これは可積分最高ウェイト $U(\mathfrak{g})$ 加群 V の q -類似を与える可積分最高ウェイト $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 V_q について, その極限 $q \rightarrow 0$ において組合せ論的に良い振る舞いをする基底 $B \subset V_{q=0}$ に関する理論である. この基底 B を結晶基底と呼ぶ (結晶基底の定義については例えば [K95] を参照せよ).

例 2.1. $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 複素行列全体の集合とし, $E_{i,j} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ を (i, j) 成分が 1 であり, その他の成分は 0 である行列単位とする. 特殊線型 Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{x \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \text{tr}(x) = 0\}$ は Lie 環として次の行列によって生成される.

$$e_i = E_{i,i+1}, \quad h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}, \quad f_i = E_{i+1,i} \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

このとき各 $1 \leq i \leq n-1$ について $\{e_i, h_i, f_i\}$ が生成する Lie 部分環は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ に同型である. これに対応して \mathfrak{g} に付随する量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の生成元として $\{E_i, F_i, q^{\pm h_i} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ を取ることができ, 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対する $\{E_i, F_i, q^{\pm h_i}\}$ が生成する部分代数は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ に同型となる. $U_q(\mathfrak{g})$ の表現の結晶基底 B は次の性質を満たす: $q \rightarrow 0$ において E_i, F_i に対応する作用素をそれぞれ \tilde{e}_i, \tilde{f}_i とする (作用素 \tilde{e}_i, \tilde{f}_i を **柏原作用素** という. 柏原作用素については例えば [K95] を参照せよ). また $b \in B$ に対して $\varepsilon_i(b) := \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_i^k b \neq 0\}$, $\varphi_i(b) := \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{f}_i^k b \neq 0\}$ と定める. このとき, $b \in B$ に対して,

- (1) $\begin{cases} \tilde{e}_i b \neq 0 \text{ ならば } \varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1, \varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1 \text{ が成り立つ,} \\ \tilde{f}_i b \neq 0 \text{ ならば } \varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1, \varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1 \text{ が成り立つ,} \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} \tilde{e}_i b \neq 0 \text{ ならば } \tilde{f}_i \tilde{e}_i b = b \text{ が成り立つ,} \\ \tilde{f}_i b \neq 0 \text{ ならば } \tilde{e}_i \tilde{f}_i b = b \text{ が成り立つ.} \end{cases}$

特に性質 (2) に着目して, $b, b' \in B$ に対して, $b' = \tilde{f}_i b$ であるとき $b \xrightarrow{i} b'$ とすることによって, B を頂点集合とする色付有向グラフ (これを **結晶グラフ** と呼ぶ) を作る. 結晶グラフによって表現の構造を組合せ論的に表示することができ, そこからもとの表現の既約性や分解法則などについての情報を部分的に読み取ることができる (詳しくは [K95] を参照せよ). 次の章では柏原-中島 ([KN94]) による半標準盤による結晶グラフの実現について述べる.

3 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ の結晶基底の実現

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の可積分最高ウェイト加群は高さが n 未満の Young 図形と 1 対 1 に対応し, その次元は対応する Young 図形 λ を型とし, 成分が $\{1, 2, \dots, n\}$ の元である半標準盤全体の集合 $\mathbb{B}(\lambda)$ の元の個数に一致することは良く知られている.¹

