

非退化特異点を持つ波面の主曲率について

寺本 圭佑 *

1 はじめに

波面と呼ばれる特異点を持つ曲面のクラスがある. 近年, 波面のガウス曲率や平均曲率の特異点の近くにおける挙動やガウス・ボンネ型定理についての研究が, [5, 13, 17, 19] などで行われている. また, 波面によく現れる特異点の判定法も得られており, それらを応用することで様々な結果が得られている ([2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 15, 16, 18, 20]).

本稿では, 波面の中でも比較的扱いやすい (許容的な) 非退化特異点を持つ波面について, その主曲率関数と種々の不変量の関係について得られた結果を紹介する ([21]).

2 波面

以下の議論で必要になるものを定義していく. 詳細については [1, 4, 8, 18, 19, 22] などを参照していただきたい.

$f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を C^∞ 写像とする. ここで, $V \subset \mathbf{R}^2$ を領域, (u, v) をその座標とする. 写像 f がフロントルであるとは, f に沿う単位ベクトル場 $\nu : V \rightarrow S^2$ が存在し, $\langle df(X_p), \nu(p) \rangle = 0$ ($\forall p \in V, \forall X_p \in T_p V$) を満たすときをいう. ここで, S^2 は \mathbf{R}^3 内の単位球面を表す. また, ν を単位法ベクトルという. さらに, フロントル f が波面であるとは, 写像の組 $L_f = (f, \nu) : V \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2$ がはめ込みになるときをいう.

f をフロントルとする. 点 $p \in V$ が f の特異点であるとは, $\text{rank } df_p < 2$ となる点のことをいい, f の特異点集合を $S(f)$ と表す. 次の関数を定義する.

$$\lambda : V \rightarrow \mathbf{R}, \quad \lambda = \det(f_u, f_v, \nu) \quad (f_u = \partial f / \partial u, f_v = \partial f / \partial v).$$

この関数 λ を符号付面積密度関数と呼ぶ. このとき, $S(f) = \lambda^{-1}(0)$ が成立する.

* teramoto@math.kobe-u.ac.jp

$d\lambda(p) \neq 0$ を満たす $p \in S(f)$ を非退化特異点という. 非退化特異点 p に対し, p を通る正則曲線 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ で, $S(f)$ を局所的にパラメータ付けるものが存在する. この曲線 γ を特異曲線と呼ぶ. さらに, 非退化特異点は余階数 1 の特異点なので, γ に沿って $df(\eta) = 0$ を満たすベクトル場が存在する. このベクトル場 η を退化ベクトル場という. 非退化特異点は次の 2 種類に分類することができる.

- 非退化特異点 p が第一種であるとは, $\det(\gamma', \eta)(0) \neq 0$ を満たすときをいう.
- 非退化特異点 p が第二種であるとは, $\det(\gamma', \eta)(0) = 0$ を満たすときをいう. さらに, $\det(\gamma', \eta)(t) \neq 0 (t \neq 0)$, $\det(\gamma', \eta)(0) = 0$ となるとき, 許容的な第二種特異点という.

定義 2.1. $f : V \rightarrow R^3$ を C^∞ 写像, p を特異点とする.

- (1) f が p でカスプ辺を持つとは, f が (u, v^2, v^3) に局所微分同相であるときをいう.
- (2) f が p でツバメの尾を持つとは, f が $(u, 3v^4 + uv^2, 4v^3 + 2uv)$ に局所微分同相であるときをいう.
- (3) f が p でカスプ的蝶を持つとは, f が $(u, 4v^5 + uv^2, 5v^4 + 2uv)$ に局所微分同相であるときをいう.

