

# ルジャンドル曲線の曲率と凸性の判定について

福永 知則\*

九州産業大学工学部

## 1 はじめに

本稿では、ルジャンドル曲線の微分幾何学に関する著者らによる最近の研究 [1, 5] について紹介する。

$I$  を区間または  $\mathbb{R}$  とする。特に断りの無い限り、以下に出てくる写像は全て  $C^\infty$  級とする。また、以下では単に曲線と言った場合、平面曲線を意味することにする。ユークリッド平面内の曲線  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  が正則であるとは、全ての  $t \in I$  に対して  $t$  における  $\gamma$  の微分が消えない、即ち、 $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  をみたすことである。さて、正則曲線が与えられた時に、その「曲がり具合」を調べたいとする。そのための手法としてよく知られているのが、枠を用いた手法である（例えば [6] を参照）。正則曲線  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して、 $t : I \rightarrow S^1$  及び  $n : I \rightarrow S^1$  をそれぞれ次のように定義し、単位接ベクトル及び単位法ベクトルと呼ぶ： $t(t) := \dot{\gamma}(t)/\|\dot{\gamma}(t)\|$ 、 $n(t) := J(t(t))$ 。但し、 $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とする。この単位接ベクトルと単位法ベクトルの組  $(t, n)$  を、正則曲線  $\gamma$  に沿ったフレネ枠と呼ぶ。枠を用いた曲線の微分幾何学の発想は「枠の動き方を調べれば、曲線の曲がり具合がわかるだろう」ということである。フレネ枠の動き方を調べるために、その微分  $(\dot{t}, \dot{n})$  を考察する。 $t \cdot t \equiv 1$ 、 $t \cdot n \equiv 0$  などの関係式から、次の公式が示せる：

$$\begin{pmatrix} \dot{t}(t) \\ \dot{n}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\|\dot{\gamma}(t)\|\kappa(t) \\ \|\dot{\gamma}(t)\|\kappa(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(t) \\ n(t) \end{pmatrix}$$

ここで、 $\kappa$  はある実数値関数であり、正則曲線  $\gamma$  の曲率と呼ぶ。この公式はフレネの公式と呼ばれるもので、ここに現れた曲率  $\kappa$  が、曲線の微分幾何学に対して非常に重要な量になっていることが、次の定理によりわかる。

定理 1.1 (一意性定理).  $\gamma$  と  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を正則曲線とし、 $s = |\dot{\gamma}(t)|$  と  $\tilde{s} = |\dot{\tilde{\gamma}}(t)|$  とする。更に、それぞれの曲率  $\kappa$  と  $\tilde{\kappa}$  が一致するとする。このとき、 $\gamma$  と  $\tilde{\gamma}$  は回転と平行移動で移りあう。

また、次の存在性定理も成り立つ。

定理 1.2 (存在性定理). 任意の  $C^\infty$  関数  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、曲率が  $\kappa$  になるような正則曲線  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  が存在する。

これらの定理は、極端な言い方をすれば、この  $\kappa$  が曲線の微分幾何学の全ての情報を含んでいるということを示唆している。曲線の微分幾何的な情報を調べたければ、まずは枠を作り、その動き方を調べ（微分し）、曲率を求めよ、ということである。

さて、以上は全て正則曲線の話であるが、曲線が正則でない場合はどうだろうか？正則でない曲線  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を考えると、定義より、 $\dot{\gamma}(t) = 0$  となる点  $t \in I$ 、即ち特異点が存在する。特異点では  $t(t) = \dot{\gamma}(t)/\|\dot{\gamma}(t)\|$  を考えることができない。従って、特異点を持つ曲線に対しては、フレネ枠を考えることができない。それ

---

\*tfuku@ip.kyusan-u.ac.jp

では、違う方法で枠を作り、その動きを見て正則曲線の曲率に対応する量を取り出し、曲線の微分幾何学的な性質を調べることはできないだろうか？ 実は、フロントルと呼ばれる曲線であれば可能だということが、論文 [1] の主結果のひとつである。次節では、そのことについて述べる。

