可微分写像の特異点の判定法とその応用

平成 27 年 2 月 20 日

佐治健太郎 (神戸大学大学院理学研究科)

概 要

可微分写像には一般に特異点があらわれる．微少に摂動しても無くなることのない特異点をジェネリックな特異点と呼ぶが, ジェネリックな特異点に関してはその判定法が重要となる．本ノートではいくつかの特異点の使いやすい判定法を述べる．また, 具体例を計算することにより, その使い方を紹介する．全ての写像, 多様体は C^∞ 級微分可能とする．本ノートの内容は全て既存の事柄を判定法の紹介という観点からまとめ直したものであり, 新しい成果は含んでいない.

1 序

1.1 右左同値

2 つの写像芽 $f, g : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ が**右左同値**または $\mathcal{A}$ **同値**であるとは, 定義域の座標変換 φ と像域の座標変換 ψ が存在して

$$g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

がなりたつときをいう.

右左同値は同値関係である．右左同値に関して次は陰関数定理であり, よく知られている．証明は例えば [15, p,60], [8, p,267] を参照.

命題 1.1. $f \in C^\infty(m, n)$, $m \le n$ とし, $\operatorname{rank} df_0 = m$ とする．このとき任意の定義域の座標 x に対して像域の座標 $X = (X_1, \dots, X_n)$ が存在して $X_i \circ f(x) = x_i$ $(1 \le i \le m)$, $X_i \circ f(x) = 0$ $(m+1 \le i \le n)$ が成り立つ．つまり, これらの座標に関する表示が $f = (x_1, \dots, x_m, 0, \cdots, 0)$ となる.

$f \in C^\infty(m, n)$, $m \ge n$ とし, $\operatorname{rank} df_0 = n$ とする．このとき任意の像域の座標 X に対して定義域の座標 $x = (x_1, \dots, x_m)$ が存在して $X_i \circ f(x) = x_i$ $(1 \le i \le n)$ が成り立つ．つまり, これらの座標に関する表示が $f = (x_1, \dots, x_n)$ となる.

つまり $C^\infty(m, n)$ を $\mathcal{A}$ 同値で割った集合の中で $\operatorname{rank} df_0 = \min\{m, n\}$ であるものはすべて同じ点となっている．しかし, $\operatorname{rank} df_0 = \min\{m, n\}$ でないものは複雑である．以

降で与える例はすべて互いに $\mathcal{A}$ 同値でない. 特異点の名前が τ であるものは, それと $\mathcal{A}$ 同値なものは全て τ と呼ぶ.

例 1.2. (関数) $f_1(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ (指数 0 のモース関数), $f_2(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$ (指数 1 のモース関数, サドル), $f_3(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2$ (指数 2 のモース関数), $f_4(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^3$ (A_2 関数), $f_5(x_1,x_2)=x_1^2\pm x_2^4$ ($A_3^{\pm}$ 関数), $f_6(x_1,x_2)=x_1^3+x_1x_2^2$ (D_4^+ 関数), $f_7(x_1,x_2)=x_1^3-x_1x_2^2$ (D_4^- 関数).

例 1.3. (平面曲線) $f(x)=(x^2,x^3)$ (カスプ, $(2,3)$-カスプ, $3/2$-カスプ, 通常カスプ), $f(x)=(x^2,x^5)$ ($(2,5)$-カスプ, $5/2$-カスプ, ランフォイドカスプ).

例 1.4. (平面写像) $f_f(x_1,x_2)=(x_1,x_2^2)$ (折り目, フォールド), $f_c(x_1,x_2)=(x_1,x_2^3+x_1x_2)$ (尖点, (ホイットニー) カスプ), $f_l(x_1,x_2)=(x_1,x_2(x_1^2+x_2^2))$ (唇), $f_b(x_1,x_2)=(x_1,x_2(x_1^2-x_2^2))$ (嘴), $f_s(x_1,x_2)=(x_1,x_2^4+x_1x_2)$ ((平面) 燕の尾, (平面) スワローテイル). [17] を参照.

例 1.5. (曲面) $f_w(x_1,x_2)=(x_1,x_2^2,x_1x_2)$ (ホイットニーの傘, 交差帽子), $f_{cmm+}(x_1,x_2)=(x_1,x_1(x_1^2+x_2^2))$ ($+$ 陳・松本・モンド特異点), $f_{cmm-}(x_1,x_2)=(x_1,x_2(x_1^2+x_2^2))$ ($-$ 陳・松本・モンド特異点) [3, 13] を参照.

