群作用と Ehrenfest の壺モデル

水川裕司（防衛大学校　総合教育学群）

1　Ehrenfest の壺に対する Diaconis のアプローチ

二つの壺 U_0, U_1 を用意する．壺 U_0 に 1 から n までの番号の書かれたボールが入っており，もう一方は空である状態を初期状態とする．等確率に選んだボールを取り出し，再び等確率でどちらかの壺に戻す，という操作を繰り返したときの拡散の様子はどうのようになるか，という問題を考える．これは気体の拡散モデルを離散化した古典的な物理モデルで，Ehrenfest の壺モデルと呼ばれている [3]．Ehrenfest の壺モデルを定式化すると，次のようになる：

ボール i $(i = 1, \ldots, n)$ が壺 U_k $(k = 0, 1)$ に入っているとき $b_i = k$ と書くことにすると，状態の全体は集合

$$X(n) = \{(b_1, \ldots, b_n) \mid b_i = 0, 1\}$$

と同一視出来る．初期状態は全てのボールが U_0 に入っていたので $(0, \ldots, 0) \in X(n)$ が対応する．いま，$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ に対して x から y への推移確率を

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & d(x, y) = 0, 1 \\ 0 & d(x, y) \geq 2 \end{cases}$$

としたものが上の問題の定式化である．ここで，$d(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i,\ 1 \leq i \leq n\}|$ である（この距離をハミング距離という）.

Diaconis[2] は $X(n)$ をある有限群の等質空間として捉えることで，表現論の技術を用い，全変動距離というノルムを評価することで，この拡散の様子が驚くべき振る舞いを見せることを発見した．それはある時刻までは，余り混ざらないが，そこを堺に急激に混ざりその後は安定する，という cut-off 現象が起きるというものであった．ちなみに，“混ざっている ” というのは “どの状態も等しく起こりうる状態にある ” ことであると考える，つまりその確率分布がどのくらい “混ざっているか” を調べるとは一様分布との何らかの差を測ってやることである．

Diaconis が用いた有限群は超八面体群

$$\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; \sigma) \mid \varepsilon_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \sigma \in S_n\}$$

とその部分群対称群 S_n である．すると明らかに $X(n) \sim H_n/S_n$ なので，この同一視のもと，$X(n)$ は H_n が

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; \sigma)(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n) = (\varepsilon_1\varepsilon'_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \varepsilon_n\varepsilon'_{\sigma^{-1}(n)})$$

によって推移的に作用している．また，この作用によって

$$p(gx, gy) = p(x, y) \ (\forall x, y \in X(n), g \in H_n)$$

であることがすぐに分かるであろう．従い，これで $X(n)$ 上に H_n-不変な確率過程を導入することが出来たわけである．我々が知りたいのはボールの出し入れを繰り返したときの振る舞いである．いま，$p_N(x, y)$ で状態 $x \in X(n)$ から N 回出し入れを繰り返したとき $y \in X(n)$ に移る確率を表すことにすると，

$$p_N(x, y) = \sum_{x_1, \ldots x_{N-1} \in X(n)} p(x, x_1)p(x_1, x_2) \cdots p(x_{N-1}, y)$$

である．H_n の $X(n)$ への作用は推移的であったので，$x_0 = (0, \ldots, 0)$ とおくと，任意の $x \in X(n)$ に対し，

$$x = g_x x_0$$

をみたすような $g_x \in G$ がとれる．いま H_n 上の関数

$$\nu(g) = \frac{1}{|S_n|} p(x_0, gx_0)$$

を考えると，これは両側 S_n 不変な関数である．いま，$p(x, y) = p(g_x x_0, g_y x_0) = p(x_0, g_x^{-1} g_y x_0) = |S_n|\nu(g_x^{-1} g_y)$ に注意し，$x = x_0$ のとき上の式は

$$\begin{aligned}
p_N(x, y) &= \sum_{x_1, \ldots, x_{N-1} \in X(n)} p(x, x_1)p(x_1, x_2) \cdots p(x_{N-1}, y) \\
&= \sum_{g_1 S_n, \ldots, g_{N-1} S_n \in H_n/S_n} p(x_0, g_1 x_0)p(x_0, g_1^{-1} g_2 x_0) \cdots p(x_0, g_{N-1}^{-1} g_y x_0) \\
&= |S_n| \sum_{g_1, \ldots, g_{N-1} \in H_n} \nu(g_1)\nu(g_1^{-1} g_2) \cdots \nu(g_{N-1} g_y) \\
&= |S_n| \nu^{*N}(g_y)
\end{aligned}$$

と表される．ここで，$*N$ は畳み込み積による N 乗を表している．つまり，G 上の両側 S_n 不変な関数 ν を調べてやることが，拡散の様子を調べることと考える事が出来る．

そこで両側 S_n 不変な関数全体のなす環 $\mathcal{H}(H_n, S_n)$（ヘッケ環という）を考えたいが，実は「$\mathcal{H}(H_n, S_n)$ は（畳み込み積に関して）可換代数である」という事実が知られている．この条件を満たす群とその部分群のペアをゲルファントペア [8] という．ゲルファントペア

