内村型 $q-$ 恒等式の組合せ論的理解と一般化

安東雅訓 (稚内北星学園大学)

1 はじめに

文字 q に関する式が与えられたとき, 母関数として見ることでそれを組合せ論的に理解するということができる（私の中では「組合せ論的に」という言葉は「ヤング図形で」と自動翻訳される）. 理解といってもこじ付けのようなものもあれば, 一見しただけでは元となった式との関連が分からないものまで様々だ. これが恒等式になれば組合せ論の側でも恒等式としての理解ができる. この話の中で扱う $q-$ 恒等式 [3] は約数関数と関連したもので, 色々な一般化が知られている. 証明方法も式変形, 超幾何関数の特殊化といくつか知られているが, ここでは組合せ論の話として証明をする. 式変形での証明と組合せ論の証明は同値だろうと言われる方があるかもしれない. 確かにそういう例もあるが, 組合せ論に翻訳しようのない式変形もあるんだと言い訳しておく.

2 ヤング図形

定義 2.1. 自然数の減少列 $\lambda = (\lambda_1\ \lambda_2\ \dots\ \lambda_\ell)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell \geq 1$ を分割と呼ぶ. λ の成分の個数 ℓ を λ の長さと呼び $\ell(\lambda)$ で表す. $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$ を λ の大きさと呼び $|\lambda|$ で表す. $|\lambda| = n$ であるとき λ は n の分割であるという. 分割全体の集合を $\mathcal{P}$, n の分割全体の集合を $\mathcal{P}(n)$ で表す. また, 成分が相異なる分割全体の集合を $\mathcal{SP}$ で表す.

定義 2.2. 分割 $\lambda = (\lambda_1\ \lambda_2\ \dots\ \lambda_l)$ に対してヤング図形 $Y(\lambda)$ を次で定義する.

$$Y(\lambda) := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

また, λ の角の集合 $C(\lambda)$ を次で定義し,

$$C(\lambda) := \{(i,j) \in Y(\lambda) \mid (i+1,j), (i,j+1) \notin Y(\lambda)\}$$

その個数を $c(\lambda)$ で表す.

定義 2.3. $\lambda = (\lambda_1\ \lambda_2\ \dots\ \lambda_l)$, $(i,j) \in Y(\lambda)$ について、(i,j)-フック $H_{ij}(\lambda)$ を次で定義する.

$$H_{ij}(\lambda) := \{(i',j') \in Y(\lambda) \mid i' = i, j' \geq j \ \text{ または } \ j' = j, i' \geq i\ \}$$

$h_{ij}(\lambda) := \sharp H_{ij}(\lambda)$ を λ の (i,j)-フック長という. また,

$$a_{ij}(\lambda) := \sharp\{(i',j') \in h_{ij}(\lambda) \mid i' = i, j' \geq j\} = \lambda_i - j + 1$$

$a_{ij}(\lambda)$ を λ の (i,j)-腕長という.
注意： 話の都合上, 一般的な arm length の定義とは 1 だけ差がある.

