Cheeger 等周定数と p-Laplacian と Gromov-Hausdorff 収束

本多正平（九州大学 数理学研究院）

1 イントロダクション

本稿は談話会でお話させていただいた内容のまとめ $+\alpha$ である．そこで紹介した主定理をもう一度正確に述べるために，いくつか言葉を準備する．タイトルからもおわかりになる通り，必要な言葉は次の三つである：

- Gromov-Hausdorff 収束
- (p-)Laplacian
- Cheeger 等周定数

それではそれぞれを以下に説明したい.

2 Gromov-Hausdorff 収束

Gromov は昔（正確な日付がわからずすみません），コンパクトな距離空間の間の距離，すなわち今日では Gromov-Hausdorff 距離と呼ばれる距離を導入した [3]．ちなみに与えられた二つのコンパクト距離空間の間の Gromov-Hausdorff 距離が 0 であるとは，その二つが等長的であることを指す．更に Gromov はその距離に関するコンパクト性定理を与え，それが Riemann 多様体の Ricci 曲率と密接に関わることを見抜き，リーマン多様体の収束・崩壊理論を創始した.

その後，深谷はさらにそれらを測度付きで与え，Laplacian と Gromov-Hausdorff 収束の関係を初めて見抜いた [2].

次は以上が洗練された形の定義である (注：実際の講演では簡略化のために測度付きでは解説をしなかった)：

本研究は科学研究費若手研究（B) 24740046 の助成を受けたものである.

定義 2.1 (Gromov, 深谷 [3, 2]). X_i をコンパクト距離空間の列で，υ_i を X_i 上の Borel 確率測度とする ($i \le \infty$)．このとき，**組** (X_i, υ_i) **が** $(X_\infty, \upsilon_\infty)$ **に Gromov-Hausdorff 収束する**，とは Borel 可測な写像の列 $\phi_i : X_i \to X_\infty$ と，0 に収束する正の実数列 ϵ_i が存在して以下の 3 条件が成り立つことを言う：

1. (ϕ_i はおおむね距離を保つ) 任意の i と任意の $x_i, y_i \in X_i$ に対して $|d_{X_i}(x_i, y_i) - d_{X_\infty}(\phi_i(x_i), \phi_i(y_i))| < \epsilon_i$ が成り立つ．
2. (ϕ_i はおおむね全射である)$X_\infty = B_{\epsilon_i}(\phi_i(X_i))$ が任意の i で成り立つ．ここで $B_r(A)$ で A の r 近傍を表す．
3. (υ_i は υ_∞ に弱収束する)υ_i の ϕ_i による pushforward 測度，$(\phi_i)_*\upsilon_i$，が X_∞ 上で υ_∞ に弱収束する．

これによってコンパクト距離空間とその上の Borel 確率測度の組 (X, υ) の同型類からなる集合，$\mathcal{M}$，に位相を入れることができる．より正確には $\mathcal{M}$ には自然な，測度付き Gromov-Hausdorff 距離，とでもいうべき距離があって，その距離構造から定まる位相と上の定義が両立するというのが正確な主張であるが，その詳細についてはこれ以上立ち入らない．

先に述べたコンパクト性定理とは次である：

定理 2.2 (Gromov，深谷 [3, 2]). 自然数 n，実数 K，正の実数 d に対して，*Ricci* 曲率が $K(n-1)$ 以上，直径が d 以下の n 次元コンパクト *Riemann* 多様体 M と，その上の自然な *Riemann* 確率測度の組 $(M, \mathrm{vol}/\mathrm{vol}\, M)$ の同型類からなる集合を $\mathcal{M}(n, K, d)$ で表す．このとき，$\mathcal{M}(n, K, d)$ の $\mathcal{M}$ における閉包 $\overline{\mathcal{M}(n, K, d)}$ はコンパクトである．

これで Gromov-Hausdorff 収束の説明は終わりである．次は ($p-$)Laplacian，Cheeger 等周定数について解説しよう．

3 (p-)Laplacian と Cheeger 等周定数

深谷は [2] で次を予想した：

予想 3.1 (深谷 [2]). 各 $k \ge 1$ に対して，$\lambda_k : \overline{M(n, K, d)} \to (0, \infty]$ は連続である．ここで，λ_k は Laplacian の第 k 固有値を表し，それが無限大の値を取る時は一点とその上の Dirac 測度の組のときに限る．