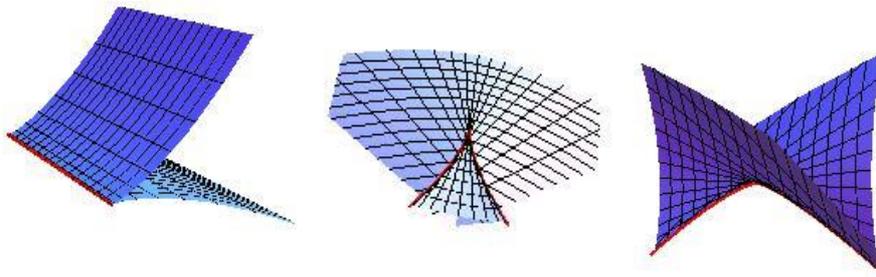


図 1 左から, カスプ辺, ツバメの尾, カスプ的蝶. 赤い曲線は, 特異曲線の像を表す.

カスプ辺は波面の第一種特異点であり, ツバメの尾とカスプ的蝶は許容的な第二種特異点である. これらの特異点の判定法が知られている.

事実 2.2 ([9, 11, 18]). $f : V \rightarrow R^3$ を波面, p を非退化特異点, λ を符号付面積密度関数, η を退化ベクトル場とする.

- (1) f が p でカスプ辺を持つための必要十分条件は, $\eta\lambda(p) \neq 0$ が成り立つことである.
- (2) f が p でツバメの尾を持つための必要十分条件は, $\eta\lambda(p) = 0, \eta\eta\lambda(p) \neq 0$ が成り立つことである.
- (3) f が p でカスプ的蝶を持つための必要十分条件は, $\eta\lambda(p) = \eta\eta\lambda(p) = 0, \eta\eta\eta\lambda(p) \neq 0$ が成り立つことである.

K, H をそれぞれ波面 f の正則な部分で定義されたガウス曲率と平均曲率とする. このとき, 次が成り立つ.

事実 2.3 ([19]). f を波面, p を非退化特異点とする.

- (1) K が p の近くで有界となるための必要十分条件は第二基本量が γ 上零となる.
- (2) H は p の近くで非有界となる.

また, 波面に対して次のような座標が取れることが知られている.

事実 2.4 ([14, Lemma 1.3]). $f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν を f の単位法ベクトルとする. 臍点でない点 $p \in V$ に対し, f_u, ν_u (resp. f_v, ν_v) が U 上で一次独立となる p の周りの局所座標系 $(U; u, v)$ が存在する. さらに, 組 $\{f_u, \nu_u\}$ (resp. $\{f_v, \nu_v\}$) が同時に消えることはなく,

$$\langle f_u, f_v \rangle = \langle f_u, \nu_v \rangle = \langle f_v, \nu_u \rangle = 0$$

が成り立つ.

この座標系を主曲率線という. $(U; u, v)$ を主曲率線とする. このとき, $\Lambda_i : U \rightarrow P^1(\mathbf{R})$ ($i = 1, 2$) を

$$\Lambda_1 = [-\nu_u : f_u], \quad \Lambda_2 = [-\nu_v : f_v]$$

と定める. この写像を主曲率写像という.

事実 2.5 ([14, Lemma 1.7]). $f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, Λ_1, Λ_2 を主曲率写像とする. このとき, $p \in V$ が特異点であるための必要十分条件は $\Lambda_1(p) = [1 : 0]$ または $\Lambda_2(p) = [1 : 0]$ となることである.

これらのことから, 主曲率の少なくとも一方が特異点の近くで非有界となることがわかる. それでは, どのような幾何学的不変量が主曲率の振る舞いに関係しているのだろうか. 以下では, カスプ辺や許容的な第二種特異点を持つ波面について考察する.

2.1 カスプ辺のみを持つ波面

$f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面とし, ν を単位法ベクトル, $p \in V$ をカスプ辺とする. 以下の計算のために, p の周りで次のような座標系を取る.

定義 2.6 ([12, 13, 19]). $(U; u, v)$ が p の周りの適合的座標系であるとは, 次の性質が満たされるときをいう.

