

ホイットニーの傘のケンデリンクの定理

長谷川大*

Institute of Mathematics and Computer Science, Universidade de São Paulo

1. 序章

本稿の内容は福井敏純氏 (埼玉大学) と佐治健太郎氏 (神戸大学) との共同研究に基づく。

$\xi \in \mathbb{R}^3$ を単位ベクトル, $\pi_\xi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \xi^\perp$ を ξ^\perp への正射影とする。ただし, ξ^\perp は ξ に直交する平面である。また, U を \mathbb{R}^2 の開集合とし, 可微分写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を正則な曲面とする。 $S(g)$ を $g = \pi_\xi \circ f$ の特異点集合とすると, $f(S(g))$ を π_ξ による輪郭母線 (contour generator), $g(S(g))$ を π_ξ による輪郭線 (apparent contour, profile または outline) と呼ぶ。

物体の「見え方」について考えてみる。曲面を物体の境界とみなす。曲面の接ベクトル v 方向の法曲率 $\kappa_n(v)$ が 0 でないとき, 輪郭線は非特異である。このとき, 曲面の正射影像が凸である点に対応する曲面の点は楕円的 (ガウス曲率 $K > 0$), 正射影像が凹である点に対応する曲面の点は双曲的 ($K < 0$), 輪郭線の変曲点に対応する曲面の点は放物的 ($K = 0$) である。すなわち, 物体を見たときに見た目の境界が出っ張っていれば, 実際に物体は出っ張っていて, 境界がへっこんでいれば, 実際に物体はへっこんでいるということである。このことを, ケンデリンク (J. J. Kenderink) は輪郭線の曲率を用いて次のように定式化した。

定理 1 ([9, Appendix],[10, page 433]). $\xi \in T_p f(U)$ とし, 点 p において $\kappa_n(\xi) \neq 0$ とする。 κ_c を $g(S(g))$ の曲率, κ_s を ξ に対応する法断面の曲率とする。このとき, 点 p において

$$K = \kappa_c \kappa_s = \kappa_c \kappa_n(\xi)$$

が成り立つ。

可微分写像芽 $f: (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ がホイットニーの傘 (Whitney umbrella) であるとは, $F(u, v) = (u, uv, v^2)$ で定められた可微分写像芽 $F: (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ と \mathcal{A} -同値であること, すなわち, 二つの微分同相写像芽 $\varphi: (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ と $\Phi: (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ が存在して $f \circ \varphi = \Phi \circ F$ を満たすことである。ホイットニーの傘は \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^3 への写像に現れる唯一の安定な特異点であることから, 重要な特異点のタイプであり, 近年その微分幾何的性質について様々な研究がなされている。例えば, 外的な性質については [2, 3, 4, 5, 6, 7, 14, 18, 20, 21] などが, 内的な性質については [8] の研究がある。したがって, ホイットニーの傘について, 正則曲面のケンデリンクの定理の類似を考察することは自然な問題である。本稿では, ケンデリンクの定理をホイットニーの傘の場合に拡張した結果を紹介する。

*mhasegawa@icmc.usp.br

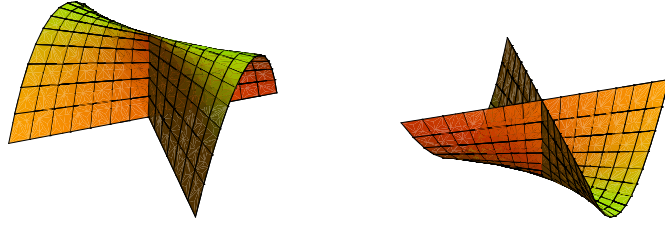


図 1: 異なる方向から見た標準的なホイットニーの傘

2. 準備

2.1. ホイットニーの傘の幾何的性質. $f: (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ をホイットニーの傘とする. $f(0,0)$ では接平面は直線に退化する. すなわち, df_0 の像は直線となる. この直線をホイットニーの傘特異点の接線とよび, $f(0,0)$ を通り, 接線に直交する平面を法平面 (normal plane) とよぶ. $df_0(\eta) = 0$ となる 0 でないベクトル $\eta \in T_0\mathbb{R}^2$ を退化ベクトル (null vector) (cf. [11]) とよぶ. $f(0,0)$ を通り, 接線と η が張られる平面を主平面 (principal plane) とよぶ (cf. [8]). ただし, η は f の η に関する 2 階の方向微分である. ここで, ホイットニーの傘の接線や法平面, 主平面は定義域の座標の取り方に依存しないことに注意しておこう (cf. [8]).

