# 弱い消散項を持つ非線形梁方程式の解の大域挙動

竹田 寛志　（福岡工業大学工学部）

## 1 導入

本講演では, 次の弱い消散項を持つ非線形梁方程式の初期値問題について考える：

$$\partial_t^2 u + \partial_t u + \partial_x^4 u - \partial_x^2 u = \partial_x f(\partial_x u), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

ここで, 非線形項 $f = f(v)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は十分滑らかで,

$$f(v) = O(|v|^p), \quad (p \geq 2) \tag{1.3}$$

を満たすものとする.

弱い消散項を持つ非線形梁方程式 (1.1) は, 非線形項の符号を限定しエネルギー法を用いた, 大きい初期値に対する

• Racke-Shang [14] による有界領域での初期値-境界値問題

• Takeda-Yoshikawa [18] の初期値問題 (1.1)-(1.2)

の時間大域適切性や解の評価が知られている. これに対して, 非線形項に対して滑らかさと増大度 (1.3) を課して, 小さい初期値に対する解の性質を考察することがここでの目的である.

初期値問題 (1.1)-(1.2) は, 弱い消散項 $\partial_t u$ に起因に起因する解の消散効果と四階微分項 $\partial_x^4 u$ から導かれる分散型方程式の性質を併せ持つ. その両方の性質を用いて Takeda-Yoshikawa [16], [17] は, 解の平滑化効果及び漸近形を明らかにした.

**定理 1.1** (平滑化効果)**.** 非線形項が仮定 (1.3) を満たし, 初期値が $(u_0, u_1) \in W^{2,1} \cap H^2 \times L^2 \cap L^1$ でそのノルムが十分小さいとき,

$$u(t) \in C([0,\infty); L^1 \cap H^2) \tag{1.4}$$

となる初期値問題 (1.1)-(1.2) の時間大域解 $u$ が一意的に存在して

$$\|u(t)\|_{L^1} \le C, \quad \|\partial_x^2 u(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{5}{4}} \tag{1.5}$$

を満たす. さらに,

$$u(t) \in C((0,\infty);W^{2,\infty}) \tag{1.6}$$

であって, $1 \le q \le \infty$ に対して

$$\|u(t)\|_{L^q} \le C(1+t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})}, \tag{1.7}$$

また, $2 \le q \le \infty$ に対して

$$\|\partial_x^2 u(t)\|_{L^q} \le Ct^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})-1}, \tag{1.8}$$

が成り立つ.

**注意 1.1.** 解を構成する空間 (1.4) 及び (1.5) によって, $u(t) \in C([0,\infty);L^1 \cap L^\infty)$ と (1.7) は ($L^1$ と $H^2$ の ) 補間により直ちに得られる. 一方で, (1.6) や (1.8) は (1.4) における単純な補間では導くことができず, 方程式の線形主要部から導かれる解の平滑化効果の帰結と考えられる.

時間大域解の挙動は

$$G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \qquad m_k := \int_{\mathbb{R}}(-x)^k(u_0(x)+u_1(x))\,dx, \quad N := \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} f(\partial_x u(t,x))\,dx\,dt,$$
$$L^1_1(\mathbb{R}) := \{u \in L^1(\mathbb{R}) | \int_{\mathbb{R}}(1+|x|)|u(x)|\,dx < \infty\}$$

を用いて以下のように定式化される.

**定理 1.2.** 定理 1.1 で構成した時間大域解 $u$ は, $1 \le q \le \infty$ に対して

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})}\|u(t)-m_0G_t\|_{L^q} \to 0 \; as \; t \to 0, \tag{1.9}$$

また, $2 \le q \le \infty$ に対して

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})+1}\|\partial_x^2(u(t)-m_0G_t)\|_{L^q} \to 0 \; as \; t \to 0 \tag{1.10}$$

を満たす. さらに定理 1.1 の仮定に加えて, $(u_0,u_1) \in (L^1_1)^2$ であれば, $1 \le q \le \infty$ に対して

$$\|u(t)-m_0G_t\|_{L^q} \le t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}, \tag{1.11}$$

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})+\frac{1}{2}}\|u(t)-m_0G_t-(m_1+N)\partial_xG_t\|_{L^q} \to 0 \; as \; t \to 0, \tag{1.12}$$

$2 \le q \le \infty$ に対して同様に

$$\|\partial_x^2(u(t) - m_0 G_t)\|_{L^q} \le t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})-\frac{3}{2}}, \tag{1.13}$$

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})+\frac{3}{2}}\|\partial_x^2(u(t) - m_0 G_t - (m_1+N)\partial_x G_t)\|_{L^q} \to 0 \ as \ t \to 0 \tag{1.14}$$

が成り立つ.