正則曲面 (はめ込み) は単位法線ベクトルが定義されている. 例 1.5 の特異点は特異点の近くで単位法線ベクトルが定義できなくなっている. 全ての特異点で単位法線ベクトルが定義できなくなるわけではなく, 単位法線ベクトルが定義できるような特異点もある. そのようなものは波面的写像と呼ばれ, 単位法線ベクトルが定義されているので微分幾何学と相性がよく, 応用上重要である. C^∞-写像 $f:(\boldsymbol{R}^2,0)\to(\boldsymbol{R}^3,0)$ が**波面的**であるとは f に沿った単位ベクトル場 $\nu:(\boldsymbol{R}^2,0)\to(S^2,\nu(0))$ であって任意の $p\in(\boldsymbol{R}^2,0)$ と $X\in T_p\boldsymbol{R}^2$ に対して

$$\langle df(X),\nu\rangle=0$$

が成り立つときをいう. もし, $(f,\nu):(\boldsymbol{R}^2,0)\to(\boldsymbol{R}^3\times S^2,(f,\nu)(0))$ がはめ込みのとき, f は**波面**という. 詳しくは [2, 11] を参照.

例 1.6. (波面的曲面) $f_c(x_1,x_2)=(x_1,x_2^2,x_2^3)$ (カスプ辺), $f_s(x_1,x_2)=(x_1,3x_2^4+x_1x_2,4x_2^3+2x_1x_2)$ (燕の尾, スワローテイル), $f_{cl}(x_1,x_2)=(u,4v^3+2v(s+2u^2),3v^4+v^2(s+2u^2))$ $s=0$ (カスプ的唇), $f_{cb}(x_1,x_2)=(u,4v^3+2v(s-2u^2),3v^4+v^2(s+2u^2))$ $s=0$ (カスプ的嘴), $f_{cb}(x_1,x_2)=(u,3sv^2+5v^4+2uv,2sv^3+4v^5+v^2u-u^2)$ $s=0$ (カ

スプ的蝶), $f_{D_4^+}(x_1,x_2)=(2uv,u^2+2sv+3v^2,2u^2v+sv^2+2v^3)$ $s=0$ (カスプ的 D_4^+), $f_{D_4^-}(x_1,x_2)=(2uv,-u^2+2sv+3v^2,-2u^2v+sv^2+2v^3)$ $s=0$ (カスプ的 D_4^-).

例 1.7. (同次元空間の間のモラン写像) 次の写像は**モラン写像**と言われる [14].

$$x \mapsto \big(x_1,\dots,x_{m-1},h(x)\big), \quad h(x)=\sum_{j=1}^{r-1} x_j x_m^j + x_m^{r+1} \tag{1.1}$$

ただし, $r \le m$ で, $x=(x_1,\dots,x_m)$ である. これは例 1.4 の折り目とカスプを含む一般的な特異点である. 同次元間の写像 $f:(\boldsymbol{R}^m,0)\to(\boldsymbol{R}^m,0)$ が $\operatorname{rank} df_0=m-1$ を満たしていて安定であればモラン写像である [14].

1.2 判定法

ここで挙げたものは基本的な特異点であり, 様々な場面でよく現れる. 具体的に与えられた写像に対してどの特異点であるかを定義から調べることは一般には容易でない. それを簡単に調べることができれば便利なだけでなく, 場面によっては必要不可欠となる. 与えられた写像芽がある写像芽 f_0 に $\mathcal{A}$-同値となるための必要十分条件で, 計算しやすく簡単なものを f_0 の判定法という. 次節以降ではここで挙げた特異点の判定法を幾つか述べる.

2 判定法

2.1 二変数関数

関数 f のテイラー展開を

$$f(u,v)=\sum_{i,j}\frac{1}{i!j!}a_{ij}u^iv^j$$

とする. 3 次の項を $c(u,v)$ とおく: $c(u,v)=\sum_{i+j=3}\dfrac{1}{i!j!}a_{ij}u^iv^j$. 次はモースの定理と呼ばれ, 非常に基本的である.

定理 2.1. (モースの定理) f は $\det\operatorname{Hess} f(0,0)>0$ であれば u^2+v^2 に $\mathcal{A}$ 同値で, $\det\operatorname{Hess} f(0,0)>0$ であれば u^2-v^2 に $\mathcal{A}$ 同値である.