## 2 ルジャンドル曲線に沿う枠と曲率

フロントルとは、大まかに言うと、単位法ベクトルが大域的に定義される（必ずしも正則とは限らない）曲線である。例えば、アステロイド曲線  $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) を考える。 $\gamma$  は正則曲線ではないが、 $\nu: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$  を  $\nu(t) = (\sin t, \cos t)$  と定義すると、これは  $\gamma$  に沿って大域的に定義された単位法ベクトルとなる。

### 2.1 ルジャンドル曲線の定義と例

**定義 2.1.**  $(\gamma, \nu): I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  が  $\dot{\gamma} \cdot \nu \equiv 0$  を満たすとき、ルジャンドル曲線であるという。また、このとき  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  をルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu)$  のフロントルとよぶ。更に、 $(\gamma, \nu)$  がはめ込みになっているとき、ルジャンドルはめ込みであるといい、 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  をルジャンドルはめ込み  $(\gamma, \nu)$  のフロントとよぶ。

**注意 2.2.** 上の定義において、 $(\gamma, \nu): I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  がルジャンドルはめ込みであるための条件は、単位接束  $T_1\mathbb{R}^2$  上の標準接触構造  $\theta \in \Omega^1(T_1\mathbb{R}^2)$  に対して、 $\theta$  の  $(\gamma, \nu)$  による引戻しが  $(\gamma, \nu)^*\theta \equiv 0$  を満たすことと同値である。本稿では、標準接触構造などについての知識は必要としない。詳細については、例えば [7] 参照。

ルジャンドル曲線及びそのフロントルの例をいくつか紹介する。

**例 2.3.** 正則曲線  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を考える。 $\gamma$  とその単位法ベクトル  $n: I \rightarrow S^1$  の組  $(\gamma, n): I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  を考えると、これはルジャンドル曲線になっていることがわかる。更に、 $\gamma$  が正則曲線であることから、全ての  $t \in I$  に対して  $(\dot{\gamma}(t), \dot{n}(t)) \neq 0$  となり、 $(\gamma, \nu)$  がはめ込みであることがわかる。従って、 $\gamma$  はルジャンドルはめ込み  $(\gamma, n)$  のフロントである。

上記の例より、正則曲線は常にルジャンドルはめ込みのフロントとして捉えることができることがわかる。正則曲線ではないフロントの例として、3/2 カスプがある。

**例 2.4.**  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$  と定義する。このとき、 $\nu: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  を  $\nu(t) = 1/\sqrt{9t^2 + 4}(-3t, 2)$  と定義すると、 $(\gamma, \nu): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  はルジャンドルはめ込みとなる。特に、 $\gamma$  はルジャンドルはめ込みのフロントであることがわかる。

例 2.4 の曲線  $\gamma$  は原点で特異点を持つので、正則曲線ではない。従って、3/2 カスプは正則曲線ではないフロントの例になっている。また、次のような極端なフロントの例もある。

**例 2.5.**  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を定値写像とする。このとき、 $\nu: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  を  $\nu(t) = (\cos t, \sin t)$  と定義すると、 $(\gamma, \nu): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  はルジャンドルはめ込みになっている。従って、定値写像  $\gamma$  はルジャンドルはめ込みのフロントである。

これまでに挙げた曲線は全てフロントであるが、フロントではないフロントルの例として、次のような曲線がある。

例 2.6.  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $\gamma(t) = (t^2, t^5)$  と定義する。このとき、 $\nu : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  を  $\nu(t) = 1/\sqrt{25t^6 + 4}(5t^3, -2)$  と定義すると、 $(\gamma, \nu) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  はルジャンドル曲線となる。特に、 $\gamma$  はルジャンドル曲線のフロントアルである。ところが、 $(\gamma, \nu) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  はルジャンドルはめ込みにならない。実際、 $\nu$  は原点の付近で滑らかな単位ベクトル場であるが、原点での微分は消える ( $\gamma$  の原点での微分も消えるので、 $(\gamma, \nu)$  は原点ではめ込みにならない)。原点の周りでの単位法ベクトル場の取り方が符号を除いて一意的に定まることに注意すると、 $\gamma$  はルジャンドルはめ込みのフロントにならないことがわかる。

