

空間型の中の等長はめ込み

本田 淳史^{*†}

東京工業大学 大学院理工学研究科

概要

本稿では、双曲平面から双曲空間への等長はめ込みと測地線の空間の null 曲線との対応を述べ、それにより得られる等長はめ込みの無限遠での挙動の分類を紹介する。また、球面の中の等長はめ込みの特異点を許容するクラスへの一般化である球面内の外的平坦閉フロントを考え、それらの分類を与える。分類の応用として、双対性と焦面に関する結果も述べる。

1 背景

定断面曲率 c を持つ n 次元空間型を $\Sigma^n(c)$ とする。同じ断面曲率を持つ空間型の中の等長はめ込み $f: \Sigma^2(c) \rightarrow \Sigma^3(c)$ はその曲率 c の符号により異なった様相を呈する。 $c = 0$ の場合、すなわちユークリッド空間の中の等長はめ込み $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ は、Hartman-Nirenberg の定理により柱面に限ることが知られている [4, 17]。また、 $c > 0$ の場合、すなわち球面の中の等長はめ込み $f: S^2 \rightarrow S^3$ は、O'Neill-Stiel の定理により全測地的となる [20]。このように、断面曲率が非負の場合にはそれらは自明なものに限ることが知られているが、 $c < 0$ の場合には非自明な例が存在することが知られている [19]。本稿では、断面曲率が負の場合、すなわち双曲空間の中の等長はめ込み $f: H^2 \rightarrow H^3$ を考察した結果を紹介する。

本稿の後半では、空間型の中の等長はめ込みの特異点を許容したクラスへの一般化である、外的平坦フロントに関する結果を紹介する。同じ断面曲率を持つ空間型の中の等長はめ込み $f: \Sigma^2(c) \rightarrow \Sigma^3(c)$ は $\Sigma^3(c)$ の完備な外的平坦曲面と同値である。さらに、3次元ユークリッド空間の外的平坦曲面は平坦曲面と同値である。それらは完備ならば柱面

^{*} 10d00059@math.titech.ac.jp

[†] 本研究は特別研究員奨励費 (課題番号:23・9534) の助成を受けたものである。

となり、自明なものに限ることが知られていた [4, 17]. しかし、以下に定義されるある種の特異点を許容した平坦曲面、平坦フロントで完備なものには非自明な例が数多く存在する. C^∞ -写像 $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ が平坦フロントであるとは、各点 $p \in M^2$ に対し、その近傍 $U \subset M^2$ と C^∞ -写像 $\nu: U \rightarrow S^2$ が存在して、 $\langle df(TM), \nu \rangle = 0$, $\text{rank}(d\nu) \leq 1$ かつ $(f, \nu): U \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2$ がはめ込みであるものをいう. さらに、平坦フロント $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ が完備であるとは、 M^2 上のコンパクトな台を持つ 2 階の対称共変テンソル T が存在し、 $ds^2 + T$ が M^2 上の完備な計量となるときをいう. このような完備平坦フロントは完備平坦曲面の一般化であり、非自明な例が数多く存在する. Murata-Umehara [18] はそれらを研究し、次の結果を得た.

事実 1.1 ([18]). 完備平坦フロント $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ は、特異点集合が空でないならば臍点を持たず、向き付け可能であり余向き付け可能である. それらは変曲点を持たない正則閉曲線 $\hat{\xi}: S^1 \rightarrow S^2$ と S^1 上の 1 次微分形式 α で

$$\int_{S^1} \hat{\xi} \alpha = 0$$

を満たすものと対応する. さらに、 f の全てのエンドが埋め込みであるならば、 f のカस्प辺でない特異点は少なくとも 4 つ存在する.

一方で、球面 S^3 の外的平坦曲面は、O'Neill-Stiel の定理により完備ならば全測地的となり自明なものに限る [20]. そこで、 S^3 の外的平坦フロントを考えると、完備、より強く閉である非自明なものが数多く存在する. 本稿の後半では、そのような S^3 の外的平坦閉フロントを研究した結果を紹介する.

また、3 次元双曲空間 H^3 の平坦曲面 (断面曲率が常に消える曲面) で完備なものはホロ球面と測地線のチューブとなり、自明なものに限ることが知られているが [24, 25], ある種の特異点を許容した平坦曲面である平坦フロントで完備なものを見ると、非自明な例が数多く存在する. 近年、それらの大域的性質の研究が盛んに行われており、詳細は [2, 15, 13, 14, 16]などを参照して頂きたい.