$\operatorname{rank}\operatorname{Hess} f(0,0)=1$ とすると, $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ が存在して $\operatorname{Hess} f(0,0)\eta=0$ が成り立つ. このとき, 次が成り立つ.

定理 2.2. [5] f が u^2+v^3 に $\mathcal{A}$ 同値であるための必要十分条件は $\operatorname{rank}\operatorname{Hess} f(0,0)=1$ かつ上記の $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ に対して $c(\eta_1,\eta_2)\neq 0$ である.

定理 2.3. [19] f が $u^3\pm uv^2$ に $\mathcal{A}$ 同値であるための必要十分条件は $\operatorname{rank}\operatorname{Hess} f(0,0)=0$, $\Delta\neq 0$. ただし Δ は 3 次方程式の判別式と呼ばれているものをこの場合に適用したもので,

$$\Delta=f_{uuu}^2f_{vvv}^2-6f_{uuu}f_{uuv}f_{uvv}f_{vvv}-3f_{uuv}^2f_{uvv}^2+4f_{uuv}^3f_{vvv}+4f_{uuu}f_{uvv}^3.$$

2.2 平面曲線

平面曲線 $\gamma:(\boldsymbol{R},0)\to(\boldsymbol{R}^2,0)$ の (2,3)-カスプの判定法はよく知られている. また, (2,5)-カスプについて次が成り立つ.

定理 2.4. γ が $(2,3)$-カスプであるための必要十分条件は $\gamma'(0)=0$, $\det(\gamma'',\gamma''')(0)\neq 0$ である. γ が $(2,5)$-カスプであるための必要十分条件は $\gamma'(0)=0$, $\det(\gamma'',\gamma''')(0)=0$, $\det(\gamma'',3\gamma''''-10\gamma^{(5)})(0)\neq 0$ である [16].

2.3 基本データー

平面写像や曲面の特異点判定のために, 基本となるデーターを準備する. 詳しくは [12, 20] を参照. 写像芽 $f:(\boldsymbol{R}^m,0)\to(\boldsymbol{R}^n,0)$ は $\operatorname{corank} df_0=1$ とする. このとき命題 1.1 により, f は

$$\begin{aligned} f(x)&=\big(x_1,\dots,x_{m-1},f_m(x),\dots,f_n(x)\big)\quad(n\geq m),\\ f(x)&=\big(x_1,\dots,x_{n-1},f_n(x)\big)\quad(n<m)\end{aligned}\tag{2.1}$$

とできる. さらに次が成り立つ.

補題 2.5. $f:(\boldsymbol{R}^m,0)\to(\boldsymbol{R}^n,0)$ は $\operatorname{corank} df_0=1$ とする. このとき $\eta\in\mathfrak{X}(\boldsymbol{R}^m,0)$ が存在して $p\in S(f)$ ならば $\langle\eta(p)\rangle_{\boldsymbol{R}}=\ker df_p$ が成り立つ.

Proof. 仮定から (2.1) のようにすると, ∂x_m が条件をみたすもの. □

ここで存在が保証されたベクトル場を**退化ベクトル場**といい, η であらわす.

$f \in C^\infty(m,n)$ に対して $m=n$ のとき, $\det Jf$ を λ と書き, **ヤコビ行列式**という. $m=n+1$ で f が波面的のとき, $\det(f_u, f_v, \nu)$ を λ と書き, **符号付き面積密度関数**または**波面のヤコビ行列式**という. これらは座標を取り替えると 0 でない関数倍される.

2.4 同次元間のモラン写像

$S(f)$ を f の特異点の集合とする. λ の零点は $S(f)$ である. f が 1-非退化であるとは, $d\lambda \neq 0$ のときをいう. このとき, $S(f)$ が多様体となるので, η が $S(f)$ に接するかどうかは意味をもつ. $f_1 = f|_{S(f)}$ とすると, $S(f_1)$ は η が $S(f)$ に接する点であることがわかる. η が $S(f)$ に接するとき, 2-特異という. 2-特異な点全体は $\{\eta\lambda = 0\}$ であり, これを $S_2(f)$ とおくと, $d(\eta\lambda|_{S(f)}) \neq 0$ であれば $S_2(f)$ は多様体となる. f が 2-非退化であるとは, $d(\eta\lambda|_{S(f)}) \neq 0$ となるときをいう. これを続けていくと, $S_{m+1}(f)$ が点になるまで続けることができる.

