分割に付随するウエイトの積
ー 論文の下の下書き（げのげがき）ー

山田裕史（岡山大学理学部数学科）

1　はじめに

3 年ぶりに室蘭を訪れた．3ヶ月のカリフォルニア滞在から帰国して間もない頃だったので，その寒さが堪えた．よく言えば「身を引き締めた.」ホストの森田氏が「今日は温度がプラスでしょう．あったかいですよ」と嫌がらせを言うのを軽く受け流す．談話会は稚内から来た安東氏と私の 2 本立てだ．室蘭工大での修論発表会が近いとあって，学生も先生もそわそわしている中で行われた．安東氏が最近のオリジナルな話をする．岡山にいた頃に考えていた仕事に手を入れて，ずいぶんすっきりとした形になっているのを見て嬉しく思った.「弟子の活躍に目を細めているようではダメだ」と自らを奮い立たせる．とはいえ，私の話はここ数年の（安東，鈴木両氏との）共同研究をまとめたものである．もう論文 [ASY] も出版間近であり，自身のときめきは大分薄まってしまっているのが残念だ．でも室蘭では初めて聴く方ばかりなので,「面白そうに話す」というパフォーマンスに徹することにする．熱心に聴いて下さった皆さんに感謝する．例によって夜遅くまで続いた歓迎会も印象的であった．

[ASY] では A 型の岩堀－ヘッケ環の次数付きカルタン行列の行列式の表示を与え，あわせてその単因子型の予想式を提示した．そこでは土岡 [T] による，$A_\ell^{(1)}$ 型量子アフィンリー環の基本表現のシャポヴァロフ形式のグラム行列式の表示を用いた．2011 年の代数学シンポジウム報告集所収の原稿 [Y] もご覧いただきたい.（印刷物はどうやら存在しないみたいだ．ネットで公開されているだけらしい.）

我々の次なる目標は $A^{(2)}_{2\ell}$ 型量子アフィンリー環について同様の結果を得ることである．本稿では 3 種類のウエイトを定義してそれらの積が一致することを証明しておく．ウエイト自体は一般の設定で定義されるが，一致する積が，設定を特殊化することにより，量子アフィンリー環のシャポヴァロフ形式のグラム行列式を与えていることを期待している．ただし本稿は組合せ論的な議論のみに焦点を絞る．一応，談話会の報告のつもりだが，講演内容のちょっとだけ先を書いている．もちろんこの部分も稚内の安東雅訓，岡山の同僚，鈴木武史との共同研究である．

本稿を通してサイズが n の分割（resp. ストリクト分割）全体を $P(n)$ (resp. $SP(n)$) で表し，$P=\bigcup_{n=0}^{\infty}P(n)$ (resp. $SP=\bigcup_{n=0}^{\infty}SP(n)$) とする．

2　各種のウエイト　その 1

本節では復習もかねて，アフィンリー環 $A^{(1)}_{\ell}$ に関連するウエイトをまとめておく．記号の整理もするのであるが，[ASY] とは異なる場合もある．混乱を引き起こしたとすればお許しいただきたい．ついでに注意しておくと，本稿では「full カルタン行列」ではなくすべてブロックに対応する議論をしている．アフィンリー環の基本表現におけるウエイト空間上の議論と言っても同じことだ．Full カルタン行列に移るためには（ハード）コアの影響を加味しなければならない．

まず自然数 $\ell \geq 1$ を固定し，多重分割の集合を 2 つ定義する．自然数 n に対して

$$M_\ell(n) := \{\underline{\lambda}=(\lambda^1,\lambda^2,\dots,\lambda^\ell);\ \lambda^i\in P,\ \sum_{i=1}^{\ell}|\lambda^i|=n\},$$

$$Y_\ell(n) := \{\underline{\mu}=(\mu^1,\mu^2,\dots,\mu^\ell);\ \mu^i\in SP,\ (\mu^i)^H=\emptyset,\ \sum_{i=1}^{\ell}|\mu^i|=2n\}.$$

ここで $(\mu)^H$ はストリクト分割 μ のハードコアを表す．

補題 2.1. 自然数 $\ell \geq 1$, $n \geq 1$ に対して $\big|M_\ell(n)\big| = \big|Y_\ell(n)\big|$. 両者の母函数は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big|Y_\ell(n)\big|q^n=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^k)^\ell}$$