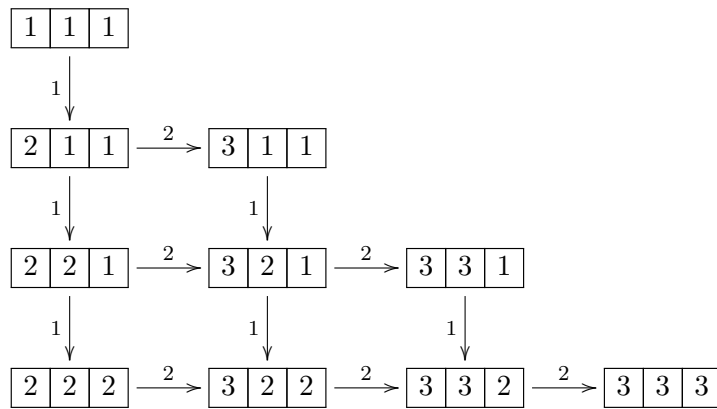
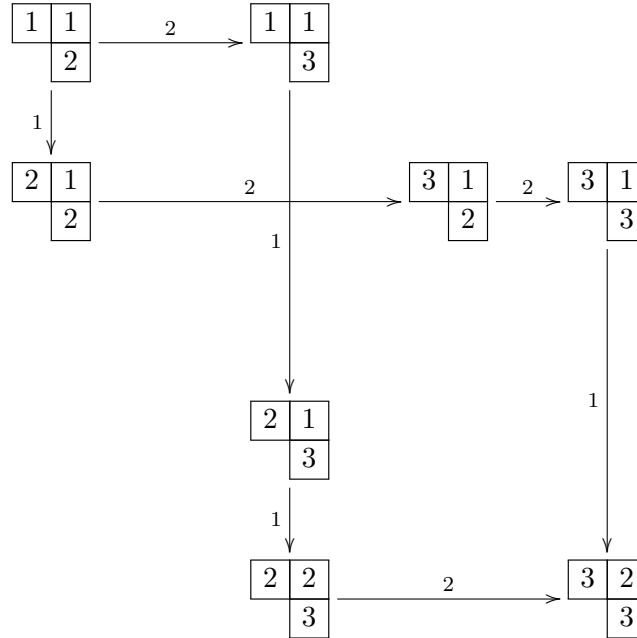
定理 3.1 ([KN94]). Young 図形 λ に対応する $U_q(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ の可積分最高ウェイト加群の結晶基底の結晶グラフは $\mathbb{B}(\lambda)$ によって実現される.

例 3.2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ とする. Young 図形 $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array}$ に対応する可積分最高ウェイト加群の結晶基底の結晶グラフは次で与えられる.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

¹本稿における半標準盤の表し方は, [F97] における表し方を左右逆にしたものである.

例 3.3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ とする. Young 図形 $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ と $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ とに対応する可積分最高ウェイト加群の結晶基底の結晶グラフはそれぞれ次で与えられる.



$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の Weyl 群 W は n 次対称群 \mathfrak{S}_n である. $w \in \mathfrak{S}_n$ を単純互換 $s_i = (i, i+1) \in \mathfrak{S}_n$, $1 \leq i \leq n-1$, の積 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_\ell}$ として表したときの長さ ℓ の最小値を $\ell(w)$ と表記し, これを w の長さという. また $\ell((i, j) \cdot w) = \ell(w) + 1$ のとき $(i, j) \cdot w \xleftarrow{(i, j)} w$ (又は単に $(i, j) \cdot w \leftarrow w$) と表記する. \mathfrak{S}_n 上の 2 項関係 \leftarrow の推移閉包として \mathfrak{S}_n 上に半順序 \geq を定める. すなわち, $w, v \in \mathfrak{S}_n$ に対して $w \geq v$ であることを, 有向列

$$w = w_1 \leftarrow w_2 \leftarrow \cdots \leftarrow w_k = v$$

が存在することとして定義する. この半順序を **Bruhat 半順序** と呼ぶ.

半標準盤の各列 $\begin{array}{|c|} \hline a_1 \\ \hline a_2 \\ \hline \vdots \\ \hline a_k \\ \hline \end{array}$ は増加数列 $\mathbf{a} = \{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n\}$ を定める. $\{b_{k+1}, \dots, b_n\} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathbf{a}$ とおく. 以下では, この (半標準盤の) 列を

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k & b_{k+1} & \dots & b_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$$

を含む剰余類 $\bar{w} = w \cdot (\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}) \in \mathfrak{S}_n / (\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$ と同一視する. すると, $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$ ($1 \leq k < n$) という形の部分群に関する様々な剰余類の列 $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_l)$ は各列が半標準盤である盤を定める. この盤が (全体として1つの) 半標準盤をなすための必要十分条件は, $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_l$ の代表元 $w_1, \dots, w_l \in \mathfrak{S}_n$ であって, Bruhat 半順序に関して $w_1 \geq \dots \geq w_l$ を満たすものが存在することである.