定理 2.6. [20] f が k-モラン特異点であるための必要十分条件は k-非退化であるが k-特異でないときである.

ただし, 1-モラン特異点とは折り目のことであり, 2-モラン特異点とはカスプのことである. 簡単に次がわかる.

系 2.7. [20] f が k-モラン特異点であるための必要十分条件は

- $\lambda = \eta\lambda = \cdots = \eta^{k-1}\lambda = 0,\ \eta^k\lambda \neq 0,$
- $\operatorname{rank} d(\lambda, \eta\lambda, \ldots, \eta^{k-1}\lambda) = k.$

2.5 波面的写像

波面的写像 $f : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^{m+1}, 0)$ に対しては符号付き面積密度関数を同次元間の写像のヤコビ行列式の代わりに使うことで同じ形の判定法が得られる. 詳しくは [12, 20] を参照.

ここでは述べていない特異点の判定法については [4, 9, 10, 18, 19] を参照.

3　応用

判定法の応用として, ここでは $\boldsymbol{R}^3$ 内の正則曲面の接線方向への射影にあらわれる特異点を考えよう.

写像 $f:(\boldsymbol{R}^2,0)\to(\boldsymbol{R}^3,0)$ を正則曲面つまり, $\operatorname{rank} df_0=2$ をみたすとする. 単位ベクトル $\xi\in df_0(T_0\boldsymbol{R}^2)$ をとり, f の ξ 方向への射影

$$\pi=f-\langle f,\xi\rangle\,\xi$$

を考える. 座標 (u,v) をとると, ξ は π_u, π_v に直交する長さ 1 のベクトルなので,

$$\det(\pi_u,\pi_v)=\det(\pi_u,\pi_v,\xi)=\det(f_u,f_v,\xi)$$

となる. ただし, 一つ目の det は ξ に直交する平面内のベクトルに関する行列式をあらわす. ゆえに π のヤコビ行列式 λ は

$$\lambda=\det(f_u,f_v,\xi)$$

となる. このとき, $S(\pi)$ 上ではベクトル ξ は f_u,f_v の一次結合で書けるので $\xi=\alpha(u,v)f_u(u,v)+\beta(u,v)f_v(u,v)$ とする. ベクトル場 $\eta(u,v)=\alpha(u,v)\partial u+\beta(u,v)\partial v$ を考えると $\xi\neq 0$ からこれは 0 でない $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル場である. この η に対して π の η 方向の微分 $\eta\pi$ を考えると,

$$\begin{aligned}\eta\pi&=\alpha\pi_u+\beta\pi_v\\&=\alpha\Big(f_u-\langle f_u,\xi\rangle\,\xi\Big)+\beta\Big(f_v-\langle f_v,\xi\rangle\,\xi\Big)\quad=\alpha f_u+\beta f_v-\langle \alpha f_u+\beta f_v,\xi\rangle\,\xi=0\end{aligned}$$

となり, $S(f)$ 上で $\eta\pi=0$ となる. ゆえに退化ベクトル場として η がとれる. ゆえに系 2.7 から, 原点で π が折り目である必要十分条件は

$$\begin{aligned}\alpha\lambda_u+\beta\lambda_v&=\alpha\Big(\det(f_{uu},f_v,\xi)+\det(f_u,f_{uv},\xi)\Big)\\&\qquad\qquad+\beta\Big(\det(f_{uv},f_v,\xi)+\det(f_u,f_{vv},\xi)\Big)\\&=\alpha\Big(\det(f_{uu},f_v,\alpha f_u)+\det(f_u,f_{uv},\beta f_v)\Big)\\&\qquad\qquad+\beta\Big(\det(f_{uv},f_v,\alpha f_u)+\det(f_u,f_{vv},\beta f_v)\Big)\\&=\alpha\Big(\det(\alpha-L-\beta M\Big)+\beta\Big(\alpha-M+\beta-N\Big)\\&=-\Big(\alpha^2L+2\alpha\beta M+\beta^2N\Big)\end{aligned}$$