## 2.2 ルジャンドル曲線に沿う枠と曲率

本節では、ルジャンドル曲線に沿う枠を構成し、フレネの公式の類似物を導く。更に、そこから正則曲線における曲率に対応する量を取り出す。

ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  を考える。正則曲線の場合は単位接ベクトル  $t$  を基準にし、それを半時計回りに  $\pi/2$  回転させて単位法ベクトル  $n$  を定義し、枠を構成した。ルジャンドル曲線のフロントアルの場合は、一般に特異点を持つので、単位接ベクトル  $t$  は定義されない。しかし、単位法ベクトル  $\nu$  は常に大域的に定義されている。そこで、ルジャンドル曲線のフロントアルに対しては、まず単位法ベクトル  $\nu$  を基準にし、それを反時計回りに  $\pi/2$  回転させて、枠を構成する。つまり、 $\mu : I \rightarrow S^1$  を  $\mu(t) = J(\nu(t))$  と定義し、枠  $(\nu, \mu)$  を考える。これを、ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu)$  に沿う枠と呼ぶ。

さて、正則曲線の場合と同様に、この枠の動き方を調べるために、微分  $(\dot{\nu}, \dot{\mu})$  を考察する。 $\nu \cdot \nu \equiv 1$ ,  $\nu \cdot \mu \equiv 0$  であることから、次の公式が従う：

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\ell(t) \\ \ell(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}$$

ここで、 $\ell$  はある実数値関数である。更に、関数  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  を、 $\dot{\gamma}(t) = \beta(t)\mu(t)$  を満たす関数として定義する ( $\nu$  が  $\dot{\gamma}$  と直交することから、このような  $\beta$  が必ず存在することがわかる)。これら二つの関数の組  $(\ell, \beta)$  をルジャンドル曲線の曲率と呼ぶ。

ルジャンドル曲線の曲率という名前の通り、二つの関数  $\ell$  と  $\beta$  の組が、正則曲線の曲率  $\kappa$  に対応するものであり、これがルジャンドル曲線の微分幾何学にとって重要な量となることが、次の定理によってわかる。

定理 2.7 (一意性定理).  $(\gamma, \nu)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  をルジャンドル曲線とし、それぞれの曲率  $\kappa$  と  $\tilde{\kappa}$  が一致するとする。このとき、 $(\gamma, \nu)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu})$  は回転と平行移動で移りあう。

ここでの「回転と平行移動で移りあう」の意味は少し注意を要するが、その説明は後回しにして、先に存在性定理について述べておく。

定理 2.8 (存在性定理). 任意の  $C^\infty$  関数の組  $(\ell, \beta) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して、曲率が  $(\ell, \beta)$  になるようなルジャンドル曲線  $I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  が存在する。

これらの定理は、正則曲線の曲率に対する存在性定理と一意性定理の、ルジャンドル曲線版に相当するものである。

さて、先程述べた「回転と平行移動」に関する注意であるが、実はルジャンドル曲線の曲率はパラメータのとり方に依存する。従って、ルジャンドル曲線の曲率を考えるときは、常にパラメータのとり方を意識しなければならない。従って、回転と平行移動についても、パラメータを固定して考えることとなる。つまり

定義 2.9. ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  が、回転と平行移動で移りあうとは、ある  $\mathbb{R}^2$  の回転  $A$  と平行移動  $b$  が存在して、 $\tilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) + b$  かつ  $\tilde{\nu}(t) = A(\nu(t))$  が成り立つことである。

ルジャンドル曲線の曲率の定義より、次のことがわかる。

命題 2.10.  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  をルジャンドル曲線とし、 $(\ell, \beta)$  をその曲率とする。このとき、次が成立する。

- (1)  $t \in I$  がフロンタル  $\gamma$  の特異点であるためには、 $\beta(t) = 0$  が必要十分である。
- (2)  $t \in I$  がルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu)$  の特異点であるためには、 $(\ell, \beta) = (0, 0)$  が必要十分である。

ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu)$  を考える。このとき、 $\gamma$  から特異点を除いた曲線は、正則曲線とみなせる。この曲線に対して正則曲線としての曲率と、ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu)$  としての曲率を考えることが出来るが、両者には次の関係がある。

命題 2.11.  $\ell(t) = \kappa(t)|\beta(t)|$

ルジャンドル曲線の曲率は、ルジャンドル曲線及びそのフロンタルの微分幾何学を展開する上で、非常に有効な道具となる。ルジャンドル曲線同士の接触を曲率を用いて計ることができたり、フロントのジグザグ数（マスロフ指数）と曲率の関係性が明らかになっている [1]。また、著者らによる一連の論文 [2, 3, 4] において、ルジャンドル曲線の曲率を用いた縮閉線と伸開線の研究も行われている。その他にも、ルジャンドル曲線の曲率に関する応用はまだまだ考えられると思うが、本稿では、[5] において示した、ルジャンドル曲線の曲率による凸性の特徴付について紹介したいと思う。

その前に、いくつかの具体的なルジャンドル曲線を通して、曲率の計算例をみておこう。

### 2.3 曲率の計算例

例 2.12.  $(\gamma, \nu) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  を次のように定義する（図 1 の左参照）。

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \nu(t) = (\sin t, \cos t)$$

このとき、 $(\gamma, \nu)$  はルジャンドルはめ込みになる。直接計算により、

$$\begin{aligned} \mu(t) &= (-\cos t, \sin t) \\ \dot{\gamma}(t) &= (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t), \\ \dot{\nu}(t) &= (\cos t, -\sin t) \end{aligned}$$

がわかる。従って、

$$\ell(t) = -1, \beta(t) = 3 \cos t \sin t.$$

を得る。

例 2.13.  $(\gamma, \nu) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  を次のように定義する（図 1 の中央参照）。

$$\gamma(t) = \left( \frac{1}{3} \cos^3 t, \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right), \nu(t) = (\cos t, \sin t).$$

このとき、 $(\gamma, \nu)$  はルジャンドルはめ込みになる。直接計算により、

$$\begin{aligned} \mu(t) &= (-\sin t, \cos t), \\ \dot{\gamma}(t) &= (\cos^2 t \sin t, \cos t - \sin^2 t \cos t), \\ \dot{\nu}(t) &= (-\sin t, \cos t) \end{aligned}$$

がわかる。従って、 $\ell(t) = 1, \beta(t) = \cos^2 t$  を得る。

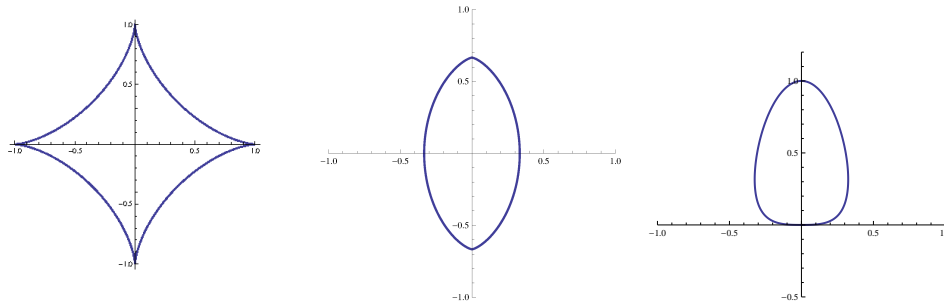


図 1: 例 2.12、例 2.13 と例 2.14 のフロントル

例 2.14.  $(\gamma, \nu) : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  を次のように定義する (図 1 の右参照)。

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (\cos t \sin^3 t, \sin^8 t), \\ \nu(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(8 \sin^5 t \cos t)^2 + (3 - 4 \sin^2 t)^2}} (-8 \sin^5 \cos t, 4 \sin^3 t - 3).\end{aligned}$$