この予想はいくつかの主張を含んでいる．

まず，各 $(X, \upsilon) \in \overline{M(n, K, d)}$ に対してその上の自然な Laplacian，Δ^υ，を定義しなくてはならない．更に，そのスペクトルが離散的であることを示さなくてはならない．最後に λ_k の連続性を示す．ここまでが予想である．

ちなみに深谷はこの予想を断面曲率の絶対値を抑えるというより強い状況で，部分的に解いて見せた．

この予想は提出されてからおおよそ十年後，Cheeger-Colding によって解かれた．すなわち：

定理 3.2 (Cheeger-Colding [1])**.** 予想 *3.1* は正しい．

彼らの証明は次のようにやる．まずはLaplacianの構成だが，それは $(X,\upsilon) \in \overline{M(n,K,d)}$ の正則性理論を作り上げ，それを使って自然な Dirichlet 形式を構成し，Dirichlet 形式の理論を用いて Laplacian を作る．そのスペクトラムの離散性は Poincaré 不等式の Gromov-Hausdorff 収束での振る舞いを調べることで与え，それにさらに技術的な手法を用いて λ_k の連続性を示す．

実はこの証明はかなり長い，しかし後で紹介する主結果を与えるときに鍵となる主張，Gromov-Hausdorff 版 Rellich コンパクト性定理，を用いると簡単な別証を与えることができる．このことについては [7, 8] を見ていただけたら幸いである（とは言ったものの，実はこの Gromov-Hausdorff 版 Rellich コンパクト性定理の証明自体もかなり長かったりする）．

上で述べた $(X,\upsilon) \in \overline{M(n,K,d)}$ の正則性に関する性質をいくつか紹介しよう．距離空間 X 上の Lipschitz 関数全体からなる空間を $LIP(X)$ と表すことにする．

定理 3.3 (Cheeger-Colding [1])**.** 一点ではない $(X,\upsilon) \in \overline{M(n,K,d)}$ を考える．このとき次が成り立つ．

1. *(*余接束の存在と *Rademacher* の定理の拡張*)* 余接束と呼ばれる位相空間 T^*X と，射影と呼ばれる *Borel* 可測写像 $T^*X \to X$ が存在して次が成り立つ：
   (a) $\upsilon(X \setminus \pi(T^*X)) = 0$.
   (b) 任意の $x \in \pi(T^*X)$ に対して $\pi^{-1}(x)$ は自然な内積 $\langle v, u\rangle$ を持つ n 次元以下のベクトル空間である．
   (c) X 上で定義された任意の *Lipschitz* 関数 f に対して，ある *Borel* 部分集合 $X_f \subset \pi(T^*X)$ と *Borel* 写像 $df : X_f \to T^*X$ *(*f の微分と呼ばれる*)* が存在し，次を満たす：
      i. $\upsilon(X \setminus X_f) = 0$.
      ii. $\pi \circ df = id$.
      iii. 任意の $x \in X_f$ に対して，$|df|(x) = Lipf(x) := \lim_{r\to 0}\sup_{B_r(x)\setminus\{x\}} |f(y) - f(x)|/d_X(x,y)$．ここに $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
2. *(Sobolev* 空間*)* 任意の $p \in (1,\infty)$ に対し $H^{1,p}(X)$ で $LIP(X)$ の次のノルムによる完備化とする：$||f||_{H^{1,p}} := (||f||^p_{L^p} + ||Lipf||^p_{L^p})^{1/p}$. このとき任意の $f \in H^{1,p}(X)$ に対して，切断 $df(x) \in T^*_xX$ がほとんど至る所の $x \in X$ で *well-defined* で，$||f||_{H^{1,p}} = (||f||^p_{L^p} + ||df||^p_{L^p})^{1/p}$ が成り立つ．

