Weighted $L^p - L^q$ estimates of Stokes semigroup in some unbounded domain

久保　隆徹　(筑波大学 数理物質系 数学域)*

1. はじめに

本研究は小林孝行教授（大阪大学）との共同研究に基づく.

1.1. Navier-Stokes 方程式

次元 n は $n \geq 2$ とし，Ω を外部領域，すなわち次を満たす正定数 R_0 が存在する領域とする：

$$\Omega \backslash B_{R_0} = \mathbb{R}^n \backslash B_{R_0}. \tag{D}$$

ただし，$B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$ とした．この外部領域 Ω に対して，次の Navier-Stokes 方程式を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = f & \text{in } (0,\infty) \times \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \Omega, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(t,x) = 0, \quad u(t,x) = 0 & \text{on } (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = a(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{NS}$$

ここで $u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_n(t,x))$ と $\pi(t,x)$ は，非圧縮性流体の流速と圧力を表し，ともに未知量である．また，$a(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$ は初期流速，$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ は外力でありともに既知量である．

1.2. 研究の軌跡と本研究の動機

Navier-Stokes 方程式の研究の大きなテーマに

- 小さい初期値に対する時間大域解の一意存在と時間無限大での漸近挙動
- 定常問題の解 (定常解) の (漸近) 安定性

がある [1]．本研究の目的は，Navier-Stokes 方程式を重み付き L^p 空間で考察し，これらのテーマに対して１つの解答を与えることである．まずは，なぜ重み付き L^p 空間で Navier-Stokes 方程式を考えるべきかという考えに至ったか（あくまでも個人的な意見だが）研究の軌跡を踏まえながら説明しよう．

Navier-Stokes 方程式は今まで多くの研究者によって研究がなされてきた．しかし，未だに条件付きでしか時間大域解の一意存在性が示されていない．困難さの

* e-mail: tkubo@math.tsukuba.ac.jp

[1] 他にも，弱解に関する研究，回転する物体の周りを流れる流体の研究，自由境界問題など多くの研究テーマがある．最大正則性などを用いての研究も最近盛んに行われており，柴田-久保 [32] に詳しい解説がある．

理由の１つが圧力項である．それは，(NS) は圧力 π に関する時間発展方程式でないため速度場 u と同様に圧力項 π を扱うことが出来ないだけでない．$\nabla \cdot u = 0$ を用いて Navier-Stokes 方程式の第１式から π を消去すると微分積分方程式になり解析の困難さがはるかに増すからである．実際，Navier-Stokes 方程式の第１式に $\nabla\cdot$ を施せば，$\nabla \cdot u = 0$ より，

$$\Delta\pi = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\partial_j(u_i u_j)$$

を得，簡単のため，考える領域を $\mathbb{R}^n$ とすると，ラプラス方程式の基本解 $E(x,y)$ を用いて，

$$\pi(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\partial_j \int_{\mathbb{R}^n} E(x,y)(u_i u_j)(y)dy$$

と変形できる．これをもとの (NS) に代入すれば微分積分方程式となってしまうからである．この解析の難しさは大雑把に言えば，室蘭での流体の動きを知るために $\mathbb{R}^n$ 上での積分があるために地球の裏側での流体の動きも知らなければいけないということと同じことである．

この困難さを打破するために実解析的には次の Helmholtz 分解

$$L^p(\Omega) = L^p_\sigma(\Omega) \oplus G^p(\Omega)$$

がよく使われる．ただし，

$$\begin{aligned} L^p_\sigma(\Omega) &= \overline{\{u \mid u_j \in C_0^\infty(\Omega),\ \nabla \cdot u = 0\}}^{\|\cdot\|_{L^p}}, \\ G^p(\Omega) &= \{\nabla\pi \in L^p(\Omega) \mid \pi \in L^p_{loc}(\overline{\Omega})\} \end{aligned}$$

である（$n \geq 2, 1 < p < \infty$）．これにより速度場と圧力を分離して考えることができる．ただし，Helmholtz 分解は任意の領域に対して成り立つわけではなく，有界領域，全空間，半空間，外部領域，perturbed half-space[2]，aperture domain[3] など限られた領域でのみ示されている（[11],[12], [28]）．限られた領域ではあるが，Navier-Stokes 方程式の困難さの１つである圧力項を消去できるため実解析的にはよく使われている．この Helmholtz 分解が成り立つ領域においては，Navier-Stokes 方程式 (NS) の線形化方程式である Stokes 方程式に対する解作用素 (Stokes 半群) の $L^p - L^q$ 評価が示されている：

$$\|e^{-tA}f\|_{L^q} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_{L^p}, \tag{1.1}$$

$$\|\nabla e^{-tA}f\|_{L^q} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p}. \tag{1.2}$$

---

[2] Ω が perturbed half-space であるとは，Ω に対して次を満たす正定数 $R > 0$ が存在するときである：$\Omega \backslash B_R = \mathbb{R}^n_+ \backslash B_R$.

[3] Ω が aperture domain であるとは，Ω に対して次を満たす正定数 $R > 0$ が存在するときである：$\Omega \backslash B_R = (\mathbb{R}^n_+ \cup \mathbb{R}^n_-) \backslash B_R$．ただし $\mathbb{R}^n_\pm = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \pm x_n > 0\}$.