2 双曲空間の間の等長はめ込み

本節では、双曲平面 H^2 の双曲空間 H^3 への等長はめ込みを考える. 双曲空間 H^3 のはめ込まれた曲面の断面曲率を K とし、主曲率の積 (外的曲率) を K_{ext} とするとき、Gauss 方程式は $K = K_{\text{ext}} - 1$ と表すことができる. 従って、 H^2 の H^3 への等長はめ込みは、 H^3 の外的曲率が常に 0 な曲面 (外的平坦曲面) で完備なものと同値であることがわかる. こ

のとき，次が成り立つ．

命題 2.1 ([22, 6]). H^3 の完備な外的平坦曲面は可展面である．

ここで**可展面**とは測地線により生成される外的平坦曲面である．そこで，次の対応

$$(2.1) \quad H^3 \text{ の線織面 } \longleftrightarrow \mathcal{L}(H^3) \text{ の曲線}$$

を考える．ここで， $\mathcal{L}(H^3)$ は H^3 の向き付けられた測地線の空間である．

2.1 向き付けられた測地線の空間と可展面の null 曲線による表現

2.1.1 向き付けられた測地線の空間の計量構造

測地線の空間 $\mathcal{L}(H^3)$ は 4 次元多様体であり，さらに，自然な複素構造 J を持つことが知られている [5]．その複素曲面 $(\mathcal{L}(H^3), J)$ は H^3 のミニツイスター空間と呼ばれる．

ここでは，ミニツイスター空間 $(\mathcal{L}(H^3), J)$ の局所正則座標系 (μ_1, μ_2) を用いて， $\mathcal{L}(H^3)$ の計量を定義しよう．向き付けられた測地線 $[\gamma] \in \mathcal{L}(H^3)$ の代表元，すなわち弧長パラメータ表示を $\gamma = \gamma(t)$ とするとき，

$$\gamma_+ := \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t), \quad \gamma_- := \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t)$$

は代表元の取り方に依らず，理想境界 ∂H^3 の元を定める．そこで， ∂H^3 をリーマン球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と同一視したとき

$$(2.2) \quad \mu_1 := -\gamma_-, \quad \mu_2 := \frac{1}{\bar{\gamma}_+}$$

と定めると， (μ_1, μ_2) は複素曲面 $(\mathcal{L}(H^3), J)$ の局所正則座標系を与える．この座標系を用いて， $\mathcal{L}(H^3)$ の計量を次のように定義する：

定義 2.2. \mathbb{C} -値対称 2 階の共変テンソル \mathcal{G} を，

$$(2.3) \quad \mathcal{G} := \frac{4d\mu_1 d\bar{\mu}_2}{(1 + \mu_1 \bar{\mu}_2)^2}$$

と定め， $G = \text{Im } \mathcal{G}$, $\check{G} = \text{Re } \mathcal{G}$ とする． G を $\mathcal{L}(H^3)$ のミニツイスター計量， \check{G} を Cartan-Kanai 計量と呼ぶ．

計量 G, \check{G} は複素曲面 $(\mathcal{L}(H^3), J)$ の中間符号を持つ Kähler 計量である．

2.1.2 測地線の空間の null 曲線と可展面

対応 (2.1) のもとで、可展面と対応する $\mathcal{L}(H^3)$ の曲線は以下のようなになる：

定理 2.3. H^3 の漸近的完備な可展面は、 $\mathcal{L}(H^3)$ のミニツイスター計量に関して *null* で *Cartan-Kanai* 計量に関して因果的な曲線と対応する。

ここで、 $\mathcal{L}(H^3)$ の曲線 $\alpha = \alpha(s)$ が G に関して *null* とは、 $G(\alpha', \alpha') = 0$ を満たすときをいい、 \check{G} に関して因果的とは、 $\check{G}(\alpha', \alpha') \leq 0$ を満たすときをいう。

2.2 理想錐面と指数型可展面

2.2.1 理想錐面

定理 2.3 により、 H^3 の漸近的完備な可展面を調べるには、 $\mathcal{L}(H^3)$ の G に関して *null* で \check{G} に関して因果的な曲線を調べればよいことになるが、その特別な場合である G と \check{G} ともに *null* である曲線を考えると次がわかる。

命題 2.4. $\mathcal{L}(H^3)$ の G と \check{G} ともに *null* である曲線に対応する漸近的完備な可展面は 1 つのエンドが理想境界の 1 点に漸近する。

