

量子ウォークの現在・過去・未来

今野 紀雄 (横浜国立大学大学院 工学研究院)

1 序

量子ウォーク (quantum walk) はランダムウォークの量子版として, 新世紀の幕開けとともに本格的に研究が始まった新しい研究分野である. 量子ウォークのレビュー, 本などとして, Kempe (2003), Kendon (2007), 今野 (2008a), Konno (2008b), Venegas-Andraca (2008, 2012) がある. 我々の研究グループも初期のころから研究にたずさわって早 10 年, 感無量である. このモデルは, 出発点に留まり続けるだけでなく, 線形的にも広がるような, ランダムウォークとは異なる様々な挙動を示し, 量子コンピュータへの応用など, 色々な分野で着目されている. 本稿では, 量子ウォークの基本的な性質を紹介しつつ, その研究の「現状・短い歴史・今後の展開」について適宜概説したい. 実は量子ウォークには, 離散時間と連続時間の 2 種類があるが, 比較的詳しく研究がなされている離散時間のモデルを中心に説明する. 離散時間の量子ウォークのプライオリティに関しては諸説があり, 論文によっては異なることもある. しかし, Ambainis, Bach, Nayak, Vishwanath and Watrous (2001) や Aharonov, Ambainis, Kempe and Vazirani (2001) の論文などに代表されるように, 量子コンピュータ周辺の研究により, 2001 年前後から活発に研究がされ始めたことは, 間違いが無いだろう. 理論的な側面だけでなく, 量子ウォークの実現方法の様々な提案 (例えば, Crespi et al. (2013)) や強相関電子系への応用 (Oka, Konno, Arita and Aoki (2005)) なども既に研究がされている.

以下本稿では, \mathbb{Z} 上の 2 状態の場合について解説し, その後, 3 状態, それを一般化した多状態, 空間的に非一様な場合などを扱う. 但し, \mathbb{Z} は整数全体の集合である.

2 \mathbb{Z} 上の 2 状態量子ウォーク

本節では代表的な \mathbb{Z} 上の最近接に移動する量子ウォークについて概説する¹⁾. そのダイナミクスを定義するために, まず以下の量子コインとも呼ばれるユニタリ行列を考える.

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U(2).$$

但し, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. ここで, \mathbb{C} は複素数全体の集合で, $U(2)$ は 2×2 のユニタリ行列全体の集合である. このとき, U のユニタリ性から $|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1$ 等が成立する.

この量子ウォーカーは, 「左向き」 $|L\rangle$ と 「右向き」 $|R\rangle$ の 2 つの「カイラリティ (chirality)」をもち, それぞれ, 量子ウォーカーの動く向きに対応している. 実際,

$$|L\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |R\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおくと, $U|L\rangle = a|L\rangle + c|R\rangle$, $U|R\rangle = b|L\rangle + d|R\rangle$ となり, ダイナミクスは 図 2.1 のようになる.

¹⁾実は定義は唯一ではない. ここでの定義は, Ambainis, Bach, Nayak, Vishwanath and Watrous (2001) で導入された, 左と右のカイラリティに分離してから, それぞれ移動する量子ウォークであるのに対し, 例えば Gudder (1988) の本で与えられている定義は, 移動してから, 左と右のカイラリティに分離するので注意を有する. 但し, 極限定理や吸収問題などの定性的な性質は変わらない (Konno (2002b)).

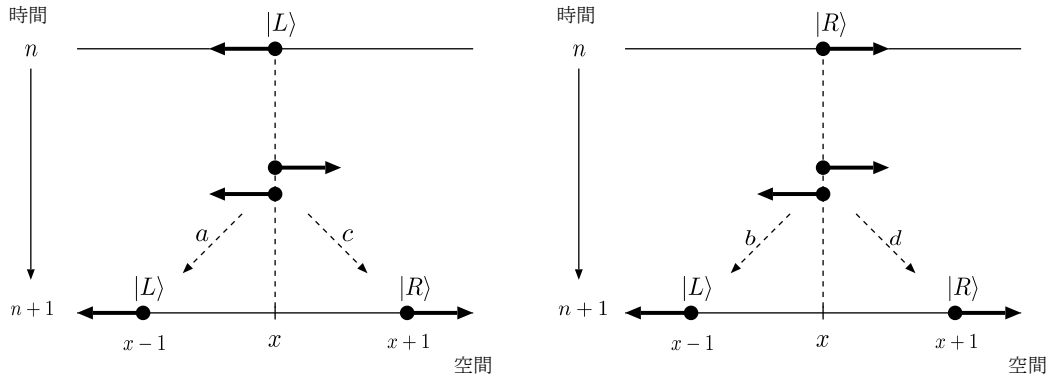


図 2.1: ダイナミクス

特性関数, k 次モーメント, 極限定理などは, 初期量子ビットの状態に強く依存するため, その状態を決める以下の集合を定義する.

$$\Phi = \left\{ \varphi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \|\varphi\|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

ここで, 初期状態として, 原点での量子ビット状態が $\varphi \in \Phi$, その他の場所では $T[0, 0]$ としたときの, 時刻 n での量子ウォークを X_n とおく²⁾. ここで, T は転置を表す. X_n を定義するために, 古典のランダムウォークの確率 p (左に移動), q (右に移動) に対して, 次の行列 P, Q を与える.

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}.$$

ここで, $U = P + Q$ の関係に注意. 逆に, 最初に与えられたユニタリ行列 U を上のように分解することによって, P, Q を定義するともいえる. 以下で時刻 n , 場所 x に対する “ $X_n = x$ ” の確率を定義する.

$$P(X_n = x) = (\Xi_n(l, m)\varphi)^* (\Xi_n(l, m)\varphi) = \|\Xi_n(l, m)\varphi\|^2.$$

但し, $n = l + m$, $x = -l + m$ かつ $*$ は随伴作用素を表す. これより量子ウォーク X_n の確率分布が定義される. 但し, 量子ウォークは, 時刻 n ごとの確率分布の列 $\{P(X_n = \cdot) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ が与えられているだけで, 確率過程として定義されていない.