であると表現論が上手く機能し，ν^{*N} の計算が大変きれいに出来る，というのが Diaconis の方法である．

それの概略を述べる（詳しくは [1]）：ゲルファンペアである時ヘッケ環の基底として帯球関数という基底が取れる．帯球関数 ω, ω' は

$$\omega * \omega' = d_\omega \omega \delta_{\omega,\omega'}$$

ここで d_ω は定数，というほぼ冪等元である．これらで ν を

$$\nu = \sum f_\omega \omega$$

と展開すると

$$\nu^{*N} = \sum d_\omega^{N-1} f_\omega^N \omega$$

と出来るため，本質的に展開係数だけわかればよいということになる．これが単純にして重要な原理である．

さて，この原理は一般のゲルファントペアに対してそのまま適用できるため，ゲルファントペアを得るごとに様々な確率過程の例を与えることが出来る，ということだ．次節でははそういった例の中で Ehrenfest の壺モデルの一般化を群論の枠組みでどのように捉えればよいかを考えよう．

2 Ehrenfest の壺の群論的一般化

一般化と言うと「壺の数を増やす」というのが素直で，なお意味があるものだと思う．これを定式化してみよう．

次のような集合を考える．

$$X(r,n) = \{(b_1, \ldots, b_n) \mid b_i = 0, 1, \ldots, r-1\}$$

$X(r,n)$ の元 $(b_1, \ldots, b_n)$ は複数の壺にボールが入っている状態と解釈できる．それはオリジナルの場合と同様に b_i をボール i が壺 b_i に入っていると考えれば良いからである．いま，$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X(r,n)$ に対して x から y への推移確率を

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & d(x,y) = 1 \\ \frac{1}{(r-1)(n+1)} & d(x,y) = 1 \\ 0 & d(x,y) \geq 2 \end{cases}$$

設定してやるとこれは「ボールが複数の壺の間を（自由に）行き交う」モデルを表している．実際にこのモデルは洞 [6, 7] によって Diaconis 流の解析がなされた．この際に用い

られるゲルファントペアは $(S_r \wr S_n, S_{r-1} \wr S_n)$ であり $r=2$ のときが Diaconis のケースである．

ではボールが移動する際，壺の行き先に制限があるようなモデルはどのように考えればよいのだろうか？

部分的ではあるが，それに対する群論的な答えを紹介しよう．ゲルファントペア (K,L) があったとき，$x_0 \in K-L$ を固定して，$m=|Lx_0L/L|, r=|K/L|$ と置く．このとき $(K/L)^n=\{(g_1,\ldots,g_n)\mid g_i\in K/L\}$ 上に

$$p(\overline{x},\overline{y})=\begin{cases}1-mp & x^{-1}y\in L^n\\ p/n & x^{-1}y\in L^k\times Lx_0L\times L^{n-k-1}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

としてやると，これが (K,L) によって生じる壺の間の相互作用をもつ壺のモデルを表していると考えられる．但し $0<mp<1$ としている．この場合もある程度は Diaconis 流の解析がうまくいき，cut-off などの性質を持つことが示される．というのが本記事の主張である．この際に考えるゲルファントペアは $(K\wr S_n, L\wr S_n)$[9] であり，これの帯球関数は良い性質を持つ [4, 5, 10] ので計算もスムーズに行く．細かい計算は [11] に譲る．

3 ⋯

以上のようにして群論的な相互作用を考慮した壺のモデルを作ることが出来た．これらの帯球関数はよく調べられており，例えば評価式を調べていくのはある程度ルーチン化している（のでもう述べない）．ただ，私の興味はゲルファントペア $(K\wr S_n, L\wr S_n)$ にあった．とくに (K,L) の個性がどのように寄与する例があるのかを長年考えていたが，この記事で述べた例を作ることが出来てそれなりの満足をしている．

最後に１０年以上訪れることのなかった室蘭で講演の機会を与えてくださった森田英章先生には大変感謝をしています．また初日に連れて行って頂いたジンギスカンは私が今まで食べた中で一番でした．

References

[1] T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti and F. Tolli, *Harmonic Analysis on Finite Groups*, Cambridge studies in advanced mathematics 108, Cambridge Press, 2008.

[2] P. Diaconis and M. Shahshahani, Generating a random permutation with random transpositions, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 57 (1981), no. 2, 159-179.

[3] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications Vol. I*, Third edition John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1968.

[4] F. Grünbaum and M. Rahman, On a family of 2-variable orthogonal Krawtchouk polynomials, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 6 (2010), Paper 090, 12 pp.

[5] F. Grünbaum and M. Rahman, A system of multivariable Krawtchouk polynomials and a probabilistic application, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 7 (2011), Paper 119, 17 pp.

[6] A. Hora, The cut-off phenomenon for random walks on Hamming graphs with variable growth conditions, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 33 (1997), no. 4, 695-710.

[7] A. Hora, An axiomatic approach to the cut-off phenomenon for random walks on large distance-regular graphs, Hiroshima Math. J. 30 (2000), no. 2, 271-299.

[8] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Second edition. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[9] H. Mizukawa and T. Tanaka, $(n+1, m+1)$-hypergeometric functions associated to character algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 2613-2618.

[10] H. Mizukawa, Orthogonality relations for multivariate Krawtchouk polynomials, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 7 (2011), Paper 017, 5 pp.

[11] H. Mizukawa, Interactions between Ehrenfest's urns arising from group actions, arXiv:1509.07248.