このような 1 つのエンドが理想境界の 1 点に漸近する完備な可展面を**理想錐面**と呼ぶことにする。

2.2.2 指数型可展面

一方、 H^3 の可展面の平均曲率の挙動は次のようになる：

補題 2.5 (双曲的 Massey の補題). 可展面の非臍点集合に含まれる各漸近線 l の弧長パラメータを t とすると、平均曲率 H は l 上で

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{1}{H}$$

を満たす。

双曲的 Massey の補題 (補題 2.5) により, 平均曲率 H は

$$\frac{1}{H} = \begin{cases} \sqrt{P^2 - Q^2} \cosh\left(t + \frac{1}{2} \log \frac{P+Q}{P-Q}\right) & (\text{if } P > |Q|), \\ Pe^{\pm t} & (\text{if } P = |Q|), \\ \sqrt{Q^2 - P^2} \sinh\left(t + \frac{1}{2} \log \frac{Q+P}{Q-P}\right) & (\text{if } P < |Q|). \end{cases}$$

を満たすことになるが, 完備な可展面においては, 平均曲率が発散する点が生じる 3 番目の状況は起こらないことがわかる.

定義 2.6 (指数型可展面). H^3 の完備な可展面で, 非臍点集合に含まれる各漸近線上で, 平均曲率が漸近線の弧長 t に関して $e^{\pm t}$ に比例するものを**指数型可展面**と呼ぶ.

理想錐面は指数型可展面であるが, 実解析的な場合はその逆が成り立つ:

定理 2.7. 実解析的な指数型可展面は理想円錐である.

定理 2.7 において, 実解析的という仮定は外すことができない. 実解析的でない指数型可展面で理想境界の 1 点以上の点に漸近する可能性がある (例 2.8 参照).

例 2.8 (実解析的でない指数型可展面). ここでは, 実解析的でない指数型可展面で, 理想境界 $\partial H^3 = C \cup \{\infty\}$ の 2 点 0 と ∞ に漸近するものの図を紹介する (図 1 参照).

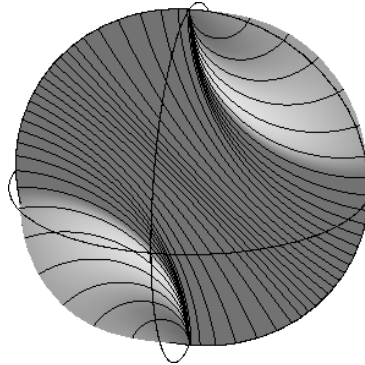


図 1 理想境界の異なる 2 点に漸近する実解析的でない指数型可展面.

3 球面間のフロントとしての等長はめ込み

本節では、3次元球面 S^3 の外的平坦フロントを考察する。3次元球面 S^3 を特殊ユニタリ群 $SU(2)$ と同一視する：

$$S^3 = SU(2) = \{X \in \mathbf{H}; \det X = 1\} \quad \left(\text{ただし } \mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}; z, w \in \mathbf{C} \right\} \right).$$

ここで \mathbf{H} は四元数体と同型である。また、 \mathbf{H} に内積 $\langle A, B \rangle := \text{trace}(AB^{-1})/2$ (ただし $A, B \in \mathbf{H}$) を与えるとき、4次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^4 と等長的である。単位接ベクトル束

$$T_1S^3 = \{(p, v) \in S^3 \times S^3; \langle p, v \rangle = 0\} \subset \mathbf{H} \times \mathbf{H}$$

は標準的接触形式 (Liouville 形式) Θ を持つ。 S^3 への自然な射影を π とするとき、 S^3 のフロントは次のように定義される。

定義 3.1 (フロント). 2次元多様体 M^2 から S^3 への C^∞ -写像 $f: M^2 \rightarrow S^3$ が**フロント (front)** であるとは、各点 $p \in M^2$ に対し、その近傍 $U \subset M^2$ と Legendre はめ込み $L: U \rightarrow T_1S^3$ が存在して、 $\pi \circ L = f$ となるときをいう。

曲面、つまり M^2 から S^3 へのはめ込みは、その (局所的に定義される) 単位法線ベクトル場 ν を用いて定まる写像 $L = (f, \nu)$ が Legendre はめ込みを与えるので、フロントである。また、特異点 (すなわち $\text{rank}(df)_p \leq 1$ となる点 $p \in M^2$) をもつ場合にもフロントとなる例が存在するので、フロントははめ込まれた曲面よりも広いクラスである。