正則な平面曲線 $\gamma = \gamma(t): (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ でその接ベクトルが η と横断的な γ を接曲線 (tangential curve), η と接する γ を退化曲線 (null curve) とよぶ. 明らかに, γ が接曲線であるとき, $f \circ \gamma$ は $f(0,0)$ でホイットニーの傘の接線に接している. 一方, γ が退化曲線であるとき, $f \circ \gamma$ は $f(0,0)$ で特異点をもつ. $\hat{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$ が二重点曲線, すなわち $\hat{\gamma}$ が原点を除き単射ではないとき, γ は退化曲線である. 二重点曲線 $\hat{\gamma}$ の接ベクトルの極限 $\lim_{t \rightarrow 0} \hat{\gamma}'(t)/|\hat{\gamma}'(t)|$ を二重点曲線の接方向とよぶ.

West([21]) はホイットニーの傘の標準な表示を与えた.

命題 2 ([21]). $f: (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ をホイットニーの傘とする. そのとき, 微分同相写像芽 $\phi: (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ と等長写像芽 $\Phi: (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ で,

$$\Phi \circ f \circ \phi(u, v) = \left(u, uv + \sum_{i=3}^k \frac{b_i}{i!} v^i + O(u, v)^{k+1}, \sum_{i+j=2}^k \frac{a_{ij}}{i!j!} u^i v^j + O(u, v)^{k+1} \right) \quad (a_{02} > 0) \quad (2.1)$$

となるものが存在する.

ホイットニーの傘 $f: (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ が標準形 (2.1) で与えられているとする. このとき, ホイットニーの傘の接線は x 軸, 法平面は yz 平面となる. また, 退化ベクトルは $\eta = \partial/\partial v$ ととることができる. したがって, 主平面は xz 平面となる.

次の形で与えられた平面曲線 $\gamma: (\mathbb{R}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ を考える.

$$\gamma(t) = \left(p_1 t + \frac{1}{2} p_2 t^2 + O(t)^3, q_1 t + \frac{1}{2} q_2 t^2 + O(t)^3 \right) \quad ((p_1, q_1) \neq (0, 0)) \quad (2.2)$$

$(p_1, q_1) \neq (0, 0)$, $a_{02} > 0$ であるから, γ に沿った f の単位法ベクトル ν の極限は

$$\lim_{t \rightarrow 0} \nu(\gamma(t)) = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + (a_{11} p_1 + a_{02} q_1)^2}} (0, -a_{11} p_1 - a_{02} q_1, p_1)$$

で与えられ, このベクトルは法平面に含まれることが分かる. また, γ を退化曲線とすると,

$p_1 \neq 0, q_1 = 0$ であるから, $\hat{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$ の単位接ベクトルの極限は

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{\gamma}'(t)}{|\hat{\gamma}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{p_2^2 + a_{02}^2 q_1^4}} (p_2, 0, a_{02} q_1^2),$$

となり, このベクトルは主平面に含まれることが分かる. とくに, $\hat{\gamma}$ を二重点曲線とすると, γ は

$$\gamma(t) = \left(-\frac{1}{6} b_3 q_1^2 t^2 + O(t)^3, q_1 t + \frac{(-a_{03} + a_{11} b_3) q_1^2}{6 a_{02}} t^2 + O(t)^3 \right)$$