このとき、 $(\gamma, \nu)$  はルジャンドル曲線になる。直接計算により、

$$\begin{aligned}\ell(t) &= \frac{8 \sin^4 t (16 \sin^4 t - 30 \sin^2 t + 15)}{\sqrt{(8 \sin^5 t \cos t)^2 + (3 - 4 \sin^2 t)^2}}, \\ \beta(t) &= -\sin^2 t \sqrt{(8 \sin^5 t \cos t)^2 + (3 - 4 \sin^2 t)^2}.\end{aligned}$$

となることがわかる。

例 2.15.  $n, m, k \in \mathbb{N}$  を  $m = n + k$  なる自然数とする。  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  を次で定義する。

$$\gamma(t) = \left( \frac{1}{n} t^n, \frac{1}{m} t^m \right), \quad \nu(t) = \frac{1}{\sqrt{t^{2k} + 1}} (-t^k, 1).$$

$(\gamma, \nu)$  はルジャンドル曲線であり、特に  $n = 1$  または  $k = 1$  の場合はルジャンドルはめ込みになることが命題 2.10(2) よりわかる。このフロントル  $\gamma$  を  $(n, m)$  型のカスプと呼ぶ。この  $(\gamma, \nu)$  に対して  $\mu$  を計算すると、 $\mu(t) = (1/\sqrt{t^{2k} + 1})(-1, -t^k)$  となる。従って

$$\ell(t) = \frac{kt^{k-1}}{t^{2k} + 1}, \quad \beta(t) = -t^{n-1} \sqrt{t^{2k} + 1}.$$

を得る。

最後に、正則曲線をルジャンドル曲線のフロントとして考えた場合の曲率の計算例を挙げておく。

例 2.16.  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を正則曲線とする。例 2.3 より、 $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  はルジャンドルはめ込みになる。 $\mu = J(n) = -\dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|$  であるから、フレネの公式と合わせることにより、 $(\ell(t), \beta(t)) = (\|\dot{\gamma}(t)\| \kappa(t), -\|\dot{\gamma}(t)\|)$  ができる。

### 3 ルジャンドル曲線の凸性の判定

本節では、ルジャンドル曲線の曲率を用いた、ルジャンドル曲線の凸性の判定を紹介する。まずは、本研究に至った動機について、大まかな解説をする。

正則な平面曲線が凸であるとは、どの点においてもその点における接線が曲線を分割しないときのことであった。凸性の判定方法として、正則曲線の曲率を用いた次の方法がある：

**定理 3.1.** 単純閉正則曲線が凸であるためには、その曲率  $\kappa$  に対して、任意の  $t \in I$  に対して  $\kappa(t) \geq 0$  あるいは、任意の  $t \in I$  に対して  $\kappa(t) \leq 0$  が成立することが必要十分である。

ここで、閉曲線が単純であるとは、始点と終点以外に自己交差を持たないことである。

さて、この定理を特異点を持つ曲線に対して考えてみる。正則ではない曲線として例 2.4 で紹介したアステロイド  $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$  を考える。この曲線は 4 つの特異点を持ち、 $\gamma$  の曲率  $\kappa$  は特異点以外では  $\kappa(t) = -2/(3 \sin 2t) \leq 0$  で与えられ、各特異点では  $-\infty$  に発散する。つまり、無限大まで込めれば、アステロイドの曲率  $\kappa$  の符号は一定である。さらに、アステロイドは自己交差を持たないので、単純な閉曲線である。従って、正則という条件を除けば、アステロイドは定理 3.1 の仮定を満たしている。然るに、この曲線の点  $t = 3\pi/4$  における接線を考えてみると、この接線は曲線を分割する (図 2 参照)。このような曲線は、(特異点を持つ曲線に対してはまだ凸性の概念を定義していないが) 凸と呼ぶには相応しくないであろう。