フロント $f: M^2 \rightarrow S^3$ の Legendre リフト $L = (f, \nu)$ の第2成分として定まる S^3 への写像 ν を単位法線ベクトル場という。また、 $p \in M^2$ がフロント f の**臍点** であるとは、 $\text{rank}(d\nu)_p = 0$ となるときをいう。フロントにおける外的平坦性を次のようにして定義する。

定義 3.2 (外的平坦フロント). フロント $f: M^2 \rightarrow S^3$ が**外的平坦 (extrinsically flat)** であるとは、その単位法線ベクトル場 ν が常に退化しているときをいう。

S^3 の大円の運動の軌跡として得られるフロントを**線織的** であるといい、線織的な外的平坦フロントを**可展的** という。

外的平坦フロント $f: M^2 \rightarrow S^3$ が閉であるとは、 M^2 が境界のないコンパクト2次元多様体であるときをいう。以下はそれらの分類を与える：

定理 3.3. 全測地的でない S^3 の外的平坦閉フロントは、 S^2 の閉曲線のペア $(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$

で

$$(3.1) \quad \kappa_1(s) > -\kappa_2(s), \quad s \text{ は弧長パラメータ,} \quad \text{長さが有理比}$$

を満たすものと 1 対 1 に対応する (ただし各 $k = 1, 2$ に対し, κ_k は γ_k の測地的曲率).

この対応は, 以下のように具体的に表される. 北極からの立体射影 π_N により, S^2 をリーマン球面 $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ と同一視する. このとき, 条件 (3.1) を満たす S^2 の閉曲線のペア $(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ に対し, $\mu_k(s) = \pi_N(\gamma_k(s))$ とし

$$M_k(s) := \frac{1}{\sqrt{1 + |\mu_k|^2}} \begin{bmatrix} 1 & \mu_k(s) \\ -\bar{\mu}_k(s) & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma(t) := \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}$$

($k = 1, 2$) とするとき, 写像

$$(3.2) \quad f(s, t) = M_1(s) \sigma(t) M_2(s)^{-1} \in \text{SU}(2) = S^3$$

は外的平坦閉フロントを与える. 逆に, すべての外的平坦閉フロントはこのようにして得られる.

3.1 双対性と焦面

3.1.1 双対性について

測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ をグラスマン多様体 $\tilde{\text{Gr}}_2(\mathbf{R}^4)$ と同一視するとき, \mathbf{R}^4 での直交補空間を与える写像

$$\tilde{\text{Gr}}_2(\mathbf{R}^4) \ni \Pi \mapsto \Pi^\perp \in \tilde{\text{Gr}}_2(\mathbf{R}^4)$$

は, 直交双対測地線を定める. これを用いて, 線織面に対してその双対線織面が定義される. この双対性に関する先行研究を紹介する. 可展面のあるクラスとして, 接線曲面と呼ばれるものがある. すなわち, S^3 の曲線の接線方向に測地線を伸ばしてできる線織面である. Izumiya-Nagai-Saji [8] は, S^3 の線織面や可展面に現れる特異点を研究し, その中で接線曲面の双対線織面は接線曲面であることを示している.

しかし, 一般の可展面の双対線織面は可展面であるかどうかは不明である. そこで, 筆者は主定理を得るために用いた手法を適用して, この問題が肯定的に解決されることを示した. すなわち, 可展面の双対線織面は可展面である. また, 外的平坦閉フロントで, その双対と合同なもの, すなわち自己双対外的平坦閉フロントも分類することができた.

系 3.4. 自己双対外的平坦閉フロントは, 有理長を持つ球面卵形線と 1 対 1 に対応する.

3.1.2 焦面について

一般に、外的平坦フロントと平坦フロントは異なる性質を持つ。例えば、平坦フロントの平行フロントは平坦フロントであるが、外的平坦性は平行フロントをとる操作で保たれない。しかし、類似する性質として、平坦性も外的平坦性も焦面をとる操作で不変であることがわかった。ここで、焦面とはフロントの平行曲面の特異点の軌跡である。 $\Sigma^3 = \mathbf{R}^3$, S^3 , H^3 の平坦フロントに対して、その焦面は平坦フロントを与えることが知られている ($\Sigma^3 = H^3$ の場合は [21], $\Sigma^3 = \mathbf{R}^3$ の場合は [18], $\Sigma^3 = S^3$ の場合は [12] 参照)。