全空間 $\mathbb{R}^n$ においては Young の不等式と解の表現公式を用いて $1 \le p \le q \le \infty (p \neq \infty, q \neq 1)$ で (1.1)，(1.2) が示されている．半空間 $\mathbb{R}^n_+$ の場合も，Ukai [34], Borchers-Miyakawa [4] により全空間と同じ指数の条件で，(1.1), (1.2) が示されている．Ω が平行平板間の領域の場合は Abe-Shibata[1] により $1 < p \le q < \infty$ で (1.1), (1.2) が示されている．Ω が有界領域の場合は，Giga[16] により Stokes 作用素の分数べきを用いて $1 < p \le q < \infty$ に対して (1.1),(1.2) が示されている [4]．さらに，Ω が外部領域の場合は，$1 \le p \le q \le \infty$ $(p \neq \infty,\ q \neq 1)$ に対して (1.1) が成立し，$1 \le p \le q \le n$ $(q \neq 1)$ に対して (1.2) が成り立つことが示されている（Iwashita [19]，Chen [6]，Shibata[31]，Borchers-Varnhorn [5]，Dan-Shibata [7], [8], Dan-Kobayashi-Shibata [9], Maremonti-Solonnikov [27] を参照のこと）．他にも perturbed half-space や aperture domain でも，$1 \le p \le q \le \infty$ $(p \neq \infty,\ q \neq 1)$ に対して (1.1) が，$1 \le p \le q < \infty (q \neq 1)$ に対して (1.2) が示されている (Kubo-Shibata[26], Abels [2], Hishida[18], Kubo[23] を参照のこと）.

　また，$L^p - L^q$ 評価を基に縮小写像の原理を用いて小さい初期値に対する時間大域解の一意存在や次のような時間無限大での漸近挙動なども示されている：[5]

$$\|u(t)\|_{L^r} \le Ct^{-\frac{1}{2}+\frac{n}{2r}}\ (n \le r \le \infty), \quad \|\nabla u(t)\|_{L^n} \le Ct^{-\frac{1}{2}} \quad (t > 0). \tag{1.3}$$

これを 0 定常解の漸近安定性の立場から見れば，(1.3) は摂動の時間無限大での漸近レートを表していることに注意する.

一方，定常解の漸近安定性に関する研究も盛んに行われてきている．定常解の存在は $n \ge 3$ において外部領域や半空間などの限られた領域のみでしか示されていないのが現状である：Novotony-Padula [30], Borchers-Miyakawa [4]（外部領域），Galdi [15], Shibata-Kubo[32]（半空間）．ここでは外部領域の場合に限定して結果を紹介しよう．(NS) に対する定常問題に対して外力 f がある条件を満たせば，以下を満たす定常解の存在が示されている：

$$|u_s(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^{n-2}}, \quad |\nabla u_s(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^{n-1}}. \tag{1.4}$$

次に，定常解の安定性について考察を行う．定常解 (u_s, π_s) に摂動 $(w(t), \theta(t))$ を加えたものが (NS) の解であるとして，摂動 $(w(t), \theta(t))$ が満たすべき方程式を考える：

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + (u_s \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)u_s + (w \cdot \nabla)w + \nabla\theta = 0,\ \nabla \cdot w = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} = 0, \quad w(0,x) = w_0. \end{cases}$$

---

[4] 領域 Ω が有界領域または平行平板間の領域である場合は，指数関数的減衰を得ることもできる．
[5] 詳しくは，以下の文献を参照せよ：Giga-Miyakawa [17]（有界領域），Kato [20]（全空間），Ukai [34]，Kozono[21]（半空間），Iwashita [19]（外部領域），Abe-Shibata [1]（平行平板）．ただし，外部領域以外では $\nabla u(t)$ の L^p ノルムでの減衰評価も得られている．

この摂動方程式に対して，Kozono-Ogawa[25] は初期摂動 w_0 の L^n ノルム $\|w_0\|_{L^n}$ と $\|u_s\|_{L^n}+\|\nabla u_s\|_{L^{n/2}}$ が十分小さい時に，定常解 u_s が漸近安定であることを示す次の評価を得ている．

$$\|w(t)\|_{L^r} \le Ct^{-\frac{1}{2}+\frac{n}{2r}} \quad (n \le r < \infty). \tag{1.5}$$

同様に，Borchers-Miyakawa[4] は $\|w_0\|_{L^n}$ と $\||x|u_s\|_{L^\infty}$ が十分小さい時に，Kozono-Yamazaki[22] は $\|w_0\|_{L^n}$ と $\|u_s\|_{L^{n,\infty}}$ が十分小さい時に (1.5) を示している [6].

ここで，0 定常解の漸近レート (1.3) と比較をすると $\|\nabla w(t)\|_{L^n}$ や $\|w(t)\|_{L^\infty}$ の評価は得られていないことがわかる．これは，摂動方程式が変数係数の方程式であるにも関わらず，定数係数の方程式で使われていた手法を用いていたためである（と個人的には考えている）．そのため，変数係数に対する理論作りをすべきではないかと考えて本研究をスタートさせたのが出発点である．つまり，重み付き評価を用いて変数係数となっている定常解を重み関数として処理して議論できないかと考えて，重み付き空間で (NS) を考察したいというのがこの研究の動機である．

1.3. 既存の結果（Muckenhoupt class，重み付き L^p 空間)

定義 1.1 (Muckenhoupt class $\mathcal{A}_p$). $1<p<\infty$ とする．重み関数 $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ が *Muckenhoupt* クラス $\mathcal{A}_p$ であるとは，

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1/(p-1)}dx\right)^{p-1} < \infty$$

を満たすときを言う．ここで，sup は立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 上を動き，$|Q|$ は Q の *Lebesgue* 測度である．

Muckenhoupt クラス $\mathcal{A}_p$ の要素の例としては，$w(x)=|x|^\alpha$, $\langle x\rangle^\alpha := (1+|x|^2)^{\alpha/2}$ $(-n<\alpha<n(p-1))$，$w(x)=(1+|x_n|)^\alpha$ $(-1<\alpha<p-1)$ などが知られている．

重み関数 $w \in \mathcal{A}_p$ を用いて，次のように重み付き L^p 空間を定義する：

$$L^p_w(\Omega)=\left\{u \in L^1_{loc}(\overline{\Omega}) \mid \|u\|_{p,w}=\|uw^{1/p}\|_p=\left(\int_\Omega |u|^p w dx\right)^{1/p}<\infty\right\}.$$