- (1) u 軸が特異曲線を与える.
- (2) $\eta = \partial_v$ が u 軸上の退化ベクトル場.
- (3) u 軸を除き特異点がない.

以下では, この座標系を用いる. u 軸が特異曲線であり, ∂_v が退化ベクトル場であるので, C^∞ 写像 $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ で, $df(\eta) = f_v = v\varphi$ を満たすものが存在する. このとき, 符号付面積密度関数 λ は,

$$\lambda = \det(f_u, f_v, \nu) = v \det(f_u, \varphi, \nu)$$

で与えられる. u 軸がカスプ辺であるための必要十分条件は

$$\lambda_v(u, 0) = \det(f_u, \varphi, \nu)(u, 0) \neq 0$$

なので, $\{f_u, \varphi, \nu\}$ は U 上一次独立であることに注意する. これらを用いて, 次の関数を定義する.

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \langle f_u, f_u \rangle, & \hat{F} &= \langle f_u, \varphi \rangle, & \hat{G} &= \langle \varphi, \varphi \rangle, \\ \hat{L} &= -\langle f_u, \nu_u \rangle, & \hat{M} &= -\langle \varphi, \nu_u \rangle, & \hat{N} &= -\langle \varphi, \nu_v \rangle. \end{aligned}$$

f_u, φ が一次独立であることから, $\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2$ は p の周りで消えない関数である.

カスプ辺に対して, 次の曲率を定義する ([12, 13, 19]).

$$\kappa_\nu(t) = \frac{\langle \hat{\gamma}''(t), \nu(\gamma(t)) \rangle}{|\hat{\gamma}'(t)|^2}, \quad \kappa_c(t) = \frac{|\hat{\gamma}'(t)|^{3/2} \det(\hat{\gamma}'(t), f_{\eta\eta}(\gamma(t)), f_{\eta\eta\eta}(\gamma(t)))}{|\hat{\gamma}'(t) \times f_{\eta\eta}(\gamma(t))|^{5/2}}.$$

κ_ν は極限法曲率, κ_c はカスプ的曲率と呼ばれる不変量である. κ_c は, カスプ辺の開き具合を与える ([12, 13]). 次のことが知られている.

補題 2.7 ([13]). f が p で波面となるための必要十分条件は $\kappa_c(p) \neq 0$ となることである.

適合的座標系の下で, κ_ν, κ_c は,

$$\kappa_\nu(u) = \frac{\hat{L}(u, 0)}{\hat{E}(u, 0)}, \quad \kappa_c(u) = \frac{2|f_u(u, 0)|^{3/2}(-\langle \varphi(u, 0), \eta\nu(u, 0) \rangle)}{|f_u(u, 0) \times \varphi(u, 0)|^{3/2}} \quad (2.1)$$

と表すことができる. したがって, p がカस्प辺であるので, $-\langle \varphi(u, 0), \eta\nu(u, 0) \rangle \neq 0$ であることに注意する. いま, $\eta = \partial_\nu$ なので, これは \hat{N} が u 軸上で零にならない関数であることを意味している.

関数 κ_\pm を

$$\kappa_+ = \frac{2(\hat{L}\hat{N} - v\hat{M}^2)}{A + B}, \quad \kappa_- = \frac{2(\hat{L}\hat{N} - v\hat{M}^2)}{A - B} \quad (2.2)$$

とする. ただし, $A = \hat{E}\hat{N} - 2v\hat{F}\hat{M} + v\hat{G}\hat{L}$, $B = \sqrt{A^2 - 4v(\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2)(\hat{L}\hat{N} - v\hat{M}^2)}$ である. ガウス曲率 K と平均曲率 H は

$$K = \frac{\hat{L}\hat{N} - v\hat{M}^2}{v(\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2)}, \quad H = \frac{\hat{E}\hat{N} - 2v\hat{F}\hat{M} + v\hat{G}\hat{L}}{2v(\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2)}$$

となるので, $K = \kappa_+\kappa_-$, $2H = \kappa_+ + \kappa_-$ が成立する. したがって, κ_\pm は主曲率であると考えられる.