であたえられ, $\hat{\gamma}$ の単位接ベクトルの極限は

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{\gamma}'(t)}{|\hat{\gamma}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{9 a_{02}^2 + b_3^2}} (-b_3, 0, 3 a_{02})$$

となる.

f のガウス曲率 K は, $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$ とおくと,

$$K(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{a_{02} (a_{20} \cos^2 \theta - a_{02} \sin^2 \theta)}{(\cos^2 \theta + (a_{11} \cos \theta + a_{02} \sin \theta)^2)^2} + O(r) \right).$$

で与えられる ([3]). このことは, 極限 $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 K(r \cos \theta, r \sin \theta)$ は θ によってのみきまることを示している. また, (2.2) の形で与えられた曲線 γ を考えると, γ に沿ったガウス曲率のローラン展開は

$$K(\gamma(t)) = \frac{1}{t^2} \left(\frac{a_{02} (a_{20} p_1^2 - a_{02} q_1^2)}{(p_1^2 + (a_{11} p_1 + a_{02} q_1)^2)^2} + O(t) \right). \quad (2.3)$$

となり, $\lim_{t \rightarrow 0} t^2 K(\gamma(t))$ はパラメータ t に依存しないことが分かる.

West([21]) は, ホイットニーの傘はジェネリックに2つのタイプに分類されることを示した. 一つは, 定義域の放物点集合が A_1^- 特異点 (交差するなめらかな二つの曲線) であるもので楕円的ホイットニーの傘 (elliptic Whitney umbrella) とよばれ, もう一つは放物点集合が A_1^+ 特異点 (孤立点) であるもので双曲的ホイットニーの傘 (hyperbolic Whitney umbrella) とよばれる. また, 放物点集合が A_2 特異点 ((2,3)-カスプ) であるものを放物的ホイットニーの傘 (parabolic Whitney umbrella) という. f が (2.1) で与えられているとき, f が楕円的ホイットニーの傘であるための必要十分条件は $a_{20} > 0$ で, 双曲的ホイットニーの傘であるための必要十分条件は $a_{20} < 0$ である ([3]). したがって, (2.3) より, $\lim_{t \rightarrow 0} t^2 K(\gamma(t))$ の値は, 楕円的ホイットニーの傘の場合, 正負どちらの値もとりうるが, 双曲的ホイットニーの傘の場合は常に負である. このことは, 後で述べるホイットニーの傘の「見え方」に関連する.

2.2. 平面曲線のカスプの幾何的性質. 正則曲面の場合と異なり, ホイットニーの傘の平面による切り口には特異点が現れる. ジェネリックには, ホイットニーの傘と平面の切り口には (2,3)-カスプが現れる. 可微分写像芽 $\gamma: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ が (2,3)-カスプであるとは, $t \mapsto (t^2, t^3)$ と \mathcal{A} -同値となることである. ここでは, [17] で与えられた, (2,3)-カスプの不変量について述べる.

可微分写像芽 $\gamma: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ が (2,3)-カスプである必要十分条件は $\gamma'(0) = 0, \det(\gamma''(0), \gamma'''(0)) \neq 0$

0 が成り立つことである．可微分写像芽 $\gamma: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ が (2,3)-カスプであるとき，

$$\mu_\gamma = \frac{\det(\gamma''(t), \gamma'''(t))}{|\gamma''(t)|^{5/2}} \Big|_{t=0} \quad (2.4)$$

を γ のカスプ的曲率 (cuspidal curvature) という． $\mu_\gamma > 0$ であるとき， γ は左回り (left-turning) であり， $\mu_\gamma < 0$ であるとき， γ は右回り (right-turning) である (図 2)．また，カスプ的曲率は (2,3)-カスプの「開き具合」を与える．サイクロイド $c(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$ ($a > 0$) を考える． $c(t)$ は $t=0$ で (2,3)-カスプを持つ． $c(t)$ のカスプ的曲率 μ_c は， $\mu_c = 1/\sqrt{a}$ で与えられる．カスプ的曲率と曲率とは次の関係がある．