同様にして， Sobolev 空間等についても次のように定義する：

$$W^{2,p}_w(\Omega)=\{u \in L^p_w(\Omega) \mid \nabla^\alpha u \in L^p_w(\Omega), |\alpha| \le 2\}.$$

重み付き L^p 空間 $L^p_w(\Omega)$ において (NS) を考察するのが本研究の目的である．(NS) の研究の第１段階は，1.2 節で紹介した通り Helmholtz 分解を示すことである：

定理 1.1 (Helmholtz 分解). $n \ge 2$, $1<p<\infty$, $w \in \mathcal{A}_p$ とする．

$$L^p_{w,\sigma}(\Omega)=\overline{\{u \mid u_j \in C_0^\infty(\Omega),\ \nabla\cdot u=0\}}^{\|\cdot\|_{L^p_w}},$$
$$G^p_w(\Omega)=\{\nabla\pi \in L^p_w(\Omega) \mid \pi \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})\}$$

とするとき，$L^p_w(\Omega)=L^p_{w,\sigma}(\Omega)\oplus G^p_w(\Omega)$ が成り立つ．

[6] $L^{n,\infty}(\Omega)$ はローレンツ空間

定理 1.1 は次により示されている：Farwig-Sohr[10]（全空間 $\mathbb{R}^n$，外部領域），Fröhlich[13]（半空間），Kobayashi-Kubo[24]（perturbed half-space）.

P を $L^p_w(\Omega)$ から $L^p_{w,\sigma}(\Omega)$ への Helmholtz 射影とするとき，Stokes 作用素 $A = -P\Delta$ は $L^p_{w,\sigma}(\Omega)$ 上の解析的半群 e^{-tA}(Stokes 半群) を生成することも示されている（[10]，[13]，[24]）.

2. 主結果 (Stokes 半群の重み付き $L^p - L^q$ 評価)

重み関数 $w(x)$ を $w(x) = \langle x\rangle^s$ の形のものに限定して考える.

定理 2.1 (外部領域での重み付き $L^p - L^q$ 評価). $n \geq 2$, $1 < p \leq q < \infty$ とする. また $-n/q < s' \leq s < n(1-1/p)$ とする. このとき，$a \in L^p_w(\Omega)$ に対して，次が成立する：$t > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\|\langle x\rangle^{s'} e^{-tA}Pa\|_{L^q(\Omega)} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(1+t)^{-\frac{s-s'}{2}}\|\langle x\rangle^s a\|_{L^p(\Omega)},\\
&\|\langle x\rangle^{s'}\nabla e^{-tA}Pa\|_{L^q(\Omega)}\\
&\qquad\qquad \leq C\left(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} + t^{-\frac{n}{2p}}(1+t)^{-\frac{s}{2}}\right)\|\langle x\rangle^s a\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

注 2.1. 重みがない場合の結果（*Iwashita [19]*，*Dan-Kobayashi-Shibata[9]*）：

$$\begin{aligned}
&\|e^{-tA}Pa\|_{L^q(\Omega)} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|a\|_{L^p(\Omega)},\\
&\|\nabla e^{-tA}Pa\|_{L^q(\Omega)} \leq C\left(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{n}{2p}}\right)\|a\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

と比較してみると重み $\langle x\rangle^s$ がつくことで，時間無限大での減衰のレートがよくなっていることがわかる.

注 2.2. 定理 *2.1* の主張で特筆すべきことをあげておく.

- 重み関数の指数に対する条件 $-n/q < s' \leq s < n(1-1/p)$ は $\langle x\rangle^s$ が *Muckenhoupt class* に属するための条件である.
- 負の重みや左右で異なる重みをつけられる.
- 証明を見ると分かるが，全空間のときは，

  $$\|\langle x\rangle^{s'}\nabla e^{-tA}Pa\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{s-s'}{2}}\|\langle x\rangle^s a\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

  なる評価が得られる. 外部領域との領域の違いはここに現れる.

3. 証明の概略

3.1. 鍵となる 2 つの評価

定理 2.1 の証明の基盤にあるのは cut-off テクニックである. このテクニックは『外部領域の解を全空間の解と有界領域の解の足し合わせで表そう』というのが基本的な考え方である. そのために有用な 2 つの評価を紹介する：

補題 3.1 (局所減衰定理). $n \geq 2,\ 1 < p < \infty$ とし，R_0 を (D) を満たす正定数とする．このとき，$R > R_0$ に対して次を満たす正定数 $C_{p,R}$ が存在する：

$$\begin{aligned} &\|\partial_t^m e^{-tA} a\|_{W_p^2(\Omega_R)} \leq C_{p,R} t^{-n/2-m} \|a\|_{L^p(\Omega)}, && n \geq 3, \\ &\|\partial_t^m e^{-tA} a\|_{W_p^2(\Omega_R)} \leq C_{p,R} t^{-1-m} (\log t)^{-2} \|a\|_{L^p(\Omega)}, && n = 2. \end{aligned}$$

ただし，$t \geq 1$,$a \in L^p_{\sigma,R}(\Omega) = \{f \in L^p_\sigma(\Omega) \mid \mathrm{supp} f \subset B_R\}, \Omega_R = \Omega \cap B_R$.