2.2 許容的な第二種特異点を持つ波面

$f: V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν を単位法ベクトル, p を許容的な第二種特異点とする. 特異曲線 γ に沿って, 次の関数を定義する.

$$\hat{\psi}_{\text{ccr}}(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \nu \circ \gamma(t), d\nu_{\gamma(t)}(\eta(t)))}{\det(\gamma'(t), \eta(t))}. \quad (2.3)$$

このとき, 次が成り立つ.

補題 2.8. f が p で波面であるための必要十分条件は $\hat{\psi}_{\text{ccr}}(0) \neq 0$ が成り立つことである.

ここで, 次の座標系を取ることができる ([13]).

定義 2.9. $(U; u, v)$ が p の周りの適合的座標系であるとは, u 軸が特異曲線であり, $f_u(p) = \mathbf{0}$ を満たすときをいう.

以下では, この座標系を用いて考えていく. 適合的座標系の定義から, u 軸上の関数 $\varepsilon(u)$ ($\varepsilon(0) = 0$) があって, $\eta = \partial_u + \varepsilon(u)\partial_\nu$ が成り立つ. このとき, $df(\eta) = f_u + \varepsilon(u)f_\nu$

となる. 一方, u 軸が特異曲線であるので, $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ で, $df(\eta) = v\varphi$ を満たす C^∞ 写像が存在する. これらのことから, $f_u = v\varphi - \varepsilon(u)f_v$ と表すことができる. ここで, $\{\varphi, f_v, \nu\}$ は一次独立であることに注意する. φ, f_v, ν を用いて, 次の関数を定義する.

$$\begin{aligned}\hat{E} &= \langle \varphi, \varphi \rangle, & \hat{F} &= \langle \varphi, f_v \rangle, & \hat{G} &= \langle f_v, f_v \rangle, \\ \hat{L} &= -\langle \varphi, \nu_u \rangle, & \hat{M} &= -\langle \varphi, \nu_v \rangle, & \hat{N} &= -\langle f_v, \nu_v \rangle.\end{aligned}$$

$\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2$ が p の周りで消えないことを注意しておく. また, $\hat{\psi}_{\text{CCR}}$ は,

$$\hat{\psi}_{\text{CCR}}(u) = \frac{|f_v(u, 0)|^2 (-\langle \varphi(u, 0), \eta\nu(u, 0) \rangle)}{|\varphi(u, 0) \times f_v(u, 0)|} \quad (2.4)$$

と表すことができる. したがって, 補題 2.8 と (2.4) から, f が波面であるための必要十分条件は $\langle \varphi, \eta\nu \rangle \neq 0$ である. ここで, $-\langle \varphi, \eta\nu \rangle = \hat{L} + \varepsilon(u)\hat{M}$ である. またこのとき, 極限法曲率 $\kappa_\nu(p)$ は,

$$\kappa_\nu(p) = \frac{\langle f_{uu}(p), \nu(p) \rangle}{|f_u(p)|^2} = \frac{\hat{N}(p)}{\hat{G}(p)} \quad (2.5)$$

で与えられる.

関数 κ_\pm を次のように定義する:

$$\kappa_+ = \frac{2(\hat{N}(\hat{L} + \varepsilon\hat{M}) - v\hat{M}^2)}{A + B}, \quad \kappa_- = \frac{2(\hat{N}(\hat{L} + \varepsilon\hat{M}) - v\hat{M}^2)}{A - B}. \quad (2.6)$$

ただし,

$$\begin{aligned}A &= \hat{G}(\hat{L} + \varepsilon\hat{M}) - 2v\hat{F}\hat{M} + v\hat{E}\hat{N}, \\ B &= \sqrt{A^2 - 4v(\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2)((\hat{L} + \varepsilon\hat{M})\hat{N} - v\hat{M}^2)}\end{aligned}$$