が 0 でないことであるととわかる．さて, ξ と $\nu(0)$ で張られる平面による f の切り口の平面曲線としての曲率を求める．ただし ν は f の単位法線ベクトル場である．切り口の集合は $\langle f, \xi\times\nu(0)\rangle = 0$ で与えられる．ここで f_u, f_v は一次独立で $\xi\times\nu$ は f_u, f_v で張られる平面に入るので $(\langle f_u, \xi\times\nu\rangle, \langle f_v, \xi\times\nu\rangle)(0) \neq (0,0)$ が成り立つ．ゆえに陰関数定理より切り口のパラメーター表示 $(u(t), v(t))$ が得られる．したがって切り口の曲線は $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$ で与えられる．ここで, パラメーター t を取り替えて, $|d\gamma/ds(s)| = 1$, $\gamma(0) = 0$ となるようにする．ベクトル $\gamma'(0)$ は ξ に平行で, γ'' は $\gamma'(0) = \xi$ と, $\xi\times\nu(0)$ に直交するので, $\nu(0)$ に平行である．したがって, γ の平面曲線としての曲率は

$$\langle\gamma'', \nu\rangle(0)$$

である．これは

$$\left\langle f_{uu}(u')^2 + 2f_{uv}u'v' + f_{vv}(v')^2, \nu\right\rangle(0) = \left(L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2\right)(0)$$

であり, $(u', v')(0)$ は $df(u', v')$ が ξ に平行であり, ξ の長さは 1 だから, $(u', v')(0) = \pm(\alpha, \beta)(0)$ をみたす．したがって, 曲率は

$$\left(L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2\right)(0)$$

となる．ゆえに ξ 方向の射影が折り目でなければξ は f の漸近方向であることがわかる (これは [1, 6] の結果の非常に特別な場合である.)．つまり, 山の景色などの曲面を目で見た場合, 稜線が尖っていたり (曲面が不透明の場合は) 途中で途切れていた場合は, その曲面の漸近方向から見ていることになる．このように判定法を利用すると特異点のもつ幾何学的性質を具体的な座標変換を考えることなしに調べることができる．座標変換を求めることは通常容易でないが, 判定法を利用すればそれは必要ないので, 判定法は様々な場面で有用であるといえる．

参考文献

[1] V. I. Arnol'd, *Indexes of singular points of* 1*-forms on manifolds with boundary, convolutions of invariants of groups generated by reflections, and singular projections of smooth surfaces*, Uspekhi Mat. Nauk **34** (1979), 3–38.

[2] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps, Vol.* 1, Monogr. Math. **82**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[3] X. Chen and T. Matumoto, *On generic* 1*-parameter families of* C^∞*-maps of an* n*-manifold into a* $(2n-1)$*-manifold*, Hiroshima Math. J. **14** (1985), 547–550.

[4] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.

[5] T. Fukui and M. Hasegawa, *Singularities of parallel surfaces*, Tohoku Math. J. **64** (2012), 387–408.

[6] T. Gaffney, *The structure of* $T\mathcal{A}(f)$*, classification and an application to differential geometry*, Singularities, Part **1** (Arcata, Calif., 1981), 409–427, Proc. Sympos. Pure Math., **40**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983

[7] 泉屋周一・石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版, 1998.

[8] 泉屋周一・佐野貴志・佐伯修・佐久間一浩, 幾何学と特異点, 特異点の数理 1 巻, 共立出版, 2001.

[9] S. Izumiya and K. Saji, *The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and "flat" spacelike surfaces*, J. Singul. **2** (2010), 92–127.

[10] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in Hyperbolic* 3*-space*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 789–849.

[11] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **216** (2004), 149–175.

[12] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic* 3*-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.

[13] D. Mond, *On the classification of germs of maps from* $\boldsymbol{R}^2$ *to* $\boldsymbol{R}^3$, Proc. London Math. Soc. **50** (1985), 333–369.

[14] B. Morin, *Formes canoniques des singularites d'une application differentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 5662-5665.

[15] 西村尚史・福田拓生, 特異点と分岐, 特異点の数理 2 巻, 共立出版, 2002.

[16] I. R. Porteous, *Geometric differentiation. For the intelligence of curves and surfaces*, Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[17] J. H. Rieger, *Families of maps from the plane to the plane*, J. London Math. Soc. **36** (1987), 351–369.

[18] K. Saji, *Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications*, Hiroshima Math. J. **40** (2010), 229-239.

[19] K. Saji, *Criteria for D_4 singularities of wave fronts*, Tohoku Math. J. **63** (2011), 137–147.

[20] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.