補題 3.2 ($\mathbb{R}^n$ における重み付き $L^p - L^q$ 評価). $n \geq 2$,$1 < p \leq q < \infty$ とする．このとき，$a \in L^p_w(\mathbb{R}^n),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ，$k \in \mathbb{N}_0,\ t > 0$ に対して，次が成り立つ：

- $-n/q < s' \leq s < n(1-1/p)$ に対して，

$$\|\langle x\rangle^{s'} \partial_t^k \nabla^\alpha e^{-tA} Pa\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}-k}(1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \|\langle x\rangle^s a\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

- $s' \leq s \leq 0$ に対して，

$$\|\langle x\rangle^{s'} \partial_t^k \nabla^\alpha e^{-tA} Pa\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n}{2p}-\frac{|\alpha|}{2}-k}(1+t)^{-\frac{s}{2}} \|\langle x\rangle^s a\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

補題3.1は有界領域Ω_Rでの評価であり，$n \geq 3$のときにDan-Kobayashi-Shibata [9] により，$n = 2$のときに，Dan-Shibata[7] により示されている．

補題3.2は全空間$\mathbb{R}^n$での評価であり，Youngの不等式と次の評価(Murata [29]) により導かれる：

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} \langle y\rangle^{-2r} dy \leq M(1+t)^{-r}, \qquad 0 \leq r < n/2.$$

3.2. 主定理の証明の概略

$0 < t < 2$ の場合については，次のレゾルベント評価

$$|\lambda| \|u\|_{L^p_w(\Omega)} + |\lambda|^{1/2} \|\nabla u\|_{L^p_w(\Omega)} + \|\nabla^2 u\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p_w(\Omega)}$$

を用いて，

$$\|u\|_{L^p_w} \leq C\|f\|_{L^p_w}, \quad \|\nabla u\|_{L^p_w} \leq Ct^{-1/2}\|f\|_{L^p_w}, \quad \|\nabla^2 u\|_{L^p_w} \leq Ct^{-1}\|f\|_{L^p_w}$$

を示すことができ，実補間と組み合わせることで示される．そのため，ここでは，$t \geq 2$について焦点を当てて証明の概略を紹介する．

補題3.1, 3.2を基に外部領域のStokes半群のΩ_Rでの評価から示そう．

補題 3.3. $1 < q < \infty$,$-\frac{n}{q} < s' \leq s < n(1-\frac{1}{q})$ とする．このとき，次が成り立つ：

$$\|\langle x\rangle^{s'} u\|_{L^q(\Omega_{R+2})} \leq Ct^{-\frac{n}{2q}-\frac{s}{2}} \|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}, \qquad t \geq 2. \tag{3.1}$$

Proof. cut-off関数 $\varphi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;[0,1])$ を以下で定義する:

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| \le R+1, \\ 0 & \text{for } |x| \ge R+2. \end{cases}$$

$v_0 = (1-\varphi_R)u_0 + \mathbb{B}[(\nabla\varphi_R)\cdot u_0]$ [7] とおくと,

$$\|\langle x\rangle^s v_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}, \qquad \left(1<q<\infty, -\frac{n}{q}<s<n(1-\frac{1}{q})\right)$$

が成り立つ．また，$\widetilde{v}(t,x) = e^{-tA_{\mathbb{R}^n}}v_0$ とおくと

$$\widetilde{v} \in C^\infty((0,\infty), D(A_{\mathbb{R}^n})) \cap C^0([0,\infty); L^q_{w,\sigma}(\mathbb{R}^n))$$

であり，$\partial_t\widetilde{v} - \Delta\widetilde{v} = 0$ in $\mathbb{R}^n$ ，$\widetilde{v}|_{t=0} = v_0$ を満たす．また，$\widetilde{v} = e^{-tA_{\mathbb{R}^n}}v_0$ であるから，補題3.2より

$$\|\langle x\rangle^{s'}\partial_t^k\nabla^\alpha\widetilde{v}\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le Ct^{-\frac{n}{2p}-\frac{|\alpha|}{2}-k}(1+t)^{-\frac{s}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成立する． 次に，$v = (1-\varphi_R)\widetilde{v} + \mathbb{B}[(\nabla\varphi_R)\cdot\widetilde{v}]$ とおくと v は

$$\partial_t v - \Delta v = F \quad \text{in } \Omega, \quad v|_{t=0} = v_0$$

を満たす．ただし，

$$F = 2(\Delta\varphi_R)\cdot\nabla\widetilde{v} + (\Delta\varphi_R)\widetilde{v} + \mathbb{B}[(\nabla\varphi_R)\cdot\Delta\widetilde{v}] - \Delta\mathbb{B}[(\nabla\varphi_R)\cdot\widetilde{v}].$$

ここで，cut-off関数の性質から supp $F \subset D_{R+1} = \{x \mid R+1 < |x| < R+2\}$ となることに注意すると，$k=0,1$, $1<p\le q<\infty$，$-\frac{n}{q} < s' \le s < n(1-\frac{1}{p})$ に対して，

$$\|\langle x\rangle^{s'}\partial_t^k F(\cdot,t)\|_{L^q(\Omega)} \le Ct^{-\frac{n}{2p}-k}(1+t)^{-\frac{s}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)} \quad (t\ge 1) \tag{3.2}$$

などが示せる． 実際，$\widetilde{v}(x,t)$ の評価を用いて以下のように示せる：

$$\|\langle x\rangle^{s'}F(\cdot,t)\|_{L^q(\Omega)} \le C\|\widetilde{v}\|_{W^1_q(\Omega_R)} \le C\|\widetilde{v}\|_{W^1_\infty(\mathbb{R}^n)} \le Ct^{-\frac{n}{2p}-\frac{s}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}.$$

同様にして，$v = (1-\varphi_R)\widetilde{v} + \mathbb{B}[(\nabla\varphi_R)\cdot\widetilde{v}]$ に対しても次の評価を示せる：

$$\|\langle x\rangle^{s'}v(x,t)\|_{L^q(\Omega)} \le Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{s-s'}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}, \tag{3.3}$$

$$\|\langle x\rangle^{s'}v(x,t)\|_{L^q(\Omega_{R+2})} \le Ct^{-\frac{n}{2q}-\frac{s}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}. \tag{3.4}$$