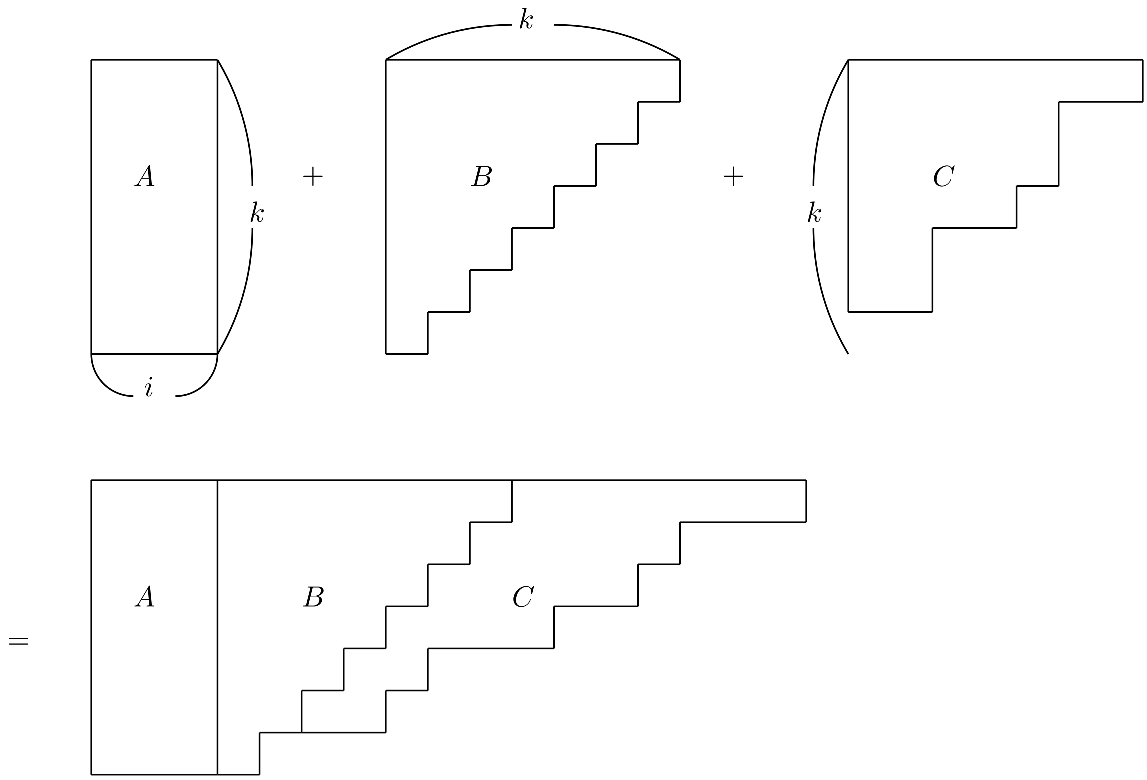
3 約数関数の $q-$ 恒等式

定理 3.1 (Problem 6407)**.**

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k\frac{q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(q;q)_k(1-q^k)}=\sum_{k\geq 1}\frac{q^k}{1-q^k}$$

ここで $(a;b)_k=(1-a)(1-ab)(1-ab^2)\cdots(1-ab^{k-1})$ である.

この式をヤング図形の話に直して組合せ論的に証明する. まず, $q^{\frac{k(k+1)}{2}}$ は図での B のような階段だと思う. $\dfrac{1}{(q;q)_k}$ は普通は成分が k 以下の分割の母関数だと思うが, ここではその共役, 図では C の成分の個数が k 以下の分割の母関数だと思うことにする. この二つをくっつければ成分が相異なる分割になる. 残った $\dfrac{1}{1-q^k}$ は図の A. 縦の長さ k の長方形 (横の長さは 0 も許す) の母関数だ. この 3 つを図のようにくっつけて符号 $(-1)^{k-1}$ をつけたものが式の左辺を展開した各項となる.



さて, 合体してできた分割 λ を固定して, それを作る A,B,C の組を数えよう. 真ん中の階段を動かせば左右の分割は決まる. そして階段の動ける範囲は $\lambda_k,\ k=\ell(\lambda)$ であることが分かる. 階段を動

かしても $\ell(\lambda)$ は変わらないので, 符号の同じ λ が $\lambda_{\ell(\lambda)}$ コでてくる．よって式を書き直せば,

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{SP}}(-1)^{\ell(\lambda)-1}\lambda_{\ell(\lambda)}q^{|\lambda|}=\sum_{n\geq 1}\sigma_0(n)q^n \tag{1}$$