量子ウォークの中で最も研究が多くなされているモデルは「アダマールウォーク (Hadamard walk)」で, そのユニタリ行列 U は以下で決まる.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

アダマールウォークのダイナミクスは, U の各成分の絶対値の 2 乗が $1/2$ となるので, 古典の対称なランダムウォークに対応する量子ウォークとも考えられる. しかし, その分布の対称性は初期量子ビットの状態に強く依存する. 例えば, 初期量子ビットが $\varphi = T[1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}]$ の場合には分布が対称となるが, ランダムウォークと挙動が全く異なる (図 2.2 を参照). ランダムウォークの分布は 2 項分布タイプであるが, 量子ウォークの分布は出発点である原点の存在確率が低く複雑で振動している.

²⁾一般の初期状態の場合には, 一点からの場合とは異なる様々な挙動を示す. 例えば, Machida (2012, 2013).

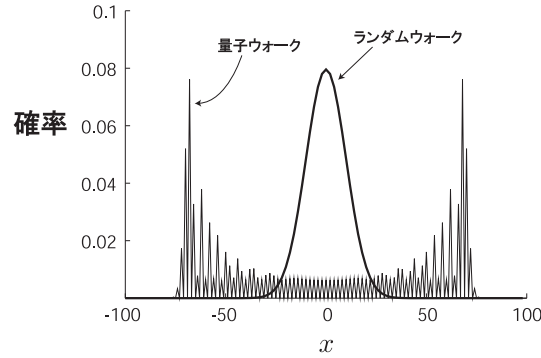


図 2.2: 時刻 100 でのアダマルウォークとランダムウォークの分布の違い

2.1 確率分布

ここでは、組合せ論的手法により、量子ウォーク X_n の確率分布とその性質を与える。尚、本小節の結果は Konno (2002a, 2005a) による。まず、 $l + m = n$ かつ $-l + m = x$ を満たす非負整数 l, m に対して、次の量を考える。

$$\Xi_n(l, m) = \sum_{l_j, m_j} P^{l_1} Q^{m_1} P^{l_2} Q^{m_2} \dots P^{l_n} Q^{m_n}.$$

但し、上式の和は $l_1 + \dots + l_n = l$, $m_1 + \dots + m_n = m$, $l_j + m_j = 1$ を満たす全ての $l_j, m_j \in \{0, 1\}$ に関する和とする。このとき、次の関係に注意 $\Psi_n(x) = \Xi_n(l, m)\varphi$ 。例えば、 $P(X_4 = -2)$ の場合には、 $\Xi_4(3, 1) = QP^3 + PQP^2 + P^2QP + P^3Q$ を得る (図 2.3 を参照)。

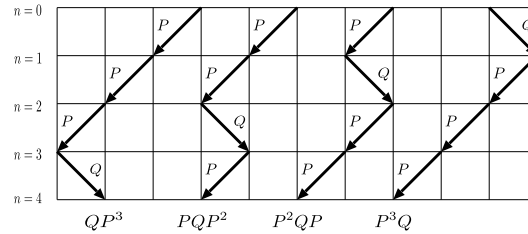


図 2.3: $\Xi_4(3, 1)$ の 4 本のパス

ここで、 $P^2 = aP$ の性質に着目すると、 $\Xi_4(3, 1) = a^2QP + aPQP + aPQP + a^2PQ$ が導かれる。さらに、 $P(X_n = x)$ を計算するために以下の行列を導入する。

$$R = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}.$$

このとき、 P, Q, R, S は、トレース内積 $\langle A|B \rangle = \text{tr}(A^*B)$ に関する複素数成分を持つ 2×2 行列の空間の正規直交基底になっている。従って、 $\Xi_n(l, m)$ は次の形に一意的に表されることが分かる。

$$\Xi_n(l, m) = p_n(l, m)P + q_n(l, m)Q + r_n(l, m)R + s_n(l, m)S.$$

よって、次の問題は $p_n(l, m), q_n(l, m), r_n(l, m), s_n(l, m)$ の具体的な形を求めることである。例えば先の $\Xi_4(3, 1)$ の場合には、 $\Xi_4(3, 1) = 2abcP + a^2bR + a^2cS$ のようになる。従って、 $p_4(3, 1) = 2abc$, $q_4(3, 1) = 0$, $r_4(3, 1) = a^2b$, $s_4(3, 1) = a^2c$ となる。一般の場合には、

定理 2.3. $abcd \neq 0$ とする³⁾. $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{X_n}{n} \Rightarrow Z.$$

但し, $Y_n \Rightarrow Y$ は, Y_n が Y に弱収束することを表す. ここで, Z の密度関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \left\{ 1 - \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{a\alpha\bar{b}\beta + \bar{a}\alpha b\beta}{|a|^2} \right) x \right\} f_K(x; |a|).$$

但し, $0 < r < 1$ に対して,

$$f_K(x; r) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{r^2-x^2}} I_{(-r,r)}(x).$$

また, $I_A(x) = 1 (x \in A), = 0 (x \notin A)$.

上記の極限定理より, Z は初期量子ビット $\varphi = T[\alpha, \beta]$ に強く依存することが分かる. また, 極限の密度関数で現れた $f_K(x; r)$ は, 多状態など様々な離散時間の量子ウォークの極限の密度関数にも現れ, 古典系のガウス分布に対応した分布である.