である. ガウス曲率 K と平均曲率 H は,

$$K = \frac{(\hat{L} + \varepsilon\hat{M})\hat{N} - v\hat{M}^2}{v(\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2)}, \quad H = \frac{\hat{G}(\hat{L} + \varepsilon\hat{M}) - 2v\hat{F}\hat{M} + v\hat{E}\hat{N}}{2v(\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2)}. \quad (2.7)$$

で与えられる. (2.6) と (2.7) から, $K = \kappa_+\kappa_-$, $2H = \kappa_+ + \kappa_-$ が成り立つので, κ_\pm を主曲率と考えることができる. u 軸上において, $A = \hat{G}(\hat{L} + \varepsilon(u)\hat{M}) = |f_v|^2(-\langle \varphi, \eta\nu \rangle) (\neq 0)$, $B = |A|$ となることに注意する.

ここで, $\hat{H} = vH$ とすると, u 軸上で,

$$2\hat{H} = \frac{|f_v|^2(-\langle \varphi, \eta\nu \rangle)}{|\varphi \times f_v|^2}$$

が成り立つ. f が波面で, p が許容的な第二種特異点なので, u 軸上 \hat{H} は零にならない関数である. この関数を用いて,

$$\mu_c(p) = 2\hat{H}(p) \quad (2.8)$$

とおく.*¹ この $\mu_c(p)$ は正規化されたカスプ的曲率と呼ばれ, 第二種特異点を持つ波面の不変量となっている ([13]). また, f が波面であるとき, $\mu_c(p)$ は零にならないという性質を持つ ([13, Proposition 3.2]).

3 主定理

これまでのことから, 次の結果が得られる.

定理 3.1 ([21, Theorem 1.1]). $f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, p を非退化特異点とする.

- (1) p をカスプ辺とする. このとき, κ_+ (resp. κ_-) が p で C^∞ 関数となるための必要十分条件は $\kappa_c(p) > 0$ (resp. $\kappa_c(p) < 0$) が成立することである. また, κ_- (resp. κ_+) は p の近くで非有界となる. さらに, $\kappa_+(p) = \kappa_\nu(p)$ (resp. $\kappa_-(p) = \kappa_\nu(p)$).
- (2) p を許容的な第二種特異点とする. このとき, κ_+ (resp. κ_-) が p で C^∞ 関数となるための必要十分条件は $\mu_c(p) > 0$ (resp. $\mu_c(p) < 0$) となることである. また, κ_- (resp. κ_+) は p の近くで非有界となる. さらに, $\kappa_+(p) = \kappa_\nu(p)$ (resp. $\kappa_-(p) = \kappa_\nu(p)$) が成り立つ.

Proof. (1) を示す. $(U; u, v)$ を適合的座標系とする. いま, f は p でカスプ辺を持つことから, $\kappa_c(p) \neq 0$ が成立している. (2.1) より, この条件は, $\hat{N}(p) = -\langle \varphi(p), \eta\nu(p) \rangle \neq 0$ と同値である. 一方, 関数 $A \pm B$ は, u 軸上で $A \pm B = \hat{E}(\hat{N} \pm |\hat{N}|)$ となる. したがって, $A(p) + B(p) = 2\hat{E}(p)\hat{N}(p) \neq 0$ であることと, $\kappa_c(p) > 0$ であることは同値である. ゆえに, κ_+ が C^∞ 関数となるための必要十分条件は, $\kappa_c(p) > 0$ となることである. いま, $2H = \kappa_+ + \kappa_-$ であり, H は p の近くで非有界となることから, κ_- は p の近くで非有界となる. また, $\kappa_+(p)$ は, $\kappa_+(p) = \hat{N}(p)/\hat{E}(p) = \kappa_\nu(p)$ となる. したがって, (1) が成り立つ.