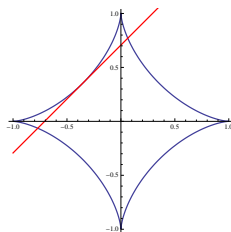


図 2: アステロイドとその接線

従って、正則ではない曲線に対して上記の定理を直接適用することができないことがわかる。

その一方で、前節の例 2.13 の場合を考えると、 $\kappa(t) = 1/\cos^2 t$  であり、 $\kappa$  は特異点で  $+\infty$  に発散する。つまり、無限大まで込めれば、曲率  $\kappa$  の符号は一定である。さらに、この曲線は単純閉曲線である。そして、図 1 からわかる通り、この曲線は凸と呼ぶに相応しい曲線である。

両者とも、 $\kappa$  の符号が一定で単純閉であるにも関わらず、この違いはどこから来ているのだろうか？ ここで、正則曲線の曲率  $\kappa$  と、ルジャンドル曲線のフロンタルとしての曲率 ( $\ell, \beta$ ) の関係式 (命題 2.16) を思い出してみる。この式を変形すると、 $\kappa(t) = \ell(t)/|\beta(t)|$  となり、 $\kappa$  の符号は  $\ell$  の符号のみにより決まることがわかる。つまり、 $\kappa$  の符号に注目している限り、 $\beta$  の符号の情報は反映されない。命題 2.10(1) からわかるように、 $\beta$  には特異点の情報が含まれており、大切な量である。そこで、 $\ell$  の符号だけでなく、 $\beta$  の符号も見ることにより、ルジャンドル曲線のフロンタルの凸性を判定できないだろうか、という期待が生まれる。実はそれが可能であるというのが、次の節の内容である。

### 3.1 ルジャンドル曲線のフロンタルの凸性の定義

まずは、先程直観的に説明したルジャンドル曲線のフロンタルの凸性についての、厳密な定義を与える。

**定義 3.2.** ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  のフロンタル  $\gamma$  に対して、 $H_t^+, H_t^- \subset \mathbb{R}^2$  を、それぞれ  $H_t^+ := \{x \in \mathbb{R}^2 | (x - \gamma(t)) \cdot \nu(t) \geq 0\}$ 、 $H_t^- := \{x \in \mathbb{R}^2 | (x - \gamma(t)) \cdot \nu(t) \leq 0\}$  と定義する。このとき、フロンタル  $\gamma$  が凸フロンタルであるとは、任意の  $t \in I$  に対して  $\gamma(I) \subset H_t^+$ 、または、任意の  $t \in I$  に対して  $\gamma(I) \subset H_t^-$  が成立することと定義する。

集合  $\ell_t := H_t^+ \cap H_t^-$  は点  $t$  での  $\gamma$  の接線と考えることができるので、この定義は、いずれの点の接線も曲線  $\gamma$  を分割しない、と読むことができる。特異点  $t_0$  での接線  $\ell_{t_0}$  は  $\mu(t_0)$  で張られる 1 次元線形部分空

間を  $\gamma(t_0)$  を通るように平行移動したものである。一般に、曲線  $\gamma$  が与えられたときに、 $(\gamma, \nu)$  がルジャンドル曲線となるような  $\nu$  は一意に定まらない。 $\gamma$  の特異点集合が区間を含む場合は、 $\gamma$  の凸性がルジャンドル曲線への持ち上げ方に依存する可能性があることに注意する。 $\gamma$  が正則曲線である場合は、ルジャンドル曲線への持ち上げ方に関わらず、 $t(t) = \pm\mu(t)$  であることから、正則曲線がフロントルとして凸であることと、通常の意味で凸であることは同値となる。

閉や単純などの用語については、概ね通常の定義と同様であるが、念の為にここで確認しておく。

**定義 3.3.** ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu)$  が  $C^n$  閉ルジャンドル曲線 (あるいは、 $C^n$  閉曲線) であるとは、 $I = [a, b]$  としたとき、任意の  $0 \leq k \leq n$  に対して  $(\gamma^{(k)}, \nu^{(k)})(a) = (\gamma^{(k)}, \nu^{(k)})(b)$  であることとする。 $C^1$  閉曲線のことを、単に閉ルジャンドル曲線 (あるいは、閉曲線) とよぶことにする。更に、フロントル  $\gamma$  が単純であるとは、 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  かつ  $t_1 \neq t_2$  であれば、 $t_1 = a$  かつ  $t_2 = b$  であることとする。