アダマールウォークの場合には, 分布を対称にする初期量子ビットとして $\varphi = T[1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}]$ をとると, 対称なランダムウォークとは異なり, 極限の密度関数は以下で与えられる. グラフは図 2.4 を参照のこと.

$$f_K(x; 1/\sqrt{2}) = \frac{1}{\pi(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}} I_{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}(x).$$

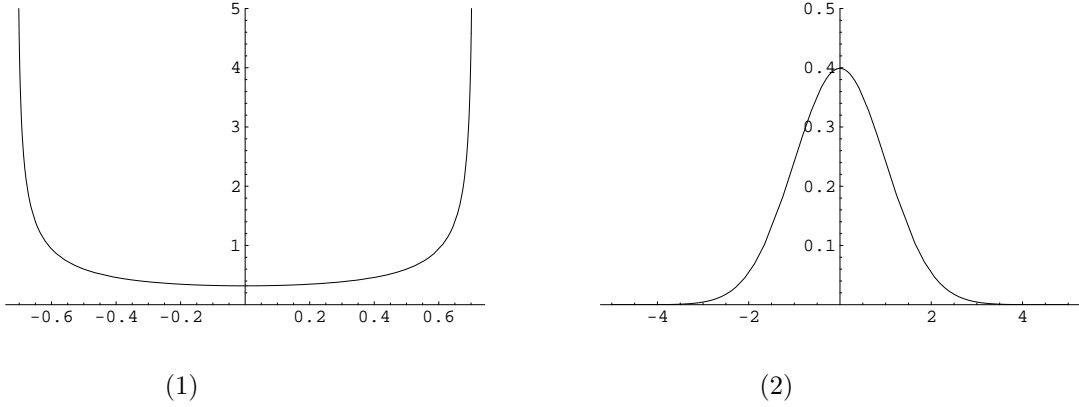


図 2.4: (1) アダマールウォークの極限分布 (対称な場合, $\varphi = T[1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}]$), (2) ランダムウォークの極限分布, 即ち, ガウス分布 (平均 0, 分散 1)

この場合, $\text{var}(X_n)/n^2 \rightarrow (2 - \sqrt{2})/2$ が得られる. 但し, $\text{var}(X)$ は X の分散である. 上記の結果からも, 古典の場合には, 対応する分散が n のオーダーで大きくなるのに対し, 量子ウォークの場合は n^2 のオーダーで大きくなるのが分かる. そして, この違いなどを上手く利用し, 空間構造を持った探索問題や element distinctness の問題への応用が試み始められている.

2.3 解析手法

これまでは組合せ論的な手法での解析であったが, その他, フーリエ解析 (Grimmett, Janson and Scudo (2004)), 停留位相法, 時空母関数を用いた手法などがある. また, 最近 Cantero, Grünbaum,

³⁾ $abcd = 0$ のときは自明な場合になる.

Moral and Velázquez (2010) によって導入された CMV 行列に基づいた解析手法 (CGMV 法と呼ぶ) は, 系全体を記述する無限次元のユニタリ行列の固有値と固有ベクトルを求めることが可能なので, 後に述べる 1 次元系の局在化を議論するには強力である. 実際, 半直線上の局在化や極限定理の解析に CGMV 法を用いた研究として Konno and Segawa (2011, 2013) がある.

3 \mathbb{Z} 上の 3 状態量子ウォーク

3.1 3 状態グローヴァーウォークの定義

いままでは 2 状態の量子ウォークに関して説明をしたが, この節では 3 状態の量子ウォークについて解説する. 具体的には, 3 状態のグローヴァーウォーク (Grover walk) を扱う. 量子ウォーカーは, 2 状態の場合同様に, それぞれ位置の空間 $\{|x\rangle : x \in \mathbb{Z}\}$ とカイラリティの空間 $\{|L\rangle, |0\rangle, |R\rangle\}$ の直積によって特徴づけられる. カイラリティ $|L\rangle$ と $|R\rangle$ とはそれぞれ左へのジャンプ, 右へのジャンプに対応し, カイラリティ $|0\rangle$ は同じ場所にとどまることを表す.

次に, $\Psi_n(x) = {}^T[\Psi_n^L(x), \Psi_n^0(x), \Psi_n^R(x)]$ を場所 $x \in \mathbb{Z}$ で時刻 $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ のカイラリティ状態が $|L\rangle, |0\rangle, |R\rangle$ に対応する量子ウォーカーの確率振幅とする. また, 初期状態として量子ウォーカーは原点だけに存在するものと仮定し, その確率振幅を $\Psi_0(0) = {}^T[\alpha, \beta, \gamma] \in \mathbb{C}^3$ とおく. 但し, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$. 波動関数の時間発展を定義する前に, 2 状態の場合と同様に以下の行列を導入する.

$$U_L = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_R = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

このとき, U_L が左に, U_R が右にジャンプすることに対応し, U_0 が同じ場所に留まることに対応する. 逆に言えば, 3 状態のグローヴァーウォークは以下のユニタリ行列で定義される.

$$U^{(G,3)} = U_L + U_0 + U_R = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

このモデルの時間発展は以下で与えられる.

$$\Psi_{n+1}(x) = U_L \Psi_n(x+1) + U_0 \Psi_n(x) + U_R \Psi_n(x-1).$$

3.2 極限測度と局在化

初期状態 ${}^T[\alpha, \beta, \gamma]$ に対する, 場所 x , 時刻 n での量子ウォーカーが存在する確率を $P_n(x) = P_n(x; \alpha, \beta, \gamma)$ としたとき, その $n \rightarrow \infty$ での極限測度 $P_*(x) = P_*(x; \alpha, \beta, \gamma)$ が求まる. 例えば, 以下のように場所 x からの距離に対して指数的に減少する結果が得られる (Inui, Konno and Segawa (2005)).