例 3.4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ の Weyl 群は \mathfrak{S}_3 である. 半標準盤 $\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline & 2 \\ \hline \end{array}$ は剰余類の列 $\left(\overline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \right)$ に対応するが,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xleftarrow{(1,3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xleftarrow{(2,3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

であるので, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ である.

逆に, 例えば $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{(2,3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する盤 $\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline \end{array}$ は半標準盤である.

4 量子ループ代数への拡張

Lie 環 \mathfrak{g} に対して, $\mathbf{Lg} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ は

$$[x \otimes f(t), y \otimes g(t)] := [x, y] \otimes f(t)g(t)$$

を Lie 積として Lie 環になる. Lie 環 \mathbf{Lg} を \mathfrak{g} に付随するループ代数と呼ぶ. また \mathbf{Lg} に付随する量子群 $U_q(\mathbf{Lg})$ を量子ループ代数と呼ぶ.

例 4.1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ に付随するループ代数 $\mathbf{Lg} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ は

$$\{e_r := e \otimes t^r, f_r := f \otimes t^r, h \otimes 1, h_m := h \otimes t^m \mid r \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

によって生成される. このとき量子ループ代数 $U_q(\mathbf{Lg})$ は

$$\{E_r, F_r, q^{\pm h}, H_m \mid r \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

によって生成され, 次の基本関係式を満たす単位元 1 を持つ結合的な代数である:

$$\delta(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} z^r, \quad x^+(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} E_r z^{-r}, \quad x^-(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_r x^{-r},$$

$$\psi^\pm(z) := q^{\pm h} \exp \left(\pm(q - q^{-1}) \sum_{m=1}^{\infty} H_{\pm m} z^{\mp m} \right)$$

と定めたとき、互いに可換な変数 z, w と符号 $\epsilon, \eta \in \{\pm\}$ に対して、

$$\begin{aligned} q^h q^{-h} &= q^{-h} q^h = 1, & [q^h, H_m] &= 0, & [H_m, H_{m'}] &= 0, \\ q^h E_r q^{-h} &= q^2 E_r, & q^h F_r q^{-h} &= q^{-2} F_r, \\ (z - q^{\epsilon^2} w) \psi^\eta(z) x^\epsilon(w) &= (q^{\epsilon^2} z - w) x^\epsilon(w) \psi^\eta(z), \\ (z - q^{\epsilon^4} w) x^\epsilon(z) x^\epsilon(w) &= (q^{\epsilon^4} z - w) x^\epsilon(w) x^\epsilon(z), \\ [x^+(z), x^-(w)] &= (q - q^{-1})^{-1} (\delta(w/z) \psi^+(w) - \delta(z/w) \psi^-(z)). \end{aligned}$$

量子ループ代数の設定において Weyl 群 W の役割を果たすものは**アフィン Weyl 群** W_{af} である。

例 4.2. $W = \mathfrak{S}_n$ に対応するアフィン Weyl 群は $W_{\text{af}} = \mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}^{n-1}$ である。ここで \mathfrak{S}_n の \mathbb{Z}^{n-1} への作用は、 \mathfrak{S}_n の \mathbb{Z}^n への自然な作用 (標準基底の置換) を \mathfrak{S}_n -不変な直線 $\mathbb{Z} \cdot (1, \dots, 1) \subset \mathbb{Z}^n$ で割った商 $\mathbb{Z}^{n-1} \cong \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z} \cdot (1, \dots, 1)$ として与えられる。

以下、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ に付随する量子ループ代数 $U_q(\mathbf{Lg})$ を考察する。量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の場合と同様に、高さが n 未満の Young 図形に対して**端ウェイト加群**と呼ばれる $U_q(\mathbf{Lg})$ 加群が定まる (端ウェイト加群やその結晶基底については [K02] を参照せよ)。

\mathbb{Z}^n の標準基底を $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, 標準内積を $\langle -, - \rangle$ と表記する。各 $\alpha_{i,j} := \vec{e}_i - \vec{e}_j$ は直線 $\mathbb{Z} \cdot (1, \dots, 1)$ と直交するので、 $\alpha_{i,j}$ と $\mathbb{Z}^{n-1} \cong \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z} \cdot (1, \dots, 1)$ の元との内積を考えることができる。そこで、 $\xi \in \mathbb{Z}^{n-1}$ に対して、

$$\text{ht}(\xi) := \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle \alpha_{i,j}, \xi \rangle \in \mathbb{Z}$$