**注意 1.2.** 定理 1.2 における一連の評価は解が時間大域的に熱核で近似できることを意味しており, 解の拡散現象と言われる. 一方で, (1.9) と (1.10) はそれぞれ (1.7), (1.8) に対する解の下からの評価を示唆しており, 定理 1.1 における時間減衰評価の最適性を示す. 同様に, (1.11) と (1.13) に対する最適性は, それぞれ (1.12) と (1.14) から従う.

また, 解の拡散現象に関して, 消散型波動方程式, 強消散型波動方程式などの各種消散項を持つ方程式に対して多くの先行研究がある *([1]-[9], [11]-[13], [19] 参照).*

## 2 問題意識と主定理

定理 1.1 と定理 1.2 では, 解の平滑化効果と漸近形が得られたものの, 解に対して初期値と同じ正則性が保証されていない. そこで, 定理 1.2 のように, 時間が大きいときに解の熱核による近似が成り立ち, なおかつ解が初期値と同じ関数空間に時間連続的に入り続けること (統徹性) を保証できる枠組みを考えたい. すなわち, 我々の目的は最適な時間減衰評価と, 時間大域適切性を同じ枠組みで示すことである.

**注意 2.1.** 時間大域解の一意存在, 初期値連続依存性, 統徹性は併せて, *(Hadamard* の意味での*)* 時間大域適切性と言われる.

以下,

- 重み付き Sobolev 空間

$$H^{s,\ell} := \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) | (1+|x|^2)^{\frac{\ell}{2}}\partial_x^k u \in L^2(\mathbb{R}),\ 0 \le k \le s\}$$

なる記法を用いる.

時間大域適切性と熱核による解の 1 次展開 (1.9) は $H^{2,0} \cap H^{1,1}$ で保障される.

**定理 2.1.** 非線形項が仮定 (1.3) を満たし, 初期値が $(u_0, u_1) \in H^{2,0} \cap H^{1,1} \times H^{0,1}$ でそのノルムが十分小さいとき,

$$u(t) \in C([0,\infty); H^{2,0} \cap H^{1,1})$$

となる初期値問題 (1.1) の 時間大域解 $u$ が一意的に存在して, $k = 0,1,2$ に対して,

$$\|\partial_x^k u(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}, \quad t^{\frac{1}{4}+\frac{k}{2}}\|\partial_x^k(u(t) - m_0 G_t)\|_{L^2} \to 0 \ as \ t \to 0 \tag{2.1}$$

及び $k=0,1$ に対して

$$\|x\partial_x^k u(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}, \quad t^{-\frac{1}{4}+\frac{k}{2}}\|x(u(t)-m_0G_t)\|_{L^2} \to 0 \ as\ t\to\infty \tag{2.2}$$

が成り立つ.

**系 2.1.** 定理 2.1 で構成した時間大域解 $u$ は, (1.9) を満たす.

時間大域適切性と熱核による解の 2 次展開 (1.12) は $H^{2,0}\cap H^{0,2}$ で保障される.

**定理 2.2.** 非線形項が仮定 (1.3) を満たし, 初期値が $(u_0,u_1)\in H^{2,0}\cap H^{0,2}\times H^{0,2}$ でそのノルムが十分小さいとき,

$$u(t)\in C([0,\infty);H^{2,0}\cap H^{0,2})$$

となる初期値問題 (1.1) の 時間大域解 $u$ が一意的に存在して, $k=0,1,2$ に対して, (2.1) 及び

$$\|x^k u(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{1}{4}+\frac{k}{2}}, \quad t^{\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}\|x^k(x(u(t)-m_0G_t)\|_{L^2} \to 0 \ as\ t\to\infty \tag{2.3}$$

が成り立つ.

**系 2.2.** 定理 2.2 で構成した時間大域解 $u$ は, (1.8) を満たす.

**注意 2.2.** $H^{0,1}(\mathbb{R})\subset L^1(\mathbb{R})$ 及び, $H^{0,2}(\mathbb{R})\subset L^1_1(\mathbb{R})$, *Sobolev* の埋め込み $H^{1,0}(\mathbb{R})\subset L^\infty(\mathbb{R})$ によって, 定理 2.1 から 系 2.1, 定理 2.2 から 系 2.2 が得られる.

**注意 2.3.** 定理 2.1 は, 熱核による解の漸近展開を行う際に, 非線形項の寄与が 1 次展開には現れないことを示す. 一方で, 定理 2.2 において, 熱核による展開を 2 次まで行うことによって熱核の係数に非線形項の影響が生じることが分かる.

次に, 非線形項を

$$f(v) = -|v|^{p-1}v \qquad (p\ge 2) \tag{2.4}$$

と限定し, 方程式から従うエネルギー

$$E[u](t) := \frac{1}{2}\left\{\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_x^2 u(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u(t)\|_{L^2}^2\right\} - \frac{1}{p+1}\|\partial_x u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

に着目する. このとき, 初期エネルギー $E[u](0)$ における非線形項の寄与 $\dfrac{1}{p+1}\|\partial_x u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}$ が大きければ初期値問題 (1.1) においても解の有限時間爆発が従う ([10], [5]).