となることが分かる．ここで $\sigma_i(n)=\sum_{m|n}m^i$ である．今 $i=0$ なので右辺は約数の個数の母関数となっている．約数の個数を分割を使って数えようとすれば一番自然なのは長方形を数えることだ．つまり, 成分が一種類の分割と同じ成分を持たない分割とが等号で結ばれていることになる．

定理 3.2 (A.)**.** 任意の自然数 n,k に対して

$$\begin{aligned}
&\sharp\{\lambda\in\mathcal{SP}(n)|\lambda_1\geq k>\lambda_1-\lambda_\ell,\ell=\ell(\lambda):\text{奇数}\}\\
-&\sharp\{\lambda\in\mathcal{SP}(n)|\lambda_1\geq k>\lambda_1-\lambda_\ell,\ell=\ell(\lambda):\text{偶数}\}\\
=&\begin{cases}1 & (k\mid n)\\ 0 & (k\nmid n)\end{cases}
\end{aligned}$$

$a_{1,i}(\lambda)(i\leq\lambda_\ell)$ の値が k となる $\lambda\in\mathcal{SP}(n)$ を符号付きで数えていると思うことができる．

例. $n=5$ であれば

$$\begin{ytableau} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{ytableau} \quad - \quad \begin{ytableau} 4 & & & \\ \\ \end{ytableau} \quad - \quad \begin{ytableau} 3 & 2 & \\ & \end{ytableau}$$

$$= \qquad 5,1.$$

大きさ 5 の相異分割のヤング図形を用意し, 「底」のある 1 行目のマス目に腕長を入れたもの．数字を記号だと思い, 分割の長さで符号を付けての和をとれば 5 の約数のみが残る．

証明. (定理 3.2) 概要と例を述べる．まず一行目の $\lambda_{\ell(\lambda)}$ 列目までに腕長が k となるマス目を持つ相異分割の集合を考える．

$$\mathfrak{D}(n,k)=\{\lambda\in\mathcal{SP}(n)|\ \lambda_1-\lambda_l<k\leq\lambda_1\}.$$

例えば,

$$\mathfrak{D}(13,4)=\{(13),(8\ 5),(7\ 6),(6\ 4\ 3)\}.$$

ここで現れる分割の成分を k を法として見れば, k を法として 0 となる成分を含む分割とそうでない分割とに自然な対応が付く．この場合,

$$\mathfrak{D}(13,4)\equiv\{(1),(0\ 1),(3\ 2),(2\ 0\ 3)\}(\mathrm{mod}\ 4).$$

また, k が n を割り切る場合．例えば $n=12,k=4$ であれば,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}(12,4)&=\{(12),(7\ 5),(5\ 4\ 3)\}.\\
\mathfrak{D}(12,4)&\equiv\{(0),(3\ 1),(1\ 0\ 3)\}(\mathrm{mod}\ 4).
\end{aligned}$$

となり, k の倍数 1 つだけからなる分割が余る． $\square$

証明. (定理 3.1)
定理 2 の式を k について和をれば,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} = & \sum_{k\geq 1} \sharp\{\lambda \in \mathcal{SP}(n) | \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_\ell, \ell = \ell(\lambda) : \text{奇数}\} \\
& - \sum_{k\geq 1} \sharp\{\lambda \in \mathcal{SP}(n) | \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_\ell, \ell = \ell(\lambda) : \text{偶数}\} \\
= & \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}(n)} (-1)^{\ell(\lambda-1)} \lambda_{\ell(\lambda)}. \\
\text{右辺} = & \sigma_0(n).
\end{aligned}
$$

となり, これは (1) の q^n の係数である. □

定理 3.2 の k についての総和が定理 3.1 になったが, m 以下の k についての和をとれば Van Hamme による定理 1 の精密化 [4],

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{1-q^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{1-q^k}$$

が得られる. ここで $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ は $q-$ 二項級数.