命題 3 ([19, Theorem 1.1]). 可微分写像芽 $\gamma(t): (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ を (2,3)-カスプとする．このとき， γ の曲率 $\kappa(t)$ は $a_1/t + a_2 + O(t)$ ($a_1 \neq 0$) と展開され， $\mu_\gamma = 2\sqrt{2} \lim_{t \rightarrow 0} t\kappa(t) = 2\sqrt{2}a_1$ が成り立つ．



図 2: カスプ的曲率が正・負の (2,3)-カスプ

3. ホイットニーの傘のケンデリンクの定理

可微分写像芽 $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ をホイットニーの傘とし，その単位法ベクトルを ν とする． $\xi^\perp \subset \mathbb{R}^3$ を $\xi \in \mathbb{R}^3$ ($|\xi| = 1$) に直交する平面とし， $\pi_\xi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \xi^\perp$ を ξ^\perp への正射影とする． $g = \pi_\xi \circ f: (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\xi^\perp, g(0))$ の特異点集合は ξ が f の接線方向であるとき，原点で特異点をもつ． $S(g)$ が原点で非特異であるとき，正則曲線 $\alpha(t): (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ でパラメータ表示され， π_ξ による輪郭線のパラメータ表示は $\hat{\alpha} = g \circ \alpha$ で与えられる． $\Sigma(u, v) = \det(f(u, v), \nu(\alpha(0)), \xi)$ とすると， $f(\Sigma^{-1}(0))$ は f の原点での $\langle \nu(\alpha(0)), \xi \rangle_{\mathbb{R}}$ による切り口を与える． $\Sigma^{-1}(0)$ は $S(g)$ 同様， ξ が f の接線方向であるとき，原点で特異点をもつ．したがって， $S(g)$ が原点で非特異であるとき， $\Sigma^{-1}(0)$ は正則曲線 $\beta(t): (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ でパラメータ表示され， f の原点での $\langle \nu(\alpha(0)), \xi \rangle_{\mathbb{R}}$ による切り口のパラメータ表示は $\hat{\beta}(t) = f \circ \beta(t)$ で与えられる． $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は次のように特徴づけられる．

補題 4. (1) ξ が f の主平面に含まれないとき， $\hat{\alpha}$ は原点で非特異である．

(2) ξ が f の主平面に含まれるが f の接線方向ではなく， f の二重点曲線の接方向でもないとき， $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ は (2,3)-カスプである．

$\hat{\alpha}$ の曲率を κ_c ， $\hat{\beta}$ の曲率を κ_s とする．補題 4(2) のとき， $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ のどちらも (2,3)-カスプであるから，命題 3 より， κ_c, κ_s は

$$\kappa_c = \frac{1}{t}(a_1 + O(t)), \quad \kappa_s = \frac{1}{t}(b_2 + O(t)) \quad (a_1, b_1 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0, b_1 \neq 0)$$

と展開できる．また， $\hat{\alpha}$ のカスプ的曲率を $\mu_{\hat{\alpha}}$ ， $\hat{\beta}$ のカスプ的曲率を $\mu_{\hat{\beta}}$ とすると，

$$\mu_{\hat{\alpha}} = 2\sqrt{2}a_1, \quad \mu_{\hat{\beta}} = 2\sqrt{2}b_1$$

と書ける．したがって，(2.3) より， $\lim_{t \rightarrow 0} t^2 K(\alpha(t))$ は $\lim_{t \rightarrow 0} t\kappa_c(t) \cdot t\kappa_s(t)$ ，または $\mu_{\hat{\alpha}}\mu_{\hat{\beta}}$ を用いて表せることが期待できる．実際に次が成り立つ．

定理 5. ξ は f の主平面に含まれていて， f の接線方向ではなく， f の二重点曲線の接方向でもないとする．このとき，次が成り立つ．

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^2 K(\alpha(t)) = 2 \lim_{t \rightarrow 0} t\kappa_s(t) \cdot t\kappa_c(t) = 2 \lim_{t \rightarrow 0} t\kappa_s(t) \cdot t\kappa_n(t) = \frac{\mu_{\hat{\alpha}}\mu_{\hat{\beta}}}{4}$$