である．

証明. $|M_\ell(n)|$ の母函数が $\prod_{k=1}^{\infty} 1/(1-q^k)^\ell$ で与えられることは明らかである．$|M_\ell(n)| = |Y_\ell(n)|$ であることは $\ell = 1$ の場合に示せば，あとは帰納的に話が進む．全単射証明を与えよう．つまり全単射

$$\eta : Y_1(n) \longrightarrow M_1(n)$$

を具体的に構成するのである．いま μ をサイズが $2n$ のストリクト分割でそのハードコア μ^H が $\emptyset$ であるものとする．よく知られた「ハードアバカス」の議論（例えば [NY]）により，μ には「ハードクオーシエント」$(\mu[0], \mu[1])$ が対応する．ここで $\mu[0]$ はストリクト分割，$\mu[1]$ は（制限のない）分割であり，$2|\mu[0]| + 4|\mu[1]| = 2n$ という条件を満たす．ストリクト分割 $\mu[0]$ は同じサイズの「奇数分割」$\widehat{\mu[0]}$ と全単射対応がつく．このことはオイラーにより母函数を用いた証明が与えられているが，のちほど具体的な全単射（Glaisher 対応）を紹介する．また $\mu[1]$ についてはすべての成分を 2 倍することにより「偶数分割」$2\mu[1]$ が作られる．$\widehat{\mu[0]}$ と $2\mu[1]$ をくっつけて大きい順に並べればサイズが n の（制限のない）分割ができる．これで全単射 η ができた． $\square$

自然数 $p \geq 2$ を固定する．当面 ℓ と独立で構わない．分割 $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots) \in P$ と，p で割り切れない正整数 i に対して次のような図形を考える．

$$D_i(\lambda) := \{(j,k) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2;\ 1 \leq k \leq m_i,\ p^j | k\}.$$

またこの図形の座標として現れる「升目」の全体を $\mathfrak{D}(n)$ で表そう．すなわち

$$\mathfrak{D}(n) := \{c = (\underline{\lambda}, i, j, k);\ \underline{\lambda} \in M_\ell(n),\ p \nmid i,\ (j,k) \in D_i(\lambda^\ell)\ \}.$$

$c = (\underline{\lambda}, i, j, k) \in \mathfrak{D}(n)$ に次のように 2 通りの数を書き入れる．

$$H(c) := \frac{k}{p^j}, \quad A(c) := ip^j.$$

不定元 Q_m $(m \geq 1)$ を準備して，次のようなウエイトを考える．

$$w_H(\underline{\lambda}) := \prod_{c=(\underline{\lambda},i,j,k) \in \mathfrak{D}(n)} Q_{H(c)}$$
$$w_A(\underline{\lambda}) := \prod_{c=(\underline{\lambda},i,j,k) \in \mathfrak{D}(n)} Q_{A(c)}.$$

右辺の積は $\underline{\lambda}$ を固定したときに $\mathfrak{D}(n)$ を渡るもの，という意味である．我々が定義したものだが，行きがかり上，$w_H(\underline{\lambda})$ を「Hill ウエイト」とよぶ．もう一方，$w_A(\underline{\lambda})$ は当面,「安東ウエイト」と呼ばせてもらう．どちらも $\underline{\lambda}$ の一つの成分，λ^ℓ にしかよらないことに注意．そこで記号の濫用だが，単独の分割に対しても $w_H(\lambda)$, $w_A(\lambda)$ 等と書く．

今ひとつのウエイトを定義するため，Glaisher 対応を復習しておく．一般には自然数 $p \geq 2$ を止めて n の p-正則分割全体 $P^{(p)}(n)$ と p-類正則分割全体 $P_{(p)}(n)$ の間の全単射であるが，本稿では $p = 2$ の場合，すなわちストリクト分割全体 $SP(n)$ と奇数分割全体 $OP(n)$ の間の全単射だけが必要なので，その場合のみ説明する．例を挙げよう．たとえば $\mu = (1245\ 12) \in SP(24)$ を考える．これに対応させたいのは同じサイズの奇数分割 $\widehat{\mu}$ である．操作は以下の通り．

$$\mu = (1245\ 12) \longmapsto (12456^2) \longmapsto (123^4 45) \longmapsto (12^3 3^4 5) \longmapsto (1^7 3^4 5) = \widehat{\mu}$$