---

[7] $\mathbb{B}[\cdot]$ はBogvskiĭ作用素であり，$\nabla\cdot v_0 = 0$ を成り立たせるようにするためのものである．詳しくは，[15] 3章，[3] 参照のこと．具体的には，次で与えられる：$1<p<\infty$，自然数 N に対して，次を満たす $\dot{W}^{N,p}(D_R)$ から $\dot{W}^{N+1,p}(\mathbb{R}^n)^n$ への線形作用素 $\mathbb{B}[\cdot]$ が存在する：

$$\nabla\cdot\mathbb{B}[f] = f, \quad \|\mathbb{B}[f]\|_{W^{N+1,p}(\mathbb{R}^n)^n} \le C\|f\|_{W^{N,p}(D_R)}, \quad \mathrm{supp}\mathbb{B}[f] \subset \overline{D_R}.$$

ただし，$f \in \dot{W}^{N,p}(D_R) = \{f \in W^{N,p}(D_R) \mid \partial_x^\alpha f|_{\partial D_R} = 0 \text{ for } |\alpha| \le N-1, \int_{D_R} f dx = 0\}$，$D_R = \{x \mid R < |x| < R+1\}$.

ただし，$1 < p \le q < \infty$，$-\frac{n}{q} < s' \le s < n(1-\frac{1}{p})$ である．

補題3.3 を証明するためには，v が (3.4) を満たすので $w = u - v$ の評価をすれば十分である．そこで (w,π) について考える．(w,π) は次を満たす：

$$\partial_t w - \Delta w + \nabla \pi = -F, \quad \nabla \cdot w = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad w(0) = w_0.$$

ただし，$w_0 = \varphi_R u_0 - \mathbb{B}[(\nabla\varphi_R)\cdot u_0]$ である．Duhamel の原理から，$w(t)$ は次のように表せる：

$$w(t) = e^{-tA_\Omega} w_0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)A_\Omega} P_\Omega F(\tau) d\tau.$$

そこで，$1 < q < \infty$，$-\frac{n}{q} < s' \le s < n(1-\frac{1}{q})$ に対して $w(t)$ に対して次を示そう：

$$\|\langle x\rangle^{s'} w\|_{L_q(\Omega_{R+2})} \le Ct^{-\frac{n}{2q}-\frac{s}{2}} \|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)} \tag{3.5}$$

$w_1 = e^{-tA_\Omega} w_0$ とおくと，局所減衰定理（補題3.1）から

$$\|\langle x\rangle^{s'} w_1\|_{L^q(\Omega_{R+2})} \le Ct^{-\frac{n}{2}} \|w_0\|_{L^q(\Omega_{R+2})} \le Ct^{-\frac{n}{2}} \|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}.$$

次に，$w_2 = w - w_1$ を評価するために積分区間を 3 つに分ける：[8]

$$\begin{aligned} w_2 &= \int_0^1 e^{-(t-\tau)A} PF(\tau) d\tau + \int_1^{t-1} e^{-(t-\tau)A} PF(\tau) d\tau + \int_{t-1}^t e^{-(t-\tau)A} PF(\tau) d\tau \\ &= w_2^1 + w_2^2 + w_2^3. \end{aligned}$$

w_2^1 については，局所減衰定理（補題3.1）と $\|\langle x\rangle^s F(t)\|_{L^q(\Omega)} \le Ct^{-\frac{1}{2}} \|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}$ から

$$\|\langle x\rangle^{s'} w_2^1\|_{L^q(\Omega_{R+1})} \le C \int_0^1 (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau \ \|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)} \le Ct^{-\frac{n}{2}} \|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}$$

が導ける．ここで，$-\frac{n}{2} < -\frac{n}{2q} - \frac{s}{2}$ に注意すれば,$w_2^1 \le Ct^{-\frac{n}{2q}-\frac{s}{2}} \|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}$ を得る．同様に w_2^2，w_2^3 についても評価できる．よって (3.5) が示された．よって，補題3.3 が示された． □

次に，$\Omega^R = \Omega \backslash B_R$ での評価を行う．

補題 3.4. $1 < p \le q < \infty$，$n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$ とする．$-\frac{n}{q} < s' \le s < n(1-\frac{1}{p})$ に対して，次が成り立つ：

$$\|\langle x\rangle^{s'} u\|_{L^q(\Omega^{R+1})} \le Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)} \qquad (t \ge 2).$$

[8] 記号を簡単にするために，混乱がない場合は A_Ω や P_Ω の添え字を省略する．

Proof. 補題3.3で定義されたvに対する評価は(3.3), (3.4)によりすでにできているので，ここでも$w = u - v$について評価をすれば十分．そこで，$z(x,t) = \varphi^R w(x,t) - \mathbb{B}[(\nabla\varphi^R)\cdot w]$ $(\varphi^R = 1 - \varphi_{R+1})$とおくと

$$\partial_t z - \Delta z + \nabla(\varphi^R \pi) = G,\ \mathrm{div}\ z = 0 \quad \text{in}\ \ \mathbb{R}^n, \qquad z|_{t=0} = 0 \tag{3.6}$$

が成立する．ただし，

$$\begin{aligned} G = &-2(\nabla\varphi^R)\cdot\nabla w - (\Delta\varphi^R)w \\ &+ \Delta\mathbb{B}[(\nabla\varphi^R)\cdot w] - \mathbb{B}[(\nabla\varphi^R)\Delta w] + (\nabla\varphi^R)\pi + \mathbb{B}[(\nabla\varphi^R)\cdot\nabla\pi] \end{aligned} \tag{3.7}$$

である．このとき，Gに対する次の評価を示すことができる．

$$\|\langle x\rangle^{s'} G(t)\|_{L^\delta(\mathbb{R}^n)} + \|\langle x\rangle^{s'} G(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le Ct^{-\frac{n}{2p}-\frac{s}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.8}$$