ここで、微分  $(\gamma^{(k)}, \nu^{(k)})(a)$  や  $(\gamma^{(k)}, \nu^{(k)})(b)$  は片側微分である。

以上の準備のもと、単純閉フロントルの判定法は以下のように述べることができる。

**定理 3.4.**  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  を  $\gamma$  が単純閉曲線となるような閉ルジャンドル曲線とする。更に、曲率を  $(\ell, \beta)$  としたとき、 $\ell$  と  $\beta$  の零点は離散的と仮定する。このとき、 $\gamma$  が凸フロントルであるためには、以下の (i) – (iv) のいずれかが成立することが、必要十分である：

- (i) 任意の  $t \in I$  に対して、 $\ell(t) \geq 0$  かつ  $\beta(t) \geq 0$ .
- (ii) 任意の  $t \in I$  に対して、 $\ell(t) \geq 0$  かつ  $\beta(t) \leq 0$ .
- (iii) 任意の  $t \in I$  に対して、 $\ell(t) \leq 0$  かつ  $\beta(t) \geq 0$ .
- (iv) 任意の  $t \in I$  に対して、 $\ell(t) \leq 0$  かつ  $\beta(t) \leq 0$ .

この定理より、 $\ell$  の符号だけでなく、 $\beta$  の符号を見ることにより、ルジャンドル曲線のフロントルの凸性を判定できることがわかる。なお、定理の中の  $\beta$  の零点が離散的という条件は、 $\gamma$  が単純という仮定より自動的に満たされる。 $\ell$  が離散的という仮定が外せるかどうかはわかっていない。

最後に、例 2.12, 2.13 に対して、定理 3.4 を用いた凸性の判定を確かめてみよう。

**例 3.5.** 例 2.12 のルジャンドル曲線のフロントルを考える。このルジャンドル曲線の曲率は  $\ell(t) = -1$ ,  $\beta(t) = 3 \cos t \sin t$  であった。従って、 $\beta$  の符号は  $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  の周りで変化する。よって、このフロントルは凸ではない。

**例 3.6.** 例 2.13 のルジャンドル曲線のフロントルを考える。このルジャンドル曲線の曲率は  $\ell(t) = 1$ ,  $\beta(t) = \cos^2 t$  であった。従って、 $\ell$ ,  $\beta$  ともに符号は一定 (定理の (iv) の場合) である。よって、このフロントルは凸である。

**例 3.7.** 例 2.14 のルジャンドル曲線のフロントルを考える。このルジャンドル曲線の曲率は

$$\ell(t) = \frac{8 \sin^4 t (16 \sin^4 t - 30 \sin^2 t + 15)}{\sqrt{(8 \sin^5 t \cos t)^2 + (3 - 4 \sin^2 t)^2}},$$

$$\beta(t) = -\sin^2 t \sqrt{(8 \sin^5 t \cos t)^2 + (3 - 4 \sin^2 t)^2}.$$

であった。従って、 $\ell$ ,  $\beta$  ともに符号は一定 (定理の (ii) の場合) である。よって、このフロントルは凸である。

## 参考文献

- [1] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Existence and uniqueness for Legendre curves*, Journal of Geometry **104**(2) (2013) 297-307.
- [2] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Evolute of fronts in the Euclidean plane* Journal of Singularities **10** (2014) 92-107,
- [3] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Involute of fronts in the Euclidean plane*, preprint, (Hokkaido University Preprint Series in Mathematics No. 1045)
- [4] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Evolute and involutes of frontals in the Euclidean plane* Demonstratio Mathematica, to appear.
- [5] T. Fukunaga and M. Takahashi, *On convexity of simple closed frontals*, in preparation.
- [6] A. Gray, E. Abbena and S. Salamon, *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica. Third edition.* Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, (2006).
- [7] 梅原雅顕, 特異点を持つ曲線と曲面の幾何学, Seminar on mathematical sciences No.38