系 3.3. $n = 2(2m+1)$ について,

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}(n)} \sharp\{h_{1,i}(\lambda) |\ i \leq \lambda_{\ell(\lambda)},\ \text{奇数}\} \\
= & \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}(n)} \sharp\{h_{1,i}(\lambda) |\ i \leq \lambda_{\ell(\lambda)},\ \text{偶数}\}
\end{aligned}
$$

例. $n = 6$.

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 6&5&4&3&2&1\\\hline\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 6&&&&\\\hline &\multicolumn{4}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5&4&&\\\hline &&\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-2}\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 5&&\\\hline &&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-2} &\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}
$$

定理 3.2 の例と同じ場所にフック長をいれたもの. 偶数と奇数の個数が等しい.

4 追加

定理 3.1 の一般化の内 Dilcher によるもの [2] を含む形に組合せ論の側を一般化する.

定理 4.1 (Dilcher's equation 1)**.** 任意の自然数 m に対して,

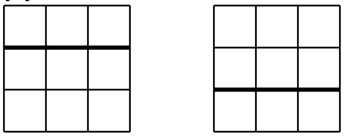
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{q^{\frac{k(k+1)}{2}+(m-1)k}}{(q;q)_k(1-q^k)^m} = \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{q^{j_1}}{1-q^{j_1}} \sum_{j_2=1}^{j_1} \frac{q^{j_2}}{1-q^{j_2}} \cdots \sum_{j_m=1}^{j_{m-1}} \frac{q^{j_m}}{1-q^{j_m}}.$$

定理 4.2 (Dilcher's equation 2)**.** 任意の自然数 n, m に対して,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{q^{\frac{k(k+1)}{2}+(m-1)k}}{(1-q^k)^m}\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] = \sum_{j_1=1}^{n}\frac{q^{j_1}}{1-q^{j_1}}\sum_{j_2=1}^{j_1}\frac{q^{j_2}}{1-q^{j_2}}\cdots\sum_{j_m=1}^{j_{m-1}}\frac{q^{j_m}}{1-q^{j_m}}.$$

右辺のシグマそれぞれは長方形だった．それをだんだん細くなるよう積をとっているので, 長方形を縦に m 個並べた形のヤング図形を数えている．ただし, 例えば 3×2 の長方形と 3×1 の長方形とを縦に並べたヤング図形とその逆 3×1 の長方形と 3×2 とを並べたヤング図形は同じ形であるが別物として数えている．

図.



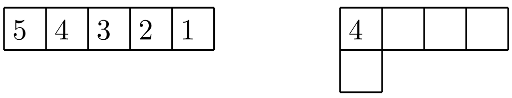
よって, 一つのヤング図形をもともとの切れ目が入っている角を含む m 本の線で切ることになり, $\binom{\ell(\lambda)-c(\lambda)}{m-c(\lambda)}$ 回数えている．一方左辺は今まで出てきた式に $\dfrac{q^k}{1-q^k}$ が m 個かかった形だが, これは相異分割はそのままでその重複度が $\lambda_{\ell}(\lambda)$ から $\binom{\lambda_{\ell(\lambda)}}{m}$ に一般化されたと思える．よって式を直せば,

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{SP}}(-1)^{\ell(\lambda)-1}\binom{\lambda_{\ell(\lambda)}}{m}q^{|\lambda|} = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}}\binom{\ell(\lambda)-c(\lambda)}{m-c(\lambda)}q^{|\lambda|}.$$