ただし，$1 < \delta < p$．方程式(3.6)にHelmholtz射影$P_{\mathbb{R}^n}$を施すと

$$\partial_t z + A_{\mathbb{R}^n} z = P_{\mathbb{R}^n} G, \qquad z(0) = 0.$$

が得られ，Duhamelの原理を用いると$z(t)$は

$$z(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)A} PG(\tau)d\tau$$

とかける．ここで，Gの評価を用いることで次が示せる：

$$\|\langle x\rangle^{s'} z(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(1+t)^{-\frac{s-s'}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.9}$$

実際,

$$z(t) = \left[\int_0^1 + \int_1^{t-1} + \int_{t-1}^t\right] e^{-(t-\tau)A} PG(\tau)d\tau = z_1 + z_2 + z_3$$

とおくと，z_1, z_2はGの評価を用いて示せる．そこで，z_3を評価しよう．$n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$より

$$\begin{aligned} \|\langle x\rangle^{s'} z_3\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\le \int_{t-1}^t \|\langle x\rangle^{s'} e^{-(t-\tau)A} PG(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} d\tau \\ &\le C\int_{t-1}^t \|\langle x\rangle^{s'} e^{-(t-\tau)A} PG(\tau)\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n)} d\tau \\ &\le C\int_{t-1}^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{n}{2p}-\frac{s}{2}} d\tau \|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le Ct^{-\frac{n}{2p}-\frac{s}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(1+t)^{-\frac{s-s'}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

よって,

$$\|\langle x\rangle^{s'} z(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(1+t)^{-\frac{s-s'}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}$$

が示される．Ω^{R+1}上では$z(t) = w(t)$となることから，補題3.4が示された． □

定理 *2.1* の証明の概略．最後に２つの補題を用いて重み付き $L^p - L^q$ 評価を示そう．補題3.4から，$n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$，$t \geq 2$ に対して

$$\|\langle x\rangle^{s'} e^{-tA}u_0\|_{L^q(\Omega^{R+1})} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{s-s'}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}.$$

が成立する．一方，$e^{-tA}u_0$ の Ω_R での評価と Sobolev の埋蔵定理から

$$\begin{aligned}\|\langle x\rangle^{s'} e^{-tA}u_0\|_{L^q(\Omega_{R+2})} &\leq C\|e^{-tA}u_0\|_{L^q(\Omega_{R+2})} \leq C\|e^{-tA}u_0\|_{W^1_p(\Omega_{R+2})}\\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2p}}(1+t)^{-\frac{s}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

よって，$n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$，$t \geq 2$ に対して

$$\|\langle x\rangle^{s'} e^{-tA}u_0\|_{L^q(\Omega)} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{s-s'}{2}}\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立つ．指数の制限：$n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$ は半群の性質を用いて除くことができるので，Stokes 半群の重み付き $L^p - L^q$ 評価が示される．

次に，$\nabla e^{-tA}u_0$ に対する $L^p - L^q$ 評価を示そう．すなわち次を示す：

$$\|\langle x\rangle^{s'}\nabla e^{-tA}u_0\|_{L^q(\Omega)} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{s-s'}{2}}\max(t^{-\frac{1}{2}},\ t^{-\frac{n}{2q}-\frac{s'}{2}})\|\langle x\rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}. \quad (3.10)$$

上を示すために，以下の評価から示そう：$1 < p < \infty$ に対して

$$\|\langle x\rangle^{s'}\nabla z(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\max(t^{-\frac{1}{2}},\ t^{-\frac{n}{2p}-\frac{s'}{2}})\|\langle x\rangle^{s'} u_0\|_{L^p(\Omega)}. \quad (3.11)$$

ここで，$\nabla z(t)$ を３つに分ける：

$$\nabla z(t) \leq \left[\int_0^1 + \int_1^{t-1} + \int_{t-1}^t\right]\nabla e^{-(t-\tau)A}PG(\tau)d\tau = \nabla z^1 + \nabla z^2 + \nabla z^3.$$

ただし，$G(t)$ は (3.7) で与えられる．例えば，∇z^2 を $\mathbb{R}^n$ における $L^p - L^q$ 評価により 次のように示せる：

$$\begin{aligned}&\|\langle x\rangle^{s'}\nabla z^2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \int_1^{t-1}\|\langle x\rangle^{s'}\nabla e^{-(t-\tau)A}PG(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}d\tau\\ &\leq C\int_1^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{p})}(1+t-\tau)^{-\frac{s-s'}{2}}\|\langle x\rangle^s G(\tau)\|_{L^\delta(\mathbb{R}^n)}d\tau\\ &\leq C\int_1^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{p})-\frac{s-s'}{2}}\tau^{-\frac{n}{2p}-\frac{s'}{2}}d\tau\|\langle x\rangle^{s'} u_0\|_{L^p(\Omega)}\ (\delta < p)\\ &\leq Ct^{-\frac{1}{2}}\|\langle x\rangle^{s'} u_0\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

よって， (3.11) が示された.