次に, (2) を示す. $(U; u, v)$ を許容的な第二種特異点 p の周りの適合的座標系とする. このとき, u 軸上で, $-\langle \varphi, \eta\nu \rangle = \hat{L} + \varepsilon\hat{M} \neq 0$ となることに注意する. 関数 $A \pm B$ は, u 軸上で $A \pm B = \hat{G}((\hat{L} + \varepsilon\hat{M}) \pm |\hat{L} + \varepsilon\hat{M}|)$ となるので, $A(p) + B(p) = 2\hat{G}(p)\hat{L}(p) \neq 0$ と

*¹ 講演時には, $\mu_c(p)$ を κ_H として紹介したが, [13] で, このように変更されたので, 本稿においてもそれを採用する.

$\mu_c(p) > 0$ となることは同値. したがって, κ_+ が p で C^∞ 関数であるための必要十分条件は, $\mu_c(p) > 0$ となることである. このとき, 平均曲率 H が p の近くで非有界となることから, κ_- が p の近くで非有界となることが従う. $\kappa_+(p)$ は, $\kappa_+(p) = \hat{N}(p)/\hat{G}(p)$ となり, (2.5) から, $\kappa_+(p) = \kappa_\nu(p)$ が従う. \square

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, Vol.1, Monographs in Mathematics **82**, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [2] T. Fukui and M. Hasegawa, Singularities of parallel surfaces, *Tohoku Math. J.* **64** (2012), 387–408.
- [3] T. Fukui and M. Hasegawa, Fronts of Whitney umbrella – a differential geometric approach via blowing up, *J. of Singul.* **4** (2012), 35–67.
- [4] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of maximal surfaces, *Math. Z.* **259** (2008), 827–848.
- [5] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Intrinsic properties of singularities of surfaces, *Internat. J. Math.* **26**, 34pp.
- [6] G. Ishikawa, Singularities of tangent varieties to curves and surfaces, *J. Singul.* **6** (2012), 54–83.
- [7] G. Ishikawa and Y. Machida, Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature, *Internat. J. Math.* **17** (2006), 269–293.
- [8] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas and F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.
- [9] S. Izumiya and K. Saji, The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and "flat" spacelike surfaces. *J. Singul.* **2** (2010), 92–127.
- [10] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space, *J. Math. Soc. Japan* **62** (2010), 789–849.
- [11] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic space, *Pacific J. Math.* **221** (2005), 303–351.

- [12] L. F. Martins and K. Saji, Geometric invariants of cuspidal edges, *Canad. J. Math.* **68** (2016), 445–462.
- [13] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts, to appear in the proceedings of China-Japan Geomtry Conference “Geometry and Topology of Manifold–The 10th Geometry Conference for the Friendship of China and Japan 2014”, arXiv:1308.2136.
- [14] S. Murata and M. Umehara, Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space, *J. Differential Geom.* **221** (2005), 303–351.
- [15] K. Saji, Criteria for D_4 singularities of wave fronts, *Tohoku Math. J.* **63** (2011), 137–147.
- [16] K. Saji, Koenderink type theorems for fronts, *J. Singul.* **10** (2014), 264–270
- [17] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Behavior of corank one singular points on wave fronts, *Kyushu J. Math.* **62** (2008), 259–280.
- [18] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, A_k singularities of wave fronts, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **146** (2009), 731–746.
- [19] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, The geometry of fronts, *Ann. of Math.* **169** (2009), 491–529.
- [20] K. Teramoto, Parallel and dual surfaces of cuspidal edges, *Differ. Geom. Appl.* **44** (2016), 52–62.
- [21] K. Teramoto, Principal curvatures and parallel surfaces of wave fronts, preprint.
- [22] V. M. Zakalyukin, Reconstructions of fronts and caustics depending on a parameter and versality of mappings, *J. Soviet Math.* **27** (1984), 2713–2735.