$$P_*(0; i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = \frac{4c^2(5c^2 + 2c + 5)}{(1 - c^2)^2} = 10 - 4\sqrt{6} = 0.202\dots,$$

$$P_*(x; i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = \frac{2(5c^4 + 2c^3 + 10c^2 + 2c + 5)}{(1 - c^2)^2} c^{2|x|} \quad (|x| \geq 1).$$

但し, $c = -5 + 2\sqrt{6} \in (-1, 0)$. 局在化の定義として, 「場所 x で局在化が起こる」とは, 「 $\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(x) > 0$ 」とすると, 上記の結果から全ての点で局在化が起きているとことが分かる. 特に場所を断らないときは, 出発点で局在化が起きるときを, 簡単に「局在化が起こる」ということにする. さらに,

$$0 < \sum_{x \in \mathbb{Z}} P_*(x; i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{6} = 0.408\dots < 1.$$

即ち, $P_*(x; i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ は確率測度になっていない. 実は, 上記の値は初期条件に依存している. 例えば,

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} P_*(x; 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = 3 - \sqrt{6} = 0.550\dots$$

一方, 対応する古典系では, $P_*(x) = 0$ となる. 従って, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P_*(x) = 0$. 同じ結論は, 2 状態の量子ウォークの場合でも導かれる.

3.3 弱収束の極限定理

フーリエ解析の手法により, 以下のような, 任意の初期状態に対する 3 状態のグローヴァーウォークの弱収束の極限定理を得る (Konno (2008b)).

定理 3.1. $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{X_n}{n} \Rightarrow Z$$

但し, Z は次の測度より定まる.

$$f(x) = \Delta(\alpha, \beta, \gamma) \delta_0(x) + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) f_K(x; 1/\sqrt{3}).$$

ここで, δ_0 は原点にマスをもつ点測度,

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha, \beta, \gamma) &= \left(\left| \alpha + \frac{\beta}{2} \right|^2 + \left| \gamma + \frac{\beta}{2} \right|^2 \right) \frac{\sqrt{6}}{6} + \Re \{ (2\alpha + \beta)(2\bar{\gamma} + \bar{\beta}) \} \left(1 - \frac{5}{12} \sqrt{6} \right), \\ c_0 &= (|\alpha + \gamma|^2)/2 + |\beta|^2, \quad c_1 = -|\alpha - \beta|^2 + |\gamma - \beta|^2, \\ c_2 &= (|\alpha - \gamma|^2)/2 - \Re \{ (2\alpha + \beta)(2\bar{\gamma} + \bar{\beta}) \}. \end{aligned}$$

但し, $\Re(z)$ は $z \in \mathbb{C}$ の実部を表す. また, $f_K(x; r)$ は以下で定義された関数である.

$$f_K(x; r) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{r^2-x^2}} I_{(-r,r)}(x).$$

上の定理で $f(x)$ の第 1 項が原点での局在化に対応している項で, 次の関係が成立する.

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P_*(x; \alpha, \beta, \gamma).$$

4 ユニヴァーサルティ・クラス

2 状態のアダマールウォークの場合には, 時刻 0 での系全体 \mathbb{Z} での量子状態 Ψ_0 を $\Psi_0(x) = {}^T [1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}] \delta_0(x) + \sum_{y: y \neq 0} {}^T [0, 0] \delta_y(x) (x \in \mathbb{Z})$ で表したとき, 定理 2.3 よりその極限測度は $\mu_w^{(\Psi_0)}(dx) = f_K(x; 1/\sqrt{2}) dx$ になることがわかった. 前節で扱った 3 状態の定理 3.1 や他のモデルの結果などを考慮

すると、一般に、 X_n/n の $n \rightarrow \infty$ の弱収束極限測度は以下のように表されると期待できる。即ち、ある有理関数 $w(x)$ 、定数 $C \in [0, 1)$ と $r \in (0, 1)$ が存在し、

$$\mu^{(\Psi_0)}(dx) = C\delta_0(x) + (1 - C)w(x)f_K(x; r)dx.$$

そして、このようなクラスに属する量子ウォークのモデル全体を \mathcal{U} とする。つまり、その極限測度は、出発点である原点でのデルタ測度と $\delta_0(x)$ と $f_K(x; r)$ で特徴づけられる絶対連続な部分の $w(x)f_K(x; r)dx$ の凸結合になっている。Konno, Luczak and Segawa (2013) で、量子ウォークのユニヴァーサルティ・クラスの一つとして \mathcal{U} を提案した。現時点で知られている量子ウォークのモデルで \mathcal{U} に属しているものは、いくつか知られていて、しかもその場合に有理関数 $w(x)$ は比較的次数の低い多項式で表現される。例えば、記憶を持った場合には、Konno and Machida (2010)、多コインの場合は、Inui, Konno and Segawa (2005)、Miyazaki, Katori and Konno (2007)、Segawa and Konno (2008)、Liu and Petulante (2009)、Liu (2012)、時間依存型モデルは、Machida and Konno (2010)、Machida (2011)、空間依存型モデルは、Konno (2009)、Liu and Petulante (2012)、Konno, Luczak and Segawa (2013)、ツリー構造上の場合には、Chisaki, Hamada, Konno and Segawa (2009)、Chisaki, Konno and Segawa (2012)。実は、記憶を持ったモデルと多コインのモデルとは、確率分布として同値な関係を持つようにみならずとも可能な場合がある。