(3.11) を用いて (3.10) を示す．$|x| \geq R+1$ では $z(x,t) = w(x,t)$ となるので，

$$\|\langle x\rangle^{s'} \nabla w(t)\|_{L^p(\Omega^{R+1})} \leq C \max(t^{-\frac{1}{2}},\ t^{-\frac{n}{2p}-\frac{s'}{2}}) \|\langle x\rangle^{s'} u_0\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立ち，∇v の評価 (3.4) と合わせて

$$\|\langle x\rangle^{s'} \nabla e^{-tA} u_0\|_{L^p(\Omega)} \leq C \max(t^{-\frac{1}{2}},\ t^{-\frac{n}{2p}-\frac{s'}{2}}) \|\langle x\rangle^{s'} u_0\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立つことが分かる．よって，半群の性質から

$$\begin{aligned}\|\langle x\rangle^{s'} \nabla e^{-tA} u_0\|_{L^q(\Omega)} &\leq C \max(t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\frac{n}{2p}-\frac{s'}{2}}) \|\langle x\rangle^{s'} e^{-tA/2} u_0\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \max(t^{-\frac{1}{2}},\ t^{-\frac{n}{2q}-\frac{s'}{2}}) \|\langle x\rangle^{s} u_0\|_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

となり，(3.10) が示される． □

4. Navier-Stokes 方程式への応用

最後に Stokes 半群の $L^p - L^q$ 評価の Navier-Stokes 方程式への応用について紹介しよう．簡単のため $f = 0$ とする．Navier-Stokes 方程式 (NS) に Helmholtz 射影 P を施すと

$$\partial_t u + Au + P[(u \cdot \nabla)u] = 0, \quad u(0) = a.$$

Duhamel の原理から $u(t)$ は次のように表せる：

$$u(t) = e^{-tA} a - \int_0^t e^{-(t-\tau)A} P[(u \cdot \nabla)u](\tau) d\tau. \tag{IE}$$

不動点定理と重み付き $L^p - L^q$ 評価を用いることで以下が示せる：

定理 4.1 (小さい初期値に対する時間大域解の存在定理). $n \geq 2$, $0 \leq s < n-1$ とする．このとき，次を満たす定数 $\delta = \delta(\Omega, n, s) > 0$ が存在する：もし，$a \in L^n_{w,\sigma}(\Omega)$ が $\|\langle x\rangle^s a\|_{L^n(\Omega)} \leq \delta$ であれば積分方程式 (IE) は一意な強解 $u(t)$ をもつ．さらに，次を満たす：

$$\begin{aligned}\|\langle x\rangle^{s'} u(t)\|_{L^q(\Omega)} &\leq C t^{-\frac{1}{2}+\frac{n}{2q}} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}}, \\ \|\langle x\rangle^{s'} \nabla u(t)\|_{L^q(\Omega)} &\leq C \left(t^{-1+\frac{n}{2q}} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{s}{2}} \right).\end{aligned}$$

ただし，$n \leq q < \infty$, $-\frac{n}{q} < s' \leq s$, $t > 0$.

5. Appendix

おまけとして，関連する事柄で最近わかったことを紹介する．

5.1. 斉次重み $|x|^s$ の場合

斉次重み関数 $|x|^s$ の場合について考える．Stokes 半群の $L^p - L^q$ 評価は以下のようになる．

定理 5.1 ($\mathbb{R}^n$ における重み付き $L^p - L^q$ 評価)**.** $n \geq 2$,$1 < p \leq q < \infty$,$-n/q < s' \leq s < n(1-1/p)$ とする．このとき，$a \in L^q_w(\mathbb{R}^n)$ に対して，次が成り立つ：

$$\||x|^{s'}\nabla^\alpha e^{-tA}Pa\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}}t^{-\frac{s-s'}{2}}\||x|^s a\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

ただし，$t > 0$, $|\alpha| = 0, 1$ である．

非斉次重み関数の場合と違うところは，両辺の重みの違いにより現れる減衰項 $t^{-(s-s')/2}$ である．また，この $L^p - L^q$ 評価を Navier-Stokes 方程式へ応用すると以下が得られる：

定理 5.2 (小さい初期値に対する時間大域解の存在定理)**.** $n \geq 2$，$0 \leq s < 1$．もし，$a \in L^{n/(1-s)}_{w,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ に対し $\||x|^s a\|_{L^{n/(1-s)}(\mathbb{R}^n)}$ が十分小さければ，(IE) は一意な強解 $u(t)$ をもつ．

注 5.1. 初期値が属する空間が通常の空間 $L^n_\sigma(\mathbb{R}^n)$ と異なる．この理由はスケール不変性の観点から初期値が属する空間が $L^{n/(1-s)}_{w,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ となるからである．

5.2. 非等方的重みの場合

非等方的な重みについても考えることが出来る．例えば，$x = (x', x_n)$ に対して，x' 方向と x_n 方向で別々の重みをつけた場合には次のような $L^p - L^q$ 評価を示すことが出来る：

定理 5.3 ($\mathbb{R}^n_+$ における重み付き $L^p - L^q$ 評価)**.** $n \geq 2$,$1 < p \leq q < \infty$ とし，

$$-(n-1)/q < s_1' \leq s_1 < (n-1)(1-1/p),\ -1/q < s_n' \leq s_n < 1-1/p$$

とする．このとき，$a \in L^q_w(\mathbb{R}^n_+)$ に対して，次が成り立つ：

$$\|\langle x'\rangle^{s_1'}\langle x_n\rangle^{s_n'}e^{-tA}Pa\|_{L^q} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}-k}(1+t)^{-\frac{s_1-s_1'}{2}-\frac{s_n-s_n'}{2}}\|\langle x'\rangle^{s_1}\langle x_n\rangle^{s_n}a\|_{L^p}.$$

これは，$\mathbb{R}^n$ での評価をやり直し，Ukai の表現公式を用いることで示せる．

参考文献

[1] T. Abe and Y. Shibata, *On a resolvent estimate of the Stokes equation on an infinite layer, Part 2 $\lambda = 0$ case,* Journal of Mathematical Fluid Mechanics, **5**(2003), 245–274.

[2] H. Abels, *L^q-L^r estimates for the non-stationary Stokes equations in an aperture domain*, Z. Anal. Anwendungen **21**(2002), 159–178.

[3] M. E. Bogovskiĭ, *Solution of the first boundary value problem for the equation of continuity of an incompressible medium*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **248**(1979), 1037-1040, English Transl.: Soviet Math. Dokl.**20**(1979), 1094-1098.