ただし， $\kappa_n(t)$ は β に沿った f の法曲率である．また， $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ には，それぞれ

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{\alpha}'(t)}{|\hat{\alpha}'(t)|} = v(\alpha(0)) \times \xi, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{\beta}'(t)}{|\hat{\beta}'(t)|} = -\xi$$

となるような向きが入っていて， $\xi^\perp, \langle v(\alpha(0)), \xi \rangle_{\mathbb{R}}$ には，それぞれ $\{v(\alpha(0)) \times \xi, v(\alpha(0))\}, \{v(\alpha(0)), \xi\}$ が正の基底となるような座標が入っている．

言うまでもなく，原点を除いて通常のケンデリンクの定理 (定理 1) が成り立っている．次は，ケンデリンクの定理の輪郭線に沿った極限を考えてみる．ここで，

$$\Sigma_t(u, v) = \Sigma(u, v, t) = \det(f(u, v) - f(\alpha(t)), v(\alpha(t)), \xi)$$

とすると， $f(\Sigma_t^{-1}(0))$ は f の $f(\alpha(t))$ での $\langle v(\alpha(t)), \xi \rangle_{\mathbb{R}}$ との切り口の族である． $\Sigma_t^{-1}(0)$ は， $t \neq 0$ のとき明らかに点 $\alpha(t)$ で非特異で， $t = 0$ のときは ξ が f の接線方向でないとき原点 $\alpha(0)$ で非特異である．したがって， ξ が f の接線方向でないとき， $\Sigma_t^{-1}(0)$ は各 t において点 $\alpha(t)$ の近傍で $\beta_t(r) = \beta(r, t)$ ($\beta(0, 0) = \alpha(0)$) でパラメータ表示される．ここで， $\hat{\beta}_t(r) = \hat{\beta}(t, r) = f \circ \beta_t(r)$ とすると， $\hat{\beta}_t$ は， f の $f(\alpha(t))$ での $\langle v(\alpha(t)), \xi \rangle_{\mathbb{R}}$ との切り口のパラメータ表示となる． $\alpha(t)$ と $\beta_t(r)$ は交点を持つ．したがって，各 t に対して， $\alpha(t) = \beta_t(r)$ を満たす r が決まる．そのような r を r' とする．このとき，次が成り立つ．

定理 6. (1) ξ は主平面に含まれていないとする．このとき，次が成り立つ．

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^2 K(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} (\kappa_c(t) \cdot t^2 \kappa_s(r, t)|_{r=r'}) = \lim_{t \rightarrow 0} (\kappa_c(t) \cdot t^2 \kappa_n(r, t)|_{r=r'}).$$

ここで， $\kappa_s(r, t)$ は $\hat{\beta}_t$ の曲率で， $\kappa_n(r, t)$ は β_t に沿った f の法曲率である．また， $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_t$ には，それぞれ

$$\frac{\hat{\alpha}'(0)}{|\hat{\alpha}'(0)|} = v(\alpha(0)) \times \xi, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left. \frac{\frac{d}{dr} \hat{\beta}_t(r, t)}{\left| \frac{d}{dr} \hat{\beta}_t(r, t) \right|} \right|_{r=r'} = -\xi$$

となるような向きが入っていて， $\xi^\perp, \langle v(\alpha(t)), \xi \rangle_{\mathbb{R}}$ には，それぞれ $\{v(\alpha(0)) \times \xi, v(\alpha(0))\}, \{v(\alpha(t)), \xi\}$ が正の基底となるような座標が入っている．

(2) ξ は f の主平面に含まれていて， f の接線方向ではなく， f の二重点曲線の接方向でもないとする．このとき，次が成り立つ．

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^2 K(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} (t\kappa_c(t) \cdot t\kappa_x(r, t)|_{r=r'}) = \lim_{t \rightarrow 0} (t\kappa_c(t) \cdot t\kappa_n(r, t)|_{r=r'}).$$