5 多状態、一般のグラフの場合

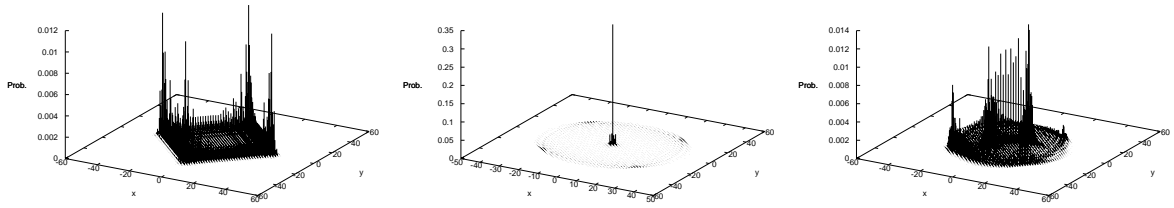
一般の多状態の量子ウォークに関する結果は現時点では非常に限られている。ここで一般の場合の定義の一つを与えよう。 U を $M \times M$ のユニタリ行列とし、 P_j ($j = 1, 2, \dots, M$) を (j, j) 成分だけ 1 で他の成分は全て 0 の M 次正方行列とする。このとき、 P_j は射影 ($P_j^2 = P_j, P_j^* = P_j$) で、 $\sum_{j=1}^M P_j = I_M$ となる。但し、 I_M は M 次の単位行列である。ここで、 $A_j = P_j U$ ($j = 1, 2, \dots, M$) を考え、この M 個の行列が 2 状態のように、各点から M 個の異なる場所に移動する P, Q に対応するものと考えれば、一般の場合の量子ウォークが定義できる。

1 次元の 4 状態グローヴァーウォークに関しては、Inui and Konno (2005) で研究がされている。Miyazaki, Katori and Konno (2007) では、1 次元の多状態量子ウォークのあるクラスについて、弱収束の極限定理を得ている。

2 次元の量子ウォークに関しては、モデルにより様々な挙動をとるので、その一端を紹介する (図 5.1 参照)。ステップ数は 50 で、そのダイナミクスは、各点で量子ウォーカーは 4 つの状態を取り、 $A_1 = P_1 U, A_2 = P_2 U, A_3 = P_3 U, A_4 = P_4 U$ 、としたとき、それぞれ、 A_1 が上向きに移動し、 A_2 が右向きに移動し、 A_3 が左向きに移動し、 A_4 が下向きに移動すると解釈する。

Mackay, Bartlett, Stephenson and Sanders (2002)、Tregenna, Flanagan, Maile and Kendon (2003) では数値シミュレーションにより、2 次元の量子ウォークで局在化が起こりえることを報告している。それに対する証明は、Inui, Konishi and Konno (2004) でなされ、さらに極限定理が Watabe, Kobayashi, Katori and Konno (2008) で得られた。

一般のグラフ上の離散時間量子ウォークの挙動の解析は殆どなされていない。ツリーに関しては、Chisaki, Hamada, Konno and Segawa (2009)、半直線を束ねたグラフでは、Chisaki, Konno and Segawa (2012)、スパイダーネットでは、Konno, Obata and Segawa (2012)、フラクタル図形については、Patel and Raghunathan (2012) の研究がある。



(1) アダマール

(2) グローヴァー

(3) 離散フーリエ変換

図 5.1: 2次元の量子ウォークの確率分布.

6 空間依存型モデル

6.1 局在化と非一様性

本節では、場所 x でのコイン作用素 U_x が場所に依存する、1次元の空間的に非一様な場合の局在化について考える. 具体的には、まずコイン作用素の列 $\{\omega_x \in [0, 2\pi) : x \in \mathbb{Z}\}$ を与え、

$$U_x = U_x(\omega_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & e^{i\omega_x} \\ e^{-i\omega_x} & -1 \end{bmatrix}$$

とおく. 上記のような一般的な設定では解析は難しいので、特に原点だけ異なり、他はアダマール行列の以下の場合を考える.

$$U_0 = U_0(\omega), \quad U_x = U_x(0) \quad (x \neq 0).$$

従って、このモデルは $\omega (= \omega_0)$ だけがパラメータで、 $\omega \neq 0$ ならば、原点以外は空間的に一様である. そして、 $\omega = 0$ のときはアダマールウォークになる. 初期量子ビットとして $\varphi_* = {}^T[1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}]$ をとる. この初期量子ビットのもとでは、アダマールウォークの分布は対称となる.

時刻 n で原点に戻る確率を $p_n(0)$ としたとき、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n(0) > 0$ のときに原点で局在化が起きると定義した. $\omega = 0$ のアダマールウォークの場合には、 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n}^{(H)}(0) = 0$ が知られており局在化が起きない. 一般の $\omega \in [0, 2\pi)$ に対しては、組合せ論的手法を用い Konno (2010) により以下の結果が得られた.

定理 6.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n}(0) = \left(\frac{2(1 - \cos \omega)}{3 - 2 \cos \omega} \right)^2 =: c(\omega).$$

ここで、 $c(\omega)$ の形は図 6.1 で与えられる. 従って、原点だけ異なり、空間的に非一様になったとたんに局在化が起きるとい興味深い結果が得られた. また、対応する古典系ではこの種の局在化は起こらない.