一般に，μ の $(2i)$ という成分に対して，(i^2) と「横のものを縦にする」だけである．

$$(*) \quad (2i) \longmapsto (i^2)$$

この操作を可能な限り繰り返せば最終的に奇数分割 $\widehat{\mu}$ が出来上がるというわけである．

これを用いて Glaisher ウエイトを以下のように定義する．ストリクト分割 μ に対して，その Glaisher 像となる奇数分割を $\widehat{\mu} = (1^{m_1} 3^{m_3} \ldots)$ とする．そのとき

$$w_G(\mu) := \prod_{i; 2 \nmid i} \prod_{j \geq 1} (Q_{i2^{j-1}})^{\left[\frac{m_i}{2^j}\right]}.$$

要するに上の (*) という Glaisher 対応のステップに Q_i を付与し，すべてのステップについて積を取るのである．上の例では $w_G(\lambda) = Q_1^3 Q_2 Q_3^2 Q_6$ である．分割の組 $\underline{\mu} \in Y_\ell(n)$ に対しては

$$w_G(\underline{\mu}) := w_G(\mu^\ell)$$

と定義する．ここでも記号の濫用を許してもらおう．定義域をハードコアが $\emptyset$ であるストリクト分割，あるいはその ℓ 組に制限するところが，本稿のミソである．

次の定理は 本質的に [ASY] で与えられているが，復習のため再録する．

定理 2.2. 自然数 $\ell \geq 1$，$p \geq 2$ および $n \geq 1$ について

$$\prod_{\underline{\lambda} \in M_\ell(n)} w_H(\underline{\lambda}) = \prod_{\underline{\lambda} \in M_\ell(n)} w_A(\underline{\lambda}) = \prod_{\underline{\mu} \in Y_\ell(n)} w_G(\underline{\mu})$$

[ASY] ではこの形で述べられているわけではないが，証明はほぼ同様である．また本稿でも次節において，より一般に示す．

なお $\ell = 1$, $p = 2$ の場合には，多重集合として

$$\{w_A(\lambda); \lambda \in P(n)\} = \{w_G(\mu); \mu \in Y_1(n)\}$$

が示される．証明では補題 2.1 で構成された全単射が重要な役割を果たす．

3 各種のウエイト その 2

本節を通じて互いに素な自然数 $p, q \geq 2$ の組 (p, q) を固定する．アフィンリー環 $A_{2\ell}^{(2)}$ は $p = 2\ell + 1$，$q = 2$ の場合に対応する．

分割 $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots) \in P$ と，p でも q でも割り切れない自然数 i に対して次のような図形を考える．

$$D_i^{(2)}(\lambda) := \{(j, t, k) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^3;\ 1 \leq k \leq m_i,\ p^j | k, q^t | k\}.$$

またこの図形の座標として現れる「升目」の全体を $\mathfrak{D}^{(2)}(n)$ で表そう．すなわち，自然数 ℓ を固定して

$$\mathfrak{D}^{(2)}(n) := \{c = (\underline{\lambda}, i, j, t, k); \underline{\lambda} \in M_\ell(n), p \nmid i, q \nmid i, (j, t, k) \in D_i^{(2)}(\lambda^\ell)\}.$$

$c = (\underline{\lambda}, i, j, t, k) \in \mathfrak{D}^{(2)}(n)$ に次のように 2 通りの数を書き入れる．前節と同じ記号だが異なる量であることに注意．

$$H(c) := \frac{k}{p^j q^t}, \quad A(c) := i p^j q^t.$$

不定元 Q_m $(m \geq 1)$ を準備して，次のようなウエイトを考える．

$$w_H^{(2)}(\underline{\lambda}) := \prod_{c = (\underline{\lambda}, i, j, t, k) \in \mathfrak{D}^{(2)}(n)} Q_{H(c)}$$
$$w_A^{(2)}(\underline{\lambda}) := \prod_{c = (\underline{\lambda}, i, j, t, k) \in \mathfrak{D}^{(2)}(n)} Q_{A(c)}.$$

