ヤング図形のフックの超対称性について

安東雅訓 (稚内北星学園大学)

1 はじめに

大きさ n の分割のヤング図形において, 同じ長さのフック全体が腕長と脚長についての対称性を持つことは, ヤング図形の共役を考えれば明らかだが, 実際にはさらに強い「超対称性」呼ばれる性質が成り立つ. この超対称性ともとの分割との関係による恒等式を紹介する.

2 ヤング図形

定義 2.1. 自然数の減少列 $\lambda = (\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_\ell)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_\ell \geq 1$ を分割と呼ぶ. λ の成分の個数 ℓ を λ の長さと呼び $\ell(\lambda)$ で表す. $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$ を λ の大きさと呼び $|\lambda|$ で表す. $|\lambda| = n$ であるとき λ は n の分割であるという. 分割全体の集合を $\mathcal{P}$, n の分割全体の集合を $\mathcal{P}(n)$ で表す.

定義 2.2. 分割 $\lambda = (\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_l)$ に対してヤング図形 $Y(\lambda)$ を次で定義する.

$$Y(\lambda) := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

定義 2.3. $\lambda = (\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_l)$, $(i,j) \in Y(\lambda)$ について、(i,j)-フック $H_{ij}(\lambda)$ を次で定義する.

$$H_{ij}(\lambda) := \{(i',j') \in Y(\lambda) \mid i' = i, j' \geq j \ \ \text{または}\ \ j' = j, i' \geq i\ \}$$

$h_{ij}(\lambda) := \sharp H_{ij}(\lambda)$ を λ の (i,j)-フック長という.

3 フック長の積

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の巡回型が ρ の元の中心化群の大きさを z_ρ と表す. ρ は n の分割であり, 今 $\rho = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots n^{m_n}) \in \mathcal{P}(n)$ とすると,

$$z_\rho = 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n} \times m_1! m_2! \cdots m_n!$$

と書ける. この前半部分を a_ρ, 後半を b_ρ と置いたとき, これらをそれぞれ共役類の代表元で積をとったものは等しくなることが対称群の古典的な結果として知られている.

定理 3.1. 任意の自然数 n に対し, 次が成り立つ.

$$\prod_{\lambda\in\mathcal{P}(n)} a_\lambda := \prod_{\lambda\in\mathcal{P}(n)}\prod_{k=1}^{n} k^{m_k(\lambda)} = \prod_{\lambda\in\mathcal{P}(n)}\prod_{k=1}^{n} m_k(\lambda)! =: \prod_{\lambda\in\mathcal{P}(n)} b_\lambda$$

左辺 a_λ は分割の表示そのものであり, 本当はしてはならない「積だと勘違い」をしてしまったという式だ. 一方右辺の $b_\lambda = \prod_k m_k(\lambda)!$ は λ のヤング図形のフック長として次のように現れる.

例. $\lambda = (12^2 5^3)$ に対し, そのヤング図形の右端のマス目だけにフック長を入れたもの.

				3
				2
				1
	2			
	1			
1				

成分 k と対応する行に $m_k(\lambda)!$ に対応する数字が表れることが分かる.

例. $\mathcal{P}(4) = \{(4), (31), (22), (211), (1111)\}$ であり, 分割のヤング図形に同じように右端にフック長を入れると,

			1

		1
1		

	2
	1

	1
2	
1	

4
3
2
1

各数字を見たとき, ヤング図形上での個数と分割の成分としての個数が一致している. [*1]

b_λ をこのように思えば, 一般化として右端だけではなく全体のフックでの積を考えることは自然だろう. この場合, 式としては次の形になる.

定理 3.2.

$$\prod_{\lambda\in\mathcal{P}(n)}\prod_{k=1}^{n} k^{k m_k(\lambda)} = \prod_{\lambda\in\mathcal{P}(n)}\prod_{(i,j)\in Y(\lambda)} h_{i,j}(\lambda)$$

左辺に変化がない様に見えるが, よく見ると k の指数が k 倍されている. 従って, 先ほどと同じく $n=4$ での式の右辺を図で見てみれば,

4	3	2	1

4	2	1
1		

3	2
2	1

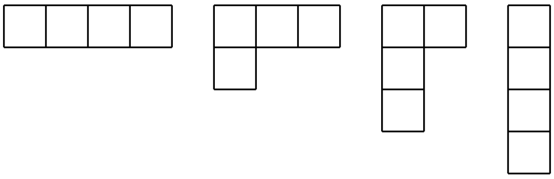
4	1
2	
1	

4
3
2
1

[*1] 定理が言っているのは積の一致なので, このことは若干強い結果.

各数の個数を数えると, 先の例と比べ右端から全体に積を広げることで, 長さ k のフックの個数が k 倍されていることがわかる.

このことの種明かし（証明ではない）を行う. 長さ k のフックは k 種類ある. 例えば $k=4$ だと次の 4 種となる.



改めてフックの形まで注目して図を見てもらえば, k を止めるごとにこの k 種の形が均等に（同数ずつ）現れていることがわかる. 縦一本の形は右端のみに現れるため, このことが「k 倍」の種明かしとなる. この均等に現れるという性質をフックの超対称性と呼ぶ.

定理の証明は例えば自身の学位論文 [1] に記載しているが, 残念ながらこの超対称性まで含んだ内容ではない. 超対称性については母関数を用いた簡潔な証明が [2] にあり, 「超対称性」という言葉自体この論文からとっている. 組合せ論モデルの間の写像によるこの超対称性の証明を行うことは現在の自身の研究課題の一つである.

4　終わりに

二度目の室蘭でしたが, 札幌までは積もっていたはずの雪が室蘭では消えていて, つい大学まで歩いてしまい後悔しました. 談話会での話と別に山田先生, 水川先生に二人の定理に関する話を聞いていただくことができ, よかったです. 翼の王国ではないですが, 「二度目の〜」には新しい発見がありますね. ジンギスカンがおいしく, スピッツのルナルナの歌詞が違う意味に聴こえるようになりました.

参考文献

[1] 安東雅訓, “整数の分割の母関数と組合せ論”, 岡山大学学術成果リポジトリ, 42 pp. (2014)

[2] C.Bessenrodt, G.-N.Han, “Symmetry distribution between hook length and part length for partitions”, *Discrete Mathematics*, **309**, 6070-6073, (2009).