ただし, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_t$ には, それぞれ

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{\alpha}'(t)}{|\hat{\alpha}'(t)|} = v(\alpha(0)) \times \xi, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dr} \hat{\beta}(r, t) \Big|_{r=r'}}{\left| \frac{d}{dr} \hat{\beta}(t, r) \right|_{r=r'}} = -\xi$$

となるような向きが入っていて, $\xi^\perp, \langle v(\alpha(t)), \xi \rangle_{\mathbb{R}}$ には, それぞれ $\{v(\alpha(0)) \times \xi, v(\alpha(0))\}, \{v(\alpha(t)), \xi\}$ が正の基底となるような座標が入っている.

定理 5, 定理 6 は, 正則曲面のケンデリンクの定理の「ガウス曲率を輪郭線の曲率と法曲率の積で表す」ということの類似といえるが「幾何学的な意味」の類似とはいえない. ここで, f の原点での $\langle v(\alpha(0)), \xi \rangle_{\mathbb{R}}$ による切り口 $f(\Sigma_0^{-1}(0))$ の正射影像 $\pi_\xi \circ f(\Sigma_0^{-1}(0))$ を考える. $\pi_\xi \circ f(\Sigma_0^{-1}(0))$ は原点を始点とする半直線となるが, この半直線方向ベクトルを v とする. また, π_ξ による輪郭線 $\hat{\alpha}(t)$ の単位法ベクトルを $n(t)$ とする.

定理 7. ξ は f の主平面に含まれていないとする. このとき,

$$\text{sgn}(\langle v, n(0) \rangle \kappa_c(0)) = \text{sgn}\left(\lim_{t \rightarrow 0} t^2 K(\alpha(t))\right)$$

が成り立つ.

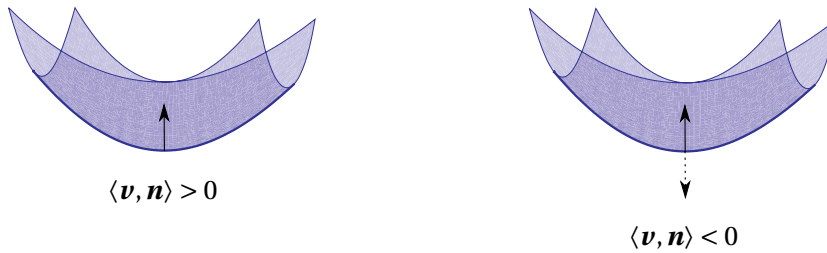


図 3: 正射影像が凸 ($\text{sgn}(\langle v, n \rangle \kappa_c) = 1$)



図 4: 正射影像が凹 ($\text{sgn}(\langle v, n \rangle \kappa_c) = -1$)

$\text{sgn}(\langle v, n(0) \rangle \kappa_c(0)) = 1$ のとき, π_ξ による f の正射影像は原点 $f(0, 0)$ で凸で, $\text{sgn}(\langle v, n(0) \rangle \kappa_c(0)) = -1$ のとき, 正射影像は原点で凹で, $\text{sgn}(\langle v, n(0) \rangle \kappa_c(0)) = 0$ のとき, 原点は輪郭線の変曲点である. 図 3, 図 4 は, それぞれ正射影像が凸, 凹の例である. どの例も, 実線の矢印が v , 点線の矢印が $n(0)$ を表している. 各図の左は二つのベクトルが同じ向きを向いていて, 矢印が重なっている. 定理 7 は, 輪郭線が非特異のときは, ホイットニーの傘特異点でもガウス曲率の符号 (輪郭線に沿ったガウス曲率の極限の符号) と正射影像の凹凸が対応していることを示している. すなわち, 定理 7 は正則曲面のケンデリンクの定理の「幾何学的意味」の類似といえる. (2.3) と定理 7 より, 楕円的ホイットニーの傘は, 原点で正射影像が凸に見える方向 (図 5 左), 凹に見える方向 (図 5 右), 原点が輪郭線の変曲点に対応する方向があるが, 双曲的ホイットニーの傘の正射影像は原点で常に凹であることがわかる.