右辺の積は $\underline{\lambda}$ を固定したときに $\mathfrak{D}^{(2)}(n)$ を渡るもの，という意味である．ここだけの名称だが $w_H^{(2)}(\underline{\lambda})$ を Hill$^{(2)}$ ウエイト，$w_A^{(2)}(\underline{\lambda})$ を安東 $^{(2)}$ ウエイトと呼ぼう．どちらも $\underline{\lambda}$ の一つの成分，λ^ℓ にしかよらないことに注意．そこでまたしても記号の濫用だが，単独の分割に対しても $w_H^{(2)}(\lambda), w_A^{(2)}(\lambda)$ 等と書く．

定理 3.1. 互いに素な自然数の組 (p,q)，$p,q \geq 2$，自然数 $\ell \geq 1$，および自然数 $n \geq 1$ について

$$\prod_{\underline{\lambda}\in M_\ell(n)} w_H^{(2)}(\underline{\lambda}) = \prod_{\underline{\lambda}\in M_\ell(n)} w_A^{(2)}(\underline{\lambda}) = \prod_{\underline{\mu}\in Y_\ell(n)} w_G(\underline{\mu})$$

この定理において，Glaisher ウエイト $w_G(\underline{\mu})$ は前節で考えられているものと同じであることに注意してほしい．定理 2.2 と合わせれば，結局考えたウエイトのしかるべき積がすべて等しい，という結果を得る．

証明の前に一つだけ例をお見せしよう．$(p.q) = (2,3)$，$\ell = 1$，$n = 5$ の場合のそれぞれのウエイトを表にしてみる．

λ	$w_H^{(2)}(\lambda)$	$w_A^{(2)}(\lambda)$
(5)	Q_1	Q_5
(41)	Q_1	Q_1
(32)	1	1
(31^2)	$Q_1^2Q_2$	$Q_1^2Q_2$
(2^21)	Q_1	Q_1
(21^3)	$Q_1^3Q_2Q_3$	$Q_1^3Q_2Q_3$
(1^5)	$Q_1^4Q_2^2Q_3Q_4Q_5$	$Q_1^5Q_2^2Q_3Q_4$

μ	$w_G(\mu)$
(10)	Q_5
(82)	$Q_1^5Q_2^2Q_4$
(721)	Q_1
(64)	$Q_1^2Q_2Q_3$
(631)	Q_3
(532)	Q_1
(4321)	$Q_1^3Q_2$

どのコラムも積を取れば　$Q_1^{12}Q_2^4Q_3^2Q_4Q_5$　であることがわかる．

証明． 前半の等式について．集合 $\mathfrak{D}^{(2)}(n)$ における対合的写像 $\theta^{(2)}$ を与えよう．$c=(\underline{\lambda},i,j,t,k)\in\mathfrak{D}^{(2)}$ に対して，k の p-部分，q-部分をそれぞれ $(k)_p=p^{j+j^*}$, $(k)_q=q^{t+t^*}$ とおく．この式は j^*, $t^*\geq 0$ を定義しているのである．また $i^*:=k/(k)_p(k)_q$ とおく．つまり $k=i^*p^{j+j^*}q^{t+t^*}$ である．ここで $k^*:=ip^{j+j^*}q^{t+t^*}$ とおく．また λ^ℓ には (i^k) という部分が含まれるが，その長方形を取り去った分割を ν と書こう．すなわち $\lambda^\ell=\nu+(i^k)$ とする．そして

$$\underline{\lambda}^*:=(\lambda^1,\lambda^2,\ldots,\lambda^{\ell-1},\nu+(i^{*k^*}))$$

とする．

　これらを用いて

$$\theta^{(2)}(c)=(\underline{\lambda}^*,i^*,j^*,t^*,k^*)$$

と定義する．

　このとき $\theta^{(2)}(c)\in\mathfrak{D}^{(2)}(n)$ であり，星印 $(*)$ の付け外しにより，$(\theta^{(2)})^2=id$ であることがわかる．また

$$H(\theta^{(2)}(c))=\frac{k^*}{p^{j^*}q^{t^*}}=\frac{ip^{j+j^*}q^{t+t^*}}{p^{j^*}q^{t^*}}=ip^jq^t=A(c)$$