と定める。また、 $x = (w, \xi) \in W_{\text{af}} = \mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}^{n-1}$ に対して、

$$\ell^{\frac{\infty}{2}}(x) := \ell(w) + 2 \times \text{ht}(\xi)$$

と定め、これを x の**半無限長さ**と呼ぶ ($\ell(w)$ は前章で導入した $w \in \mathfrak{S}_n$ の長さである)。

ある $s = ((i, j), k\alpha_{i,j}) \in \mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}^{n-1}$ ($1 \leq i < j \leq n, k \in \mathbb{Z}$) に対して、 $\ell^{\frac{\infty}{2}}(s \cdot x) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(x) + 1$ となるとき、

$$s \cdot x \stackrel{(i,j)}{\longleftarrow \frac{\infty}{2}} x$$

と表記する。 W_{af} 上の 2 項関係 $\stackrel{(i,j)}{\longleftarrow \frac{\infty}{2}}$ の推移閉包として W_{af} 上に半順序 $\geq_{\frac{\infty}{2}}$ を定める。これを**半無限 Bruhat 半順序**と呼ぶ。

高さが n 未満の Young 図形 λ を次のように \mathbb{Z}^{n-1} の元と同一視する: λ の共役が

$${}^t \lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots (n-1)^{m_{n-1}})$$

であるとき,

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \cdot \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_{i \text{ 個}} \in \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z} \cdot (1, \dots, 1) \cong \mathbb{Z}^{n-1}.$$

以下, Young 図形 λ を 1 つ固定する. 有理数 $0 < a \leq 1$ に対して, $x \in W_{\text{af}}$ から $y \in W_{\text{af}}$ への a -列とは, 有向列

$$y = y_0 \xleftarrow{\frac{(i_1, j_1)}{\frac{\infty}{2}}} y_1 \xleftarrow{\frac{(i_2, j_2)}{\frac{\infty}{2}}} \cdots \xleftarrow{\frac{(i_k, j_k)}{\frac{\infty}{2}}} y_k = x$$

であって, 各 $1 \leq l \leq k$ について $a \times \langle \alpha_{i_l, j_l}, y_l \cdot \lambda \rangle$ が整数となるものである.

定義 4.3 ([INS16]). $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\{\langle \alpha_{i,j}, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ の最小公倍数とする. W_{af} の元の減少列 $(x_1 \geq \frac{\infty}{2} x_2 \geq \frac{\infty}{2} \cdots \geq \frac{\infty}{2} x_N)$ が次の条件を満たすとき, この列を型 λ の**半無限 LS パス**と呼ぶ: 各 $1 \leq k \leq N-1$ について, x_{k+1} から x_k への (k/N) -列が存在する.

$\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ を型 λ の半無限 LS パス全体の集合とする.

定理 4.4 ([INS16]). Young 図形 λ に対応する $U_q(\mathbf{Lsl}_n(\mathbb{C}))$ の端ウェイト加群の結晶基底の結晶グラフは $\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ によって実現される.

注意 4.5. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 以外のより一般の複素半単純 Lie 環に付随する (振れない) 量子ループ代数の端ウェイト加群の結晶基底に対する半無限 LS パスによる実現については [INS16] を参照せよ.

謝辞. 室蘭工業大学・数理科学談話会での講演の機会を与えて下さった森田英章氏と談話会に参加して頂いた方々にこの場をお借りして御礼申し上げます.

参考文献

- [F97] W. Fulton, Young tableaux, London Mathematical Society Student Texts. 35. Cambridge: Cambridge University Press. ix, 260 p. (1997).
- [INS16] M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai–Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, *Adv. Math.* 290 (2016), 967-1009.
- [K95] M. Kashiwara, On crystal bases. Representations of groups (Banff, AB, 1994), 155-197, CMS Conf. Proc., 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [K02] M. Kashiwara, On level zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* 112 (2002), 117-175.
- [KN94] M. Kashiwara and T. Nakashima, Crystal graphs for representations of the q -analogue of classical Lie algebras, *J. Algebra* 165 (1994), 295-345.