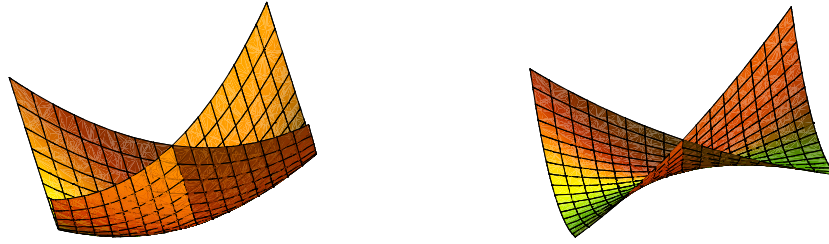


図 5: 異なる方向から見た楕円的ホイットニーの傘

References

- [1] J. W. Bruce and J. M. West, *Functions on cross-caps*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **123** (1998), 19–39.
- [2] F. S. Dias and F. Tari, *On the geometry of the cross-cap in the Minkowski 3-space*, preprint, 2012. Available from www2.icmc.usp.br/~fariditari/Papers/DiasTari.pdf.
- [3] T. Fukui and M. Hasegawa, *Height functions on Whitney umbrellas*, to appear in RIMS Kokuroku bessatsu.
- [4] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella*, J. Singlu., **4** (2012), 35–67.
- [5] T. Fukui and J. J. Nuño Ballesteros, *Isolated roundings and flattenings of submanifolds in euclidian space*, Tohoku Math. J., **57** (2005), 469–503.
- [6] R. Garcia, C. Gutierrez and J. Sotomayor, *Lines of Principal curvature around umbilics and Whitney umbrellas*, Tohoku Math. J., **52** (2000), 163–172.
- [7] C. Gutierrez and J. Sotomayor, *Lines of principal curvature for mappings with Whitney umbrella singularities*, Tohoku Math. J., **38** (1986), 551–559.
- [8] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara, and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps*, to appear in Selecta Math. (N.S.).
- [9] J. J. Koenderink, *What does the occluding contour tell us about solid shape?*, Procection, **13** (1984), 321–330.
- [10] J. J. Koenderink, *Solid shape*, MIT Press Series in Artificial Intelligence. MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
- [11] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math., **221** (2005), 303–351.
- [12] J. J. Nuño Ballesteros and F. Tari, *Surfaces in \mathbb{R}^4 and their projections to 3-spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **137** (2007), 1313–1328.

- [13] J. M. Oliver, *On pairs of foliations of a parabolic cross-cap*, Qual. Theory Dyn. Syst., **10** (2011), 139–166.
- [14] R. Oset-Shinha and F. Tari, *On the geometry of singular surfaces*, preprint.
- [15] I. R. Porteous, *The normal singularities of a submanifolds*, J. Differential Geometry, **5** (1971) 543–564.
- [16] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.
- [17] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The duality between singular points and inflection points on wave fronts*, Osaka J. Math., **47** (2010), 591–607.
- [18] J. M. Oliver, *On pairs of foliations of a parabolic cross-cap*, Qual. Theory Dyn. Syst., **10** (2011), 139–166.
- [19] S. Shiba and M. Umehara, *The behavior of curvature functions at cusps and inflection points*, Diff. Geom. Appl. **30** (2012), 285–299.
- [20] F. Tari, *Pairs of geometric foliations on a cross-cap*, Tohoku Math. J., **59** (2007), 233–258.
- [21] J. M. West, *The differential geometry of the cross-cap*, Ph.D. thesis, The University of Liverpool, 1995.
- [22] H. Whitney, *The general type of singularity of a set of $2n - 1$ smooth functions of n variables*, Duke Math. J., **10** (1943), 161–172.
- [23] H. Whitney, *On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. **62** (1955), 374–410.