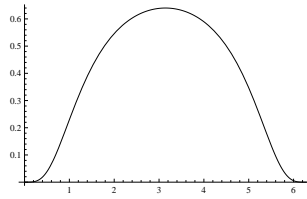


図 6.1: $c(\omega)$ のグラフ

6.2 他のモデルとの比較

前述のモデルとは異なり U_x を以下で定めると、局在化が全く起こらないことなどが Konno (2009) により調べられている。

$$U_x = U_x(\omega_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\omega_x} & 1 \\ 1 & -e^{-i\omega_x} \end{bmatrix}.$$

より一般的な one defect のある設定での局在化の判定条件について、Cantero, Grünbaum, Moral and Velázquez (2012) は調べている。さらに他の関連する \mathbb{Z} 上のモデルとの関係について述べる。コイン作用素が場所に依存しない、空間的に一様な場合には、定理 2.3 より $abcd \neq 0$ の場合、また $b = 0$ の場合は局在化は起きない。既に述べたように、3 状態の空間的に一様な場合は Inui, Konno and Segawa (2005) で、4 状態の場合は Inui and Konno (2005) により局在化の存在が示された。Linden and Sharam (2009) では、コイン作用素が周期 $2k$ で変化する場合を研究し、 k が偶数のときは有界に留まり、 k が奇数のある場合には局在化が起きないことを示した。Shikano and Katsura (2010) では、コイン作用素が周期を持たないような場合には、有界に留まることを証明している。空間的にランダムなコインに関しては、Joye and Merkli (2010), Ahlbrecht, Scholz and Werner (2011), Joye (2012), Hamza and Joye (2012) の研究があり、アンダーソンの局在化との関連についても議論している。

今までのモデルはコイン作用素の列 $\{U_x : x \in \mathbb{Z}\}$ が場所に依存する場合であったが、同様に、時間に依存する場合 $\{U_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ も考えられる。実際に、ある種の独立な確率変数列の場合には、Mackay, Bartlett, Stephenson and Sanders (2002), Ribeiro, Milman and Mosseri (2004) はシミュレーションにより、ランダムウォークの分布に近づくことを報告し、Konno (2005b) により組合せ論的手法で証明された。Chandrashekar (2011) は別のクラスの独立な確率変数列の場合には局在化が起きることを示唆するシミュレーションの結果を報告している。2 周期の場合の極限定理に関しては、Machida and Konno (2010) で得られている。時間的にランダムなコインに関しては、Joye (2011), Ahlbrecht, Vogts, Werner and Werner (2011) の研究がある。さらに、時空間的にランダムなコインの場合は、Ahlbrecht, Cedzich, Matjeschk, Scholz, Werner and Werner (2012) がある。このように、空間依存、時間依存、時空間依存の量子ウォークの数学的研究は今後の興味深い課題である。

7 未来に向けて

現在、離散時間量子ウォークの解析には、組合せ論的手法、フーリエ解析、停留位相法、母関数、CGMV 法等があり、それら相互の関係を明らかにすることにより、多状態や一般のグラフの上の挙動の研究が可能となりえよう。今後の流れとしては、

[1] 伊原ゼータ関数と量子ウォークとの関係 (Konno and Sato (2012))

[2] 極限の密度関数 $f_K(x; r)$ とホインの微分方程式 (確定特異点が 4 個) との関係⁴⁾ (Konno, Machida

⁴⁾ ガウス分布の場合には超幾何微分方程式 (確定特異点が 3 個) が対応していた。

and Wakasa (2012))

- [3] 極限密度関数 $f_K(x; r)$ の背後にある「独立性」の構造 (関連する文献として, Hamada, Konno and Mlotkowski (2009))⁵⁾
- [4] パス空間を通しての量子ウォークの理解 (Konno (2011), Konno and Segawa (2012a, 2012b))
- [5] 再帰性の定義と計算方法 (例えば, Stefanak, Jex and Kiss (2008), Stefanak, Kiss and Jex (2008), Grünbaum, Velázquez, Werner and Werner (2013))
- [6] パロンドゲームの量子ウォーク版 (例えば, Chandrashekar and Banerjee (2011), Flitney (2012), Li, Zhang and Guo (2013))
- [7] 観測頻度による古典から量子へのクロスオーバー (Shikano, Chisaki, Segawa and Konno (2010), Chisaki, Konno, Segawa and Shikano (2011))
- [8] フラクタル上の量子ウォークの解析 (Patel and Raghunathan (2012))
- [9] 量子グラフと量子ウォークとの関係 (Higuchi, Konno, Sato and Segawa (2012a, 2012b))
- [10] グラフ上のグローヴァーウォークの挙動 (Higuchi, Konno, Sato and Segawa (2012c))
- [11] 複雑ネットワーク上の量子ウォークに向けての研究 (Konno, Obata and Segawa (2012))
- [12] 特異連続スペクトルを持つ量子ウォークの解析 (Grünbaum and Velázquez (2012))
- [13] 時空間に依存した量子ウォークの研究 (Shikano, Wada and Horikawa (2013))
- [14] Open quantum random walk との関係 (Attal, Petruccione, Sabot and Sinayskiy (2012), Attal, Guillotin-Plantard and Sabot (2012), Konno and Yoo (2013))

その他, 本稿で扱えなかった話題も多い. このように, 基本的な数学の問題だけでなく, 応用の問題も含め, 量子ウォークは様々な分野で魅力あるテーマになりつつある.

参考文献

- Aharonov, D., Ambainis, A., Kempe, J., and Vazirani, U. V. (2001). Quantum walks on graphs, Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 50-59, quant-ph/0012090.
- Ahlbrecht A., Cedzich, C., Matjeschk, R., Scholz, V. B., Werner, A. H., and Werner, R. F. (2012). Asymptotic behavior of quantum walks with spatio-temporal coin fluctuations, *Quantum Inf. Process.*, **11**, 1219–1249.
- Ahlbrecht, A., Scholz, V. B., and Werner, A. H. (2011). Disordered quantum walks in one lattice dimension, *J. Math. Phys.*, **52**, 102201.
- Ahlbrecht, A., Vogts, H., Werner, A. H., and Werner, R. F. (2011). Asymptotic evolution of quantum walks with random coin, *J. Math. Phys.*, **52**, 042201.
- Ambainis, A., Bach, E., Nayak, A., Vishwanath, A., and Watrous, J. (2001). One-dimensional quantum walks, Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 37–49.
- Attal, S., Guillotin-Plantard, N., and Sabot, C. (2012). Central limit theorems for open quantum random walks, arXiv:1206.1472
- Attal, S., Petruccione, F., Sabot, C., and Sinayskiy, I. (2012). Open quantum random walks. *J. Stat. Phys.*, **147**, 832–852.
- Cantero, M. J., Grünbaum, F. A., Moral, L., and Velázquez, L. (2010). Matrix valued Szegő polynomials and quantum random walks. *Comm. Pure Appl. Math.*, **63**, 464–507.
- Cantero, M. J., Grünbaum, F. A., Moral, L., and Velázquez, L. (2012). One-dimensional quantum walks with one defect, *Reviews in Math. Phys.*, **24**, No.02.
- Chandrashekar, C. M. (2011). Disordered-quantum-walk-induced localization of a Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. A*, **83**, 022320.