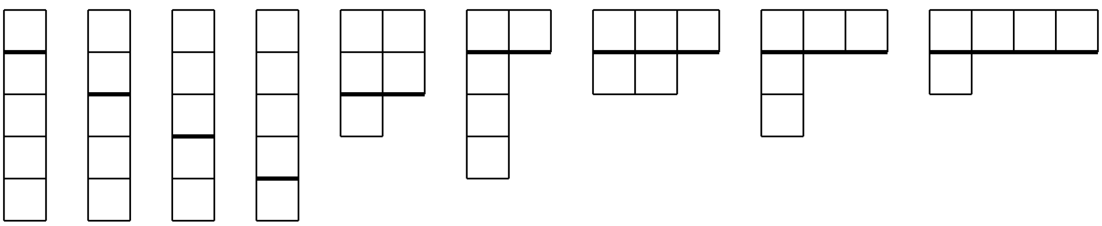
定理 4.3 (A.)**.** 任意の自然数 m, n, k に対して

$$\begin{aligned}
&\sharp\{(\lambda, i_1, \ldots, i_m) \mid \lambda\in\mathcal{SP}(n), 1\le i_1<\ldots<i_m\le\lambda_{\ell(\lambda)}, a_{1i_m}=k, \ell(\lambda):\text{奇数}\ \}\\
&-\sharp\{(\lambda, i_1, \ldots, i_m) \mid \lambda\in\mathcal{SP}(n), 1\le i_1<\ldots<i_m\le\lambda_{\ell(\lambda)}, a_{1i_m}=k, \ell(\lambda):\text{偶数}\ \}\\
&=\sharp\{(\lambda, t_1, \ldots, t_{m-c(\lambda)}) \mid \lambda\in\mathcal{P}(n), 1\le t_1<\ldots<t_{m-c(\lambda)}<\ell(\lambda), \lambda_1=k, \lambda_{t_i}=\lambda_{t_i+1}\}.
\end{aligned}$$

例. $n=5, m=2$ であれば



これらの腕長のペアを引き算している．符号 $+$ のヤング図形でのペアは $(5,1),(4,1),(3,1),(2,1),(5,2),(4,2),(3,2),(5,3),(4,3),(5,4)$ の 10 個, 符号 $-$ のペアは $(3,2)$ の一つ．一方長方形 2 つで作られるサイズ 5 のヤング図形は,



であり, ちょうど 9 個. さらに, ペアの小さい方の数字とヤング図形の一行目のサイズが対応している.

証明. 定理 3.2 に帰着させる. □

定理 4.4 (Dilcher の b-類似)**.** 任意の自然数 m に対して,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{b^k q^{\frac{k(k+1)}{2}+k(m-1)}}{(bq;q)_k(1-q^k)^m}=\sum_{j_1=1}^{\infty}\frac{b^{j_1}q^{j_1}}{1-q^{j_1}}\sum_{j_2=1}^{j_1}\frac{q^{j_2}}{1-q^{j_2}}\cdots\sum_{j_m=1}^{j_{m-1}}\frac{q^{j_m}}{1-q^{j_m}}.$$

証明. 両辺の $b^k q^n$ の係数を見れば定理 4.3 になっている. □

談話会では話せなかった一般化の式を加えた. 分割の大きさに限らず, 例でペアとしている部分を 3 つ組み 4 つ組みと一般化することもできるので, 興味があればもう少し大きい数字で実験してほしい.

5 終わりに

2 月だというのに室蘭の道路はアスファルトが見えていて, 稚内との気候の違いを感じました. 談話会での話はこちらが驚く程褒めてもらい, 自信になりました. 報告で追加した部分が蛇足にならないことを祈ります. 歓迎会ではありがたいお説教をいただき, バレンタインチョコも貰えてよかったです. 今回師匠のおまけでお邪魔させていただきましたが, 談話会の前に話した内容が出来ましたので是非また呼んでください.

参考文献

[1] Ando M.: A combinatorial proof of an identity for the divisor generating function. arXiv:1201.4216

[2] Dilcher, K.: Some q-series identities related to divisor functions. Discrete Math. 145, 83-93 (1995)

[3] Uchimura, K.: An identity for the divisor generating function arising from sorting theory. J. Comb. Theory, Ser. A 31, 131-135 (1981)

[4] Van Hamme, L.: Advanced problem 6407. Am. Math. Mon. 40, 703-704 (1982).