[4] W. Borchers and T. Miyakawa, *L^2 decay for the Navier-Stokes flow in halfspaces.* Math. Ann. **282**(1988), 139-155.

[5] W. Borchers and W. Varnhorn, *On the boundedness of the Stokes semigroup in two dimensional exterior domains,* Math.Z., **213**(1993), 275-299.

[6] Z. M. Chen, *Solutions of the stationary and nonstationary Navier-Stokes equations in exterior domains,* Pacific J.Math., **159**(1993),227-240.

[7] W. Dan and Y. Shibata, *On the L_q - L_r estimates of the Stokes semigroup in a two dimensional exterior domain*, J. Math. Soc. Japan **51**(1999), 181–207.

[8] W. Dan and Y. Shibata, *Remark on the L_q-L_∞ estimate of the Stokes semigroup in a 2-dimensional exterior domain*, Pacific J. Math. **189**(1999), 223–240.

[9] W. Dan, T. Kobayashi and Y. Shibata, *On the local energy decay approach to some fluid flow in exterior domain*, Recent Topics on Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid, 1–51, Lecture Notes Numer. Appl. Math. **16**, Kinokuniya, Tokyo, 1998.

[10] R. Farwig and H. Sohr, *Weighted L^q-theory for the Stokes resolvent in exterior domains*, J. Math. Sco. Japan, **49**(1997), No.2, 251-288.

[11] R. Farwig and H. Sohr, *Generalized resolvent estimates for the Stokes system in bounded and unbounded domains* , J. Math. Soc. Japan **46** No.4(1994), 607-643.

[12] R. Farwig and H. Sohr, *Helmholtz decomposition and Stokes resolvent system for aperture domains in L^q-space*, Analysis, **16**(1996), 1-26.

[13] A. Fröhlich, *Helmholtz decomposition of Weighted L^q spaces for Muckenhoupt Weights,* Ann. Univ. Ferrara-Sez. VII -Sc. Mat. Vol. XLVI (2000), 11-19.

[14] A. Fröhlich, *The Stokes operator in weighted L^q-spaces I: weighted estimates for the Stokes Resolvent Problem in a half-space*, J. Math. Fluid Mech. **5**(2003), 166-199.

[15] G. P. Galdi, An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Vol. I: Linear Steady Problems, Vol.II: Nonlinear Steady Problems, Springer Tracts in Natural Philosophy, **38, 39**, Springer-Verlag, New York (1994), 2nd edition(1998).

[16] Y. Giga, *Domains of fractional powers of the Stokes operator in L^r spaces,* Arch. Rational Mech. Anal. **89**(1985), 251–265.

[17] Y. Giga and T. Miyakawa, *Solutions in L^r of the Navier-Stokes initial value problem,* Arch. Rational Mech. Anal. **89**(1985), 267–281.

[18] T. Hishida, *The nonstationary Stokes and Navier-Stokes flows through an aperture.* Advances in Mathematical Fluid Mechanics(2004), 79-123.

[19] H. Iwashita, *L_q-L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L^q spaces*, Math. Ann. **285**(1989), 265-288.

[20] T. Kato, *Strong L^p-Solutions of the Navier-Stokes Equation in $\mathbb{R}^m$, with Applications to Weak Solutions.* Math. Z., **187**(1984), 471-480.

[21] H. Kozono, *Global L^n-solution and its decay property for the Navier-Stokes equations in half-space $\mathbb{R}^n_+$,* J. Differential Equations, **79**(1989), 79–88.

[22] H. Kozono and M. Yamazaki: *On a larger class of stable solutions to the Navier-Stokes equations in exterior domains*, Math. Z. **228**, (1998), 751-785.

[23] T. Kubo, *The Stokes and Navier-Stokes equations in an aperture domain,* J. Math. Soc. Japan, **59**, No.3(2007), 837-859.

[24] T. Kobayashi and T. Kubo, *Weighted $L^p - L^q$ estimates of the Stokes semigroup in some unbounded domains*, Tsukuba Journal of Mathematics, **37**(2013) 179-206.

[25] H. Kozono and T. Ogawa: *On Stability of Navier-Stokes Flows in Exterior Domains*, Arch. Rational. Mech. Anal. **128**(1994) 1-31.

[26] T. Kubo and Y. Shibata, *On the Stokes and Navier-Stokes equations in a perturbed half-space*, Advances in Differential Equations, Vol.10, No.6(2005), 695-720.

[27] P. Maremonti and V. A. Solonnikov, *On nonstationary Stokes problem in exterior domains*, Ann. Sc. Norm. Super Pisa, **24**(1997) ,395-449.

[28] T. Miyakawa, *The Helmholtz decomposition of vecter fields in some unbounded domains*, Math. J. Toyama Univ. **17**(1994), 115-149.

[29] M. Murata: *Large time asymptotics for fundamental solutions of diffusion equations*, Tohoku Math. J. **37**, (1985), 151-195.

[30] A. Novotny and M. Padula, *Note on decay of solutions of steady Navier-Stokes equations in 3-D exterior domains,* Differential and Integral Equations, **8** (1995), 1833-1842.

[31] Y. Shibata, *On an exterior initial boundary value problem for Navier-Stokes equations,* Quart. Appl. Math., **LVII**(1999),117-155.

[32] 柴田良弘・久保隆徹著,「非線形偏微分方程式」, 朝倉書店

[33] Y. Shibata and R. Shimada, *On a generalized resolvent estimate for the Stokes system with Robin bounary condition*, J. Math. Soc. Japan, **59**, No.2(2007), 469-519.

[34] S. Ukai, *A solution formula for the Stokes equation in $\mathbb{R}^n_+$.* Comm. Pure Appl. Math. **40**(1987), 611-621.