3. *(Laplacian)* $\mathcal{D}^2(\Delta^\upsilon, X)$ で次のような $f \in H^{1,2}(X)$ からなる集合を表す：ある $g \in L^2(X)$ が存在して，
$$\int_X \langle df, dh\rangle d\upsilon = \int_X \langle gh\rangle d\upsilon$$
が任意の $h \in H^{1,2}$ で成り立つ．このような g は f に対して一意的に定まるので $\Delta^\upsilon f$ と表す．

以上で Laplacian についての解説は終わりである．次に p-Laplacian について説明を与える．

M をコンパクト Riemann 多様体，$p \in (1, \infty)$ とする．M の p-Laplacian, $\Delta_{(p)}$，とは次の作用素のことであり，
$$\Delta_{(p)} f := -\mathrm{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f)$$
p-Laplacian の固有値 λ とは，
$$\Delta_{(p)} f = \lambda |f|^{p-2} f$$
となる非自明な f が弱解の意味で存在するときを言う．

変分法を用いて，p-Laplacian の正の第一固有値 $\lambda_{1,p}(M)$ については次の表示が知られている：

$$\lambda_{1,p}(M) = \inf_{f \in \mathrm{LIP}(M)} \frac{||\nabla f||^p_{L^p(M)}}{\inf_{c\in\mathbf{R}} ||f-c||^p_{L^p(M)}}. \tag{1}$$

2-Laplacian は通常の Laplacian と同じ，すなわち $\lambda_{1,2}(M) = \lambda_2(M)$ であることに注意してほしい．

そこで $(X, \upsilon) \in \overline{M(n, K, d)}$ に対しても，その p-Laplacian の第一固有値 $\lambda_{1,p}(X)$ を (1) の右辺を逆手にとって定義する．これで Riemann 多様体の極限空間にも p-Laplacian の第一固有値が定義できた．

最後に Cheeger 等周定数についての簡単な解説をしてこの章を終えたい．M を上と同様としたとき，M の Cheeger 等周定数 $h(M)$ は次で定義される：

$$h(M) := \inf_\Omega \frac{\mathrm{Area}\,\partial\Omega}{\mathrm{vol}\,\Omega}.$$

ここで下限は滑らかな境界を持つ M の開集合 Ω で $\mathrm{vol}\,\Omega \leq \mathrm{vol}\,M/2$ を満たすもの全体に渡ってとる．

Cheeger 等周定数は次のような関数的な表示を持つことが知られている [12]：

$$h(M) = \inf_{f \in \mathrm{LIP}(M)} \frac{||\nabla f||_{L^1(M)}}{\inf_{c\in\mathbf{R}} ||f-c||_{L^1(M)}} \tag{2}$$

そこで先と同様，$(X, \upsilon) \in \overline{M(n, K, d)}$ に対しても，その Cheeger 等周定数 $h(X)$ を (2) の右辺を逆手にとって定義する．

4　主結果

以上で主結果を述べる準備が整った．それは粗く言って第一固有値に関する定理3.2の非線形への一般化である．

$\overline{M(n,K,d)} \times [1,\infty]$ から $(0,\infty]$ への写像 F を次で定める：

$$F((X,\upsilon),p) := \begin{cases} 2(\operatorname{diam} X)^{-1} & (p=\infty), \\ (\lambda_{1,p}(X))^{1/p} & (1<p<\infty), \\ h(X) & (p=1). \end{cases}$$

ここで $\operatorname{diam} X$ で X の直径を表している．次の予想を述べる：

予想 4.1 (本多). F は連続である．

この予想の部分的な解決を与えるのが主結果であり，次のように述べられる：

定理 4.2. *[6]*

1. F は上半連続である．
2. F は $\overline{M(n,K,d)} \times (1,\infty]$ 上では連続である．
3. 任意の $(X,\upsilon) \in \overline{M(n,K,d)}$ に対して，F は $\{(X,\upsilon)\} \times [1,\infty]$ 上で連続である．

証明は次のようにする．まずGromov-Hausdorff収束の枠組みで L^p 収束の概念を作り，古典的に知られているRellich型のコンパクト性定理をその枠組みで証明する．それを用いると有限の p について上の主張が示せる．それにGrosjeanによる結果[4]の証明を組み合わせると p が無限大のときに関する主張が得られ，定理4.2の証明が完成する．