**定理 2.3.** 非線形項が仮定 (2.4) を満たし, 初期値が $(u_0, u_1) \in H^{2,0} \times L^2$ で $E[u](0) < 0$ のとき, 初期値問題 (1.1) の解 $u$ は, ある有限時刻 $T_* < \infty$ が存在して,

$$\limsup_{t \uparrow T_*} \|u(t)\|_{H^{2,0}}^2 = \infty$$

が成り立つ.

**注意 2.4.** 定理 2.3 は, 定理 2.1 と定理 2.2 において初期値の大きさに制限が入ることは本質的であることが示唆している.

# 3　定理 2.1 と定理 2.2 の証明の概略

**Step 1.** 定理ごとに初期値に設定された関数空間での線形評価の構成 (cf. Takeda-Yoshikawa [16, 17], Zhang-Li [20]).
**Step 2.** 線形評価に基づいた解空間の設定と, 縮小写像の原理による時間大域解の構成.
**Step 3.** 解を構成する位相において, 非線形項の減衰が線形解の減衰よりも $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ 速いことを示す (定理 2.1 の証明終).
**Step 4.** 非線形項を $N\partial_x G_t$ で近似する (定理 2.2 の証明終).

**謝辞.**　この度, 第 4 回室蘭連続講演会にお招き戴くとともに談話会における講演の機会も与えてくださった黒木場正城先生, 加藤正和先生, 高橋雅朋先生にこの場をかりて厚く御礼申し上げたい.

# 参考文献

[1] N. Hayashi, E.I. Kaikina and P.I. Naumkin, *Damped wave equation with super critical nonlinearities*, Differential Integral Equations **17** (2004), 637-652.

[2] N. Hayashi, E.I. Kaikina and P.I. Naumkin, *On the critical nonlinear damped wave equation with large initial data*, J. Math. Anal. Appl. **334** (2007), 1400-1425.

[3] T. Hosono, T. Ogawa, *Large time behavior and $L^p$-$L^q$ estimate of 2-dimensional nonlinear damped wave equations*, J. Differential Equations, **203** (2004), 82-118.

[4] R. Ikehata, *Asymptotic profiles for wave equations with strong damping*, J. Differential Equations **257** (2014), 2159-2177.

[5] R. Ikehata, M. Ohta, *Critical exponents for semilinear dissipative wave equations in* $\mathbf{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. **269** (2002), 87-97.

[6] R. Ikehata, G. Todorova and B. Yordanov, *Wave equations with strong damping in Hilbert spaces*, J. Differential Equations **254** (2013), 3352-3368.

[7] G. Karch, *Selfsimilar profiles in large time asymptotics of solutions to damped wave equations,* Studia Math. **143** (2000), 175-197.

[8] M. Kato, Y-Z. Wang and S. Kawashima, *Asymptotic behavior of solutions to the generalized cubic double dispersion equation in one space dimension*, Kinet. Relat. Models **6** (2013), 969-987.

[9] T. Kawakami, Y. Ueda, *Asymptotic profiles to the solutions for a nonlinear damped wave equations,* Differential Integral Equations, **26** (2013), 781-814.

[10] H.A. Levine, *Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form* $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 1-21.

[11] P. Marcati, K. Nishihara, *The* $L^p$-$L^q$ *estimates of solutions to one-dimensional damped wave equations and their application to compressible flow through porous media*, J. Differential Equations, **191** (2003), 445-469.

[12] T. Narazaki, $L^p$-$L^q$ *estimates for damped wave equations and their applications to semilinear problem*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 585-626.

[13] K. Nishihara, $L^p$-$L^q$ *estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application*, Math. Z. **244** (2003), 631-649.

[14] R. Racke, C. Shang, *Global attractors for nonlinear beam equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **142** (2012), 1087-1107.

[15] H. Takeda, *Unconditional global well-posedness for nonlinear damped beam equations with small data,* preprint.

[16] H. Takeda, S. Yoshikawa, *On the initial value problem of the semilinear beam equation with weak damping II: Asymptotic profiles,* J. Differential Equations **253** (2012), 3061-3080.

[17] H. Takeda, S. Yoshikawa, *On the initial value problem of the semilinear beam equation with weak damping I: Smoothing effect,* J. Math. Anal. Appl. **401** (2013), 244-258.

[18] H. Takeda, S. Yoshikawa, *On the decay property of solutions to the Cauchy problem of the semilinear beam equation with weak damping for large initial data*, Adv. Stud. Pure Math., **64** (2015), 507-514.

[19] Y. Ueda, S. Kawashima, *Large time behavior of solutions to a semilinear hyperbolic system with relaxation*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **4** (2007), 147-179.

[20] Y. Zhang, Y. Li, Yanling, *Asymptotic profile of solutions to the semilinear beam equation*, Bound. Value Probl. 2014, 2014:84, 15 pp.