⁵⁾量子確率論の側面より単調独立性の極限分布である逆正弦則は $\omega_1, \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \dots$ なる場合に対応するが, 上記 f_K が $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = \omega_4 = \dots$ なるパラメータに対応する.

- Chandrashekar, C. M., and Banerjee, S. (2011). Parrondo's game using a discrete-time quantum walk, *Phys. Lett. A*, **375**, 1553–1558.
- Chisaki, K., Hamada, M., Konno, N., and Segawa, E. (2009). Limit theorems for discrete-time quantum walks on trees, *Interdiscip. Inform. Sci.*, **15**, 423–429.
- Chisaki, K., Konno, N., and Segawa, E. (2012). Limit theorems for the discrete-time quantum walk on a graph with joined half lines, *Quantum Inf. Comput.*, **12**, 314–333.
- Chisaki, K., Konno, N., Segawa, E., and Shikano, Y. (2011). Crossovers induced by discrete-time quantum walks, *Quantum Inf. Comput.*, **11**, 741–760.
- Crespi, A., Osellame, R., Ramponi, R., Giovannetti, V., Fazio, R., Sansoni, L., De Nicola, F., Mataloni, F. S. P. (2013). Anderson localization of entangled photons in an integrated quantum walk, *Nature Photonics*, **7**, 322–328.
- Flitney, A. P. (2012). Quantum Parrondo's games using quantum walks, arXiv:1209.2252.
- Grimmett, G., Janson, S., and Scudo, P. F. (2004). Weak limits for quantum random walks, *Phys. Rev. E*, **69**, 026119.
- Grünbaum, F. A., and Velázquez, L. (2012). The quantum walk of F. Riesz, In: Cucker, F., Krick, T., Pinkus, A., Szanto, A. (eds.) *Proceedings of FoCAM2011*. London Mathematical Society Lecture Notes Series, 403, pp.93–112, Nov. 2012.
- Grünbaum, F. A., Velázquez, L., Werner, A. H., and Werner, R. F. (2013). Recurrence for discrete time unitary evolutions, *Commun. Math. Phys.*, **320**, 543–569.
- Gudder, S. P. (1988). *Quantum Probability*. Academic Press Inc., CA.
- Hamada, M., Konno, N., and Mlotkowski, W. (2009). Orthogonal polynomials induced by discrete-time quantum walks in one dimension, *Interdiscip. Inf. Sci.*, **15**, 367–375.
- Hamza, E., and Joye, A. (2012). Spectral transition for random quantum walks on trees, arXiv:1212.6078.
- Higuchi, Y., Konno, N., Sato, I., and Segawa, E. (2012a). Quantum graph walks I: mapping to quantum walks, *Yokohama Math. J.* (in press), arXiv:1211.0803.
- Higuchi, Y., Konno, N., Sato, I., and Segawa, E. (2012b). Quantum graph walks II: Quantum walks on graph coverings, *Yokohama Math. J.* (in press), arXiv:1211.4719.
- Higuchi, Y., Konno, N., Sato, I., and Segawa, E. (2012c). The square and cube of the transition matrix of the discrete-time quantum walk on a graph, arXiv:1207.4987.
- Inui, N., Konishi, Y., and Konno, N. (2004). Localization of two-dimensional quantum walks, *Phys. Rev. A*, **69**, 052323.
- Inui, N., and Konno, N. (2005). Localization of multi-state quantum walk in one dimension, *Physica A*, **353**, 133–144.
- Inui, N., Konno, N., and Segawa, E. (2005). One-dimensional three-state quantum walk, *Phys. Rev. E*, **72**, 056112.
- Joye, A. (2011). Random time-dependent quantum walks, *Commun. Math. Phys.*, **307**, 65–100.
- Joye, A. (2012). Dynamical localization for d-dimensional random quantum walks, *Quantum Inf. Process.*, **11**, 1251–1269.
- Joye, A., and Merkli, M. (2010). Dynamical localization of quantum walks in random environments, *J. Stat. Phys.*, **140**, 1–29.
- Kempe, J. (2003). Quantum random walks - an introductory overview, *Contemp. Phys.*, **44**, 307–327.
- Kendon, V. (2007). Decoherence in quantum walks - a review, *Math. Struct. in Comp. Sci.*, **17**, 1169–1220.
- Konno, N. (2002a). Quantum random walks in one dimension, *Quantum Inf. Process.*, **1**, 345–354.
- Konno, N. (2002b). Limit theorems and absorption problems for quantum random walks in one dimension, *Quantum Inf. Comput.*, **2**, 578–595.
- Konno, N. (2005a). A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk, *J. Math. Soc. Jpn.*, **57**, 1179–1195.