ここではこれ以上その詳細については触れないこととし，この定理から得られる応用を一つだけ次に述べて本稿の終わりとしたい（講演では述べることが出来なかった箇所である.）

5　応用

応用は次である：

定理 5.1. *[6] M をコンパクトRiemann多様体で，*

$$(\operatorname{diam} M)^2 \mathrm{Ric}_M \geq K(n-1)$$

を満たすものとする．このとき任意の $p \in (1,\infty)$ に対して

$$C_1(n,K)h(M) \leq (\lambda_{1,p}(M))^{1/p} \leq C_2(n,K)h(M)$$

が成り立つ．ここで，$C_i(n,K)$ は n と K にのみ依存するある正の定数である．

証明は，コンパクトな空間上定義された連続関数は最大値と最小値を持つ，というよく知られた基本的な事実に定理 4.2 を組み合わせるだけでできる．

定理 5.1 について少しコメントを与えよう．Ricci 曲率の下限と p-Laplacian の第一固有値の評価には多くの研究がある（例えば [9, 10, 11, 13, 14] を見てほしい）．それらの多くは p と Ricci 曲率の下限に依存する形で現れる．しかし，定理 5.1 を p-Laplacian の第一固有値の評価式とみると，これは p によらないものとなっており，そのような初めての不等式となっている．また，定理 5.1 を Cheeger 等周定数の評価式とみれば，これは新しい等周不等式を与えていることになる．

この定理から直ちに得られる次の系を紹介して本稿の終わりとしたい：

系 5.2. *[6] 定理 5.1 と同じ設定の下，*

$$C_1(n,K) \le \frac{(\lambda_{1,p}(M))^{1/p}}{(\lambda_{1,q}(M))^{1/q}} \le C_2(n,K)$$

が任意の $p,q \in (1,\infty)$ に対して成り立つ．

この系は $(\lambda_{1,p}(M))^{1/p}$ が本質的には p にはよらず，全て同じような値を与えることを意味している．実際この系から，ある p で $(\lambda_{1,p}(M))^{1/p}$ が大きい（or 小さい）とすると，全ての q で $(\lambda_{1,q}(M))^{1/q}$ も大きい（or 小さい）ことがわかる．

References

[1] J. Cheeger and T. H. Colding, On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, III, J. Differential Geom. 54 (2000), 37-74.

[2] K. Fukaya, Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of the laplace operator, Invent. Math. 87 (1987), 517-547.

[3] M. Gromov, Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces, Birkhauser Boston Inc, Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original [MR 85e:53051], With appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

[4] J.-F. Grosjean, p-Laplace operator and diameter of manifolds, Ann. Global Anal. Geom. 28 (2005), 257-270.

[5] S. Honda, Ricci curvature and L^p-convergence, arXiv:1212.2052, Crelle, to appear.

[6] S. Honda, Cheeger constant, p-Laplacian, and Gromov-Hausdorff convergence, arXiv:1310.0304.

[7] 本多正平 Ricci 曲率が有界な空間の構造，数学，to appear.

[8] S. Honda L^p-spectral gap and Gromov-Hausdorff convergence, Real and Complex Submanifolds Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 106, (2014), 371-378.

[9] S. Kawai and N. Nakauchi, The first eigenvalue of the p-Laplacian on a compact Riemannian manifold, Nonlinear Anal. 55 (2003), 33-46.

[10] A.-M. Matei, First eigenvalue for the p-Laplace operator, Nonlinear Anal. 39 (2000), 1051-1068.

[11] A.-M. Matei, Boundedness of the first eigenvalue of the p-Laplacian, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 2183-2192.

[12] E. Milman, On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration, Invent. Math. 177 (2009), 1-43.

[13] A. Naber and D. Valtorta, Sharp estimates on the first eigenvalue of the p-Laplacian with negative Ricci lower bound, Math. Z. 277 (2014), 867-891.

[14] D.Valtorta, Sharp estimate on the first eigenvalue of the p-Laplacian, Nonlinear Anal. 75 (2012), 4974-4994.