より，積が等しいことが証明された．

　定理の後半の証明を与えておこう．補題 2.1 があるので，単独の分割についてのみ示せばよい．つまり

$$\prod_{\lambda\in P(n)}w_A^{(2)}(\lambda)=\prod_{\mu\in SP(2n),\mu^H=\emptyset}w_G(\mu)$$

を示せば十分である．多重分割は，登場するウエイトの「重複度」を合わせる役割のみを負っているのである．

　以前に [ASY] で，このときはアフィンリー環 $A_1^{(1)}$ の設定だが，単項式

$$\prod_{\mu\in SP(2n),\mu^H=\emptyset}w_G(\mu)$$

における文字 Q_i の個数（次数）が $\sum_{\lambda\in P(n)} m_i(\lambda)$ に等しいことが示されている．

安東 $^{(2)}$ ウエイトの定義から，$\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\ldots)$ のとき

$$w_A^{(2)}(\lambda)=\prod_{i;p\nmid i,q\nmid i}\prod_{j,t\geq 0}(Q_{ip^jq^t})^{\left[\frac{m_i}{p^jq^t}\right]}$$

となることがわかる．

ここで一般に $i=\alpha\beta$ と自然数の積に分解するとき

$$\sum_{\lambda\in P(n)}\left[\frac{m_\alpha(\lambda)}{\beta}\right]=\sum_{\lambda\in P(n)} m_i(\lambda)$$

に注意する．この事実は，言われれば当たり前であることがすぐにわかる．各分割について (i^m) という部分と $(\alpha^{m\beta})$ という部分を入れ替えればよい．この対応が全単射証明を与える．もしお好きならば母函数を用いた証明もできる．母函数は次のようになる．

$$\sum_{\lambda\in P} m_i(\lambda)\,q^{|\lambda|}=\frac{q^i}{1-q^i}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^k}.$$

安東 $^{(2)}$ ウエイトの積における Q_i の個数は（i の役割を変えている）$\beta=(i)_p(i)_q$, $\alpha=i/\beta$ と置くことにより $\sum_{\lambda\in P(n)} m_i(\lambda)$ に等しいことがわかる．これで証明が終わる． □

本節では互いに素な自然数の組 (p,q) に対してウエイトを定義したが，更なる一般化も可能である．2 以上の自然数の s 組 $(p_1,p_2,\ldots,p_s)$ において，どの 2 つも互いに素である場合には「Hill$^{(s)}$ ウエイト」,「安東 $^{(s)}$ ウエイト」が自然に定義される．そうして対応する積が，Glaisher ともども一致することが示される．また一般の場合に定式化しておけば，第 2 節のものは $p_i\to\infty$ $(i\geq 2)$, 第 3 節のものは $p_i\to\infty$ $(i\geq 3)$ のように「退化した場合」と考えることもできる．

このようなウエイトを考え始めたのは [LLT] の表を見て岩堀－ヘッケ環のカルタン行列の不変量を計算してみようと思ったことによる．行列

式や単因子（単因子型）は表現論的に深い量であると感じているのであるが，組合せ論的には本稿に見るように実に単純な量であることが判明した.「何をどう計算しても同じものになる！」個人的には少々がっかりもしたが，逆に，これはこれで組合せ論の奥深さの証左であると納得した次第である．論文の形にして残しておこうと考えている昨今である．

参考文献

[ASY] M. Ando, T. Suzuki and H. -F. Yamada, Combinatorics for graded Cartan matrics for the Iwahori-Hecke algebras of type A, Ann. Comb. (in press).

[NY] T. Nakajima and H. -F. Yamada, Schur's Q-functions and twisted affine Lie algebras, Advanced Studies in Pure Mathematics 28 (2000), 241–259

[LLT] A. Lascoux, B. Leclerc and J.-Y. Thibon, Hecke algebras at root of unity and crystal bases of quantum affine algebras, Commun. Math. Phys. 81 (1996), 105-263.

[T] S. Tsuchioka, Graded Cartan determinants of the symmetric groups, preprint 2012.

[Y] 山田裕史，対称群のカルタン行列にまつわる組合せ論，代数学シンポジウム報告集 (2011).