- Konno, N. (2005b). A path integral approach for disordered quantum walks in one dimension, *Fluct. Noise Lett.*, **5**, L529–L537.
- 今野紀雄. (2008a). 量子ウォークの数理, 産業図書.
- Konno, N. (2008b). Quantum Walks, Lecture Notes in Mathematics, **1954**, 309–452, Springer-Verlag.
- Konno, N. (2009). One-dimensional discrete-time quantum walks on random environments, *Quantum Inf. Process.*, **8**, 387–399.
- Konno, N. (2010). Localization of an inhomogeneous discrete-time quantum walk on the line, *Quantum Inf. Process.*, **9**, 405–418.
- Konno, N. (2011). A note on Itô’s formula for discrete-time quantum walk, *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience* (in press), arXiv:1112.4335.
- Konno, N., Łuczak, T., and Segawa, E. (2013). Limit measures of inhomogeneous discrete-time quantum walks in one dimension, *Quantum Inf. Process.*, **12**, 33–53.
- Konno, N., and Machida, T. (2010). Limit theorems for quantum walks with memory, *Quantum Inf. Comput.*, **10**, 1004–1017.
- Konno, N., Machida, T., and Wakasa, T. (2012). The Heun differential equation and the Gauss differential equation related to quantum walks, *Yokohama Math. J.*, **58**, 53–63.
- Konno, N., and Sato, I. (2012). On the relation between quantum walks and zeta functions *Quantum Inf. Process.*, **11**, 341–349.
- Konno, N., and Segawa, E. (2011). Localization of discrete-time quantum walks on a half line via the CGMV method, *Quantum Inf. Comput.*, **11**, 485–495.
- Konno, N., and Segawa, E. (2012a). On the entropy of decoherence matrix for quantum walks, *Yokohama Math. J.*, **58**, 65–78.
- Konno, N., and Segawa, E. (2012b). Weak convergence of complex-valued measure for bi-product path space induced by quantum walk, *Yokohama Math. J.* (in press), arXiv:1208.6089.
- Konno, N., and Segawa, E. (2013). One-dimensional quantum walks via generating function and the CGMV method, arXiv:1305.1722.
- Konno, N., Obata, N., and Segawa, E. (2012). Localization of the Grover walks on spidersnets and free Meixner laws, *Commun. Math. Phys.* (in press), arXiv:1206.4422.
- Konno, N., and Yoo, H. J. (2013). Limit theorems for open quantum random walks, *J. Stat. Phys.*, **150**, 299–319.
- Li, M., Zhang, Y-S., and Guo, G-C. (2013). Quantum Parrondo’s games constructed by quantum random walk, arXiv:1303.6831.
- Linden, N., and Sharam, J. (2009). Inhomogeneous quantum walks, *Phys. Rev. A*, **80**, 052327.
- Liu, C. Asymptotic distributions of quantum walks on the line with two entangled coins, *Quantum Inf. Process.*, **11**, 1193–1205.
- Liu, C., and Petulante, N. (2009). One-dimensional quantum random walks with two entangled coins, *Phys. Rev. A*, **79**, 032312.
- Liu, C., and Petulante, N. (2012). A weak limit theorem for quantum walks on the half-line, arxiv:1212.1109.
- Machida, T. (2011). Limit theorems for a localization model of 2-state quantum walks, *International Journal of Quantum Information*, **9**, 863–874.
- Machida, T. (2012) A quantum walk with a non-localized initial state: contribution from a coin-flip operator, arXiv:1203.5396.
- Machida, T. (2013) Realization of the probability laws in the quantum central limit theorems by a quantum walk, *Quantum Inf. Comput.*, **13**, 430–438.
- Machida, T., and Konno, N. (2010). Limit theorem for a time-dependent coined quantum walk on the line, IWNC 2009, Proceedings in Information and Communications Technology, **2**, 226–235.

- Mackay, T. D., Bartlett, S. D., Stephenson, L. T., and Sanders, B. C. (2002). Quantum walks in higher dimensions, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**, 2745–2753.
- Oka, T., Konno, N., Arita, R., and Aoki, H. (2005). Breakdown of an electric-field driven system: a mapping to a quantum walk, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 100602.
- Patel, A., and Raghunathan, K. S. (2012). Search on a fractal lattice using a quantum random walk, *Phys. Rev. A*, **86**, 012332.
- Ribeiro, P., Milman, P., and Mosseri, R. (2004). Aperiodic quantum random walks, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 190503.
- Segawa, E., and Konno, N. (2008). Limit theorems for quantum walks driven by many coins, *Int. J. Quantum Inf.*, **6**, 1231–1243.
- Shikano, Y., Chisaki, K., Segawa, E., and Konno, N. (2010). Emergence of randomness and arrow of time in quantum walks, *Phys. Rev. A*, **81**, 062129.
- Shikano, Y., and Katsura, H. (2010). Localization and fractality in inhomogeneous quantum walks with self-duality, *Phys. Rev. A*, **82**, 031122.
- Shikano, Y., Wada, T., and Horikawa, J. (2013). Nonlinear discrete-time quantum walk and anomalous diffusion, arXiv:1303.3432.
- Stefanak, M., Jex, I., and Kiss, T. (2008). Recurrence and Polya number of quantum walks, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 020501.
- Stefanak, M., Kiss, T., and Jex, I. (2008). Recurrence properties of unbiased coined quantum walks on infinite d -dimensional lattices, *Phys. Rev. A*, **78**, 032306.
- Tregenna, B., Flanagan, W., Maile, R., and Kendon, V. (2003). Controlling discrete quantum walks: coins and initial states, *New J. Phys.*, **5**, 83.
- Venegas-Andraca, S. E. (2008). *Quantum Walks for Computer Scientists*, Morgan and Claypool.
- Venegas-Andraca, S. E. (2012). Quantum walks: a comprehensive review, *Quantum Inf. Process.*, **11**, 1015–1106.
- Watabe, K., Kobayashi, N., Katori, M., and Konno, N. (2008). Limit distributions of two-dimensional quantum walks, *Phys. Rev. A*, **77**, 062331.