Kokubu-Rossman-Umehara-Yamada [13] は H^3 の平坦フロントの焦面を研究した。その中で、焦面の逆問題、すなわち“与えられた平坦フロントに対して、それを焦面に持つような平坦フロントは存在するか”という問題を考え、それは常に解けることを示した。さらに、完備な平坦曲面であるホロ球面と測地線のチューブを焦面に持つ平坦フロントを分類した。

同様の問題を S^3 の外的平坦フロントについて考えると、焦面の逆問題には、解が存在しない場合があることがわかった。

系 3.5. 全測地的曲面を焦面に持つような、外的平坦フロントは存在しない。

参考文献

- [1] K. ABE, H. MORI AND H. TAKAHASHI, A parametrization of isometric immersions between hyperbolic spaces, *Geom. Dedicata* **65** (1997), 31–46.
- [2] J. A. GÁLVEZ, A. MARTÍNEZ AND F. MILÁN, Flat surfaces in the hyperbolic 3-space, *Math. Ann.* **316** (2000), 419–435.
- [3] N. GEORGIU AND B. GUILFOYLE, On the space of oriented geodesics of Hyperbolic 3-space, *Rocky Mountain J. Math.*, **40** (2010), 1183–1219.
- [4] P. HARTMAN AND L. NIRENBERG, On spherical image maps whose Jacobians do not change sign, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 901–920.
- [5] T. J. HITCHIN, Monopoles and Geodesics, *Commun. Math. Phys.* **83** (1982), 579–602.
- [6] A. HONDA, Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space, *Tohoku Math. J. (2)* **64** (2012), 171–193.
- [7] A. HONDA, Surfaces of constant Gaussian curvature-1 with singularities in the 3-Sphere, preprint.

- [8] S. IZUMIYA, T. NAGAI AND K. SAJI, Great circular surfaces in the three-sphere, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), 409–425.
- [9] M. Kanai, *Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations*, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **8** (1988), no. 2, 215–239.
- [10] S. KANEYUKI AND M. KOZAI, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, *Tokyo J. Math.*, **8** (1985), no. 1, 81–98.
- [11] M. Kimura, *Space of geodesics in hyperbolic spaces and Lorentz numbers*, *Mem. Faculty of Sci. and Engi. Shimane Univ.*, **36** (2003), 61–67.
- [12] Y. KITAGAWA AND M. UMEHARA, Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3 , *Geom. Dedicata* **155** (2011), 105–140.
- [13] M. KOKUBU, W. ROSSMAN, M. UMEHARA AND K. YAMADA, Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 265–299.
- [14] M. KOKUBU, W. ROSSMAN, M. UMEHARA AND K. YAMADA, Asymptotic behavior of flat surfaces in hyperbolic 3-space, *J. Math. Soc. Japan* **61** (2009), 799–852.
- [15] M. KOKUBU, M. UMEHARA AND K. YAMADA, An elementary proof of Small’s formula for null curves in $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ and an analogue for Legendrian curves in $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$, *Osaka J. Math.* **40** (2003), 697–715.
- [16] M. KOKUBU, M. UMEHARA AND K. YAMADA, Flat fronts in hyperbolic 3-space, *Pacific J. Math.* **216** (2004), 149–175.
- [17] W. S. MASSEY, Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space, *Tohoku Math. J.* **14** (1962), 73–79.
- [18] S. MURATA AND M. UMEHARA, Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space, *J. Differential Geom.* **82** (2009), 279–316.
- [19] K. NOMIZU, Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space, *Math. Ann.* **205** (1973), 181–192.
- [20] B. O’NEILL AND E. STIEL, Isometric immersions of constant curvature manifolds, *Michigan. Math. J.* **10** (1963), 335–339.
- [21] P. ROITMAN, Flat surfaces in hyperbolic 3-space as normal surfaces to a congruence of geodesics, *Tohoku Math. J.* **59** (2007) 21–37.
- [22] E. Portnoy, *Developable surfaces in hyperbolic space.*, *Pacific J. Math.*, **57** (1975), no. 1, 281–288.
- [23] M. Salvai, *On the geometry of the space of oriented lines of the hyperbolic space*, *Glasgow Math. J.*, **49** (2007), 357–366.

- [24] S. SASAKI, On complete flat surfaces in hyperbolic 3-space, *Kodai Math. Sem. Rep.* **21** (1973), 449–457.
- [25] JU. A. VOLKOV, AND S. M. VLADIMIROVA, Isometric immersions of the Euclidean plane in Lobačevskiĭ space, *Mat. Zametki